

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1968)

**Artikel:** Räume mit Operatorengruppen und Cohomologie.  
**Autor:** Mislin, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32926>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Räume mit Operatorengruppen und Cohomologie

G. MISLIN

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit handelt von Beziehungen zwischen einer endlichen Gruppe  $\pi$ , die auf einem Polyeder  $X$  operiert, und der Cohomologie des Raumes  $X$  sowie des Raumes  $X/\pi$  der Bahnkurven (Orbitraum).

Im Falle wo  $\pi$  fixpunktfrei operiert, wo also  $X$  eine reguläre Überlagerung von  $X/\pi$  ist, wird bekanntlich die Beziehung zwischen der (singulären) Cohomologie von  $X$  und derjenigen von  $X/\pi$  durch die Überlagerungsspektralsequenz von LERAY–CARTAN vermittelt. Sie beginnt mit  $H^m(\pi; H^n(X; G))$  und konvergiert gegen  $H^{m+n}(X/\pi; G)$ ; wählt man als Koeffizientengruppe  $G$  etwa  $\mathbf{Q}$ , so bricht sie zusammen, woraus resultiert, dass der invariante Teil  $H^k(X; \mathbf{Q})^\pi$  zu  $H^k(X/\pi; \mathbf{Q})$  isomorph ist. Diese Aussagen bleiben auch richtig, wenn nicht vorausgesetzt wird, dass  $\pi$  fixpunktfrei auf  $X$  operiert.

Diese und ähnliche bekannte Resultate werden in § 1 auf „*ausserordentliche*“ Cohomologietheorien verallgemeinert; wir nehmen nicht an, dass  $\pi$  fixpunktfrei operiert. Das Haupthilfsmittel ist die verallgemeinerte Atiyah–Hirzebruch Spektralsequenz, welche zu einer Faserung gehört; sie verbindet die gewöhnliche Cohomologie der Basis einer Faserung mit der ausserordentlichen Cohomologie des totalen Raumes, und sie stimmt im Falle der gewöhnlichen Cohomologie mit der üblichen Leray–Serre-Spektralsequenz einer Faserung überein. Wir betrachten im besonderen (§ 2) den Fall in welchem  $\pi$  in der Cohomologie von  $X$  trivial operiert. Es ergibt sich eine Anwendung auf die Cohomologie von Lie-Gruppen; so erhalten wir z.B. den Satz: Ist  $G$  eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und bezeichnet  $T$  die Torsionsuntergruppe der Fundamentalgruppe von  $G$ , so besitzt der unitäre  $K$ -Ring  $K^*(G)$  höchstens  $|T|$ -Torsion (dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultates von HODGKIN [6], welches besagt, dass  $K^*(G)$  torsionsfrei ist, falls die Fundamentalgruppe von  $G$  keine Torsion besitzt).

Sodann betrachten wir in § 3 Operatorengruppen  $\pi$ , welche  $p$ -Gruppen sind. Für solche erhalten wir einfache Beziehungen zwischen der  $q$ -Torsion der (ausserordentlichen) Cohomologie von  $X$  und jener des Orbitraumes  $X/\pi$ , falls  $q$  teilerfremd ist zu  $p$ : es gilt für die Bettizahlen  $p_n^{(q)}$  (d.h. die  $\mathbf{Z}_q$ -Ränge von  $h^n(\quad; \mathbf{Z}_q)$ )

$$p_n^{(q)}(X) \equiv p_n^{(q)}(X/\pi) \pmod{\theta(q)}$$

wobei  $\theta(q)$  den „Exponenten“ von  $q$  mod.  $p$  bezeichnet (die kleinste Zahl  $k > 0$  mit  $q^k \equiv 1 \pmod{p}$ ); für die Bettizahlen  $p_n = p_n^{(0)}$  können wir daraus folgern, dass

$$p_n(X) \equiv p_n(X/\pi) \pmod{p-1}$$

ist. Wir behandeln auch den Fall  $q=p$ ; hier erhalten wir aber nur eine Abschätzung für die  $p$ -Torsion von  $X$ , und auch dies nur für die gewöhnliche Cohomologie; die verwendete Methode, die von den übrigen Teilen der Arbeit unabhängig ist, stützt sich auf geeignete Wahl von lokalen Koeffizienten. Als Anwendung dieses Ergebnisses im Falle  $q=p$  wird ein gruppentheoretischer Satz bewiesen: er liefert eine Abschätzung für den  $p$ -Rang eines Normalteilers  $H$  der Gruppe  $G$ , falls  $G/H$  eine  $p$ -Gruppe ist (unter dem  $p$ -Rang von  $H$  verstehen wir wie üblich die Dimension über  $\mathbf{Z}_p$  von  $(H/[H, H]) \otimes \mathbf{Z}_p$ ).

Herrn Prof. B. ECKMANN danke ich für seine zahlreichen Anregungen und sein förderndes Interesse, welches er dieser Arbeit entgegenbrachte.

## § 0. Vorbereitungen

### a) Bezeichnungen

Wir bezeichnen mit  $\tilde{h}^n$  eine beliebige (ausserordentliche, reduzierte) Cohomologietheorie [vgl. 1], und mit  $\tilde{H}^n$  die (reduzierte) zelluläre Cohomologietheorie. Bekanntlich stimmen auf der Kategorie  $\mathfrak{A}$  der Räume vom Homotopietypus eines endlichen CW-Komplexes alle Cohomologietheorien mit Dimensionsaxiom mit der zellulären überein, weshalb wir  $\tilde{H}^n$  häufig als „gewöhnliche“ Cohomologie bezeichnen. Wie üblich schreiben wir  $X^+$  für die disjunkte Vereinigung von  $X$  mit einem Punkt, den man als Basispunkt von  $X^+$  wählt. Es ist dann *per definitionem*  $h^n(X) = \tilde{h}^n(X^+)$ . Operiert eine Gruppe  $\pi$  auf  $X$ , so erweitern wir ihre Operationen in evidenter Weise auf  $X^+$ : der Basispunkt von  $X^+$  soll unter allen Operationen von  $\pi$  festbleiben. Mit dieser Konvention ist klar, dass dann  $\pi$  auf  $h^n(X) = \tilde{h}^n(X^+)$  operiert,  $h^n(X)$  also ein  $\pi$ -Modul ist. Unter  $\pi$ -Modul wollen wir immer  $\pi$ -links-Modul verstehen.

### b) Die Spektralsequenz der Faserungen

Es sei  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  eine (Serre-) Faserung mit  $E \in \mathfrak{A}$  (d.h.  $E$  hat den Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes) und einem CW-Komplex  $B$  mit endlichen Skeletten als Basis. Dann gibt es eine Spektralsequenz  $\{E_r^{m,n}, d_r\}$  mit  $E_1^{m,n} = H^m(B; h^n(F))$ , die gegen  $h^{m+n}(E)$  konvergiert. Es ist also  $E_\infty^{m,n} = \mathcal{G}^m(h^{m+n}(E))$ , wobei die graduierte Gruppe  $\mathcal{G}^q(E)$  assoziiert ist zu der Filtrierung  $F^m(h^q(E)) = \text{Ker}(h^q(E) \xrightarrow{j^*} h^q(E_{m-1}))$ . Dabei bezeichnet  $E_{m-1}$  das Urbild  $p^{-1}(B_{m-1})$  des  $(m-1)$ -Skelettes von  $B$  und  $j: E_{m-1} \rightarrow E$  die Einbettung. Die Filtrierung von  $h^q(E)$  ist vollständig, da  $E$  in  $\mathfrak{A}$  liegt. Man erhält einen einfachen Beweis für die Konvergenz dieser Spektralsequenz mit der Methode von ECKMANN–HILTON [vgl. 2].

### c) Koeffizientengruppen

Wir wollen kurz einige Definitionen und Sätze für Cohomologietheorien „mit Koeffizienten  $\mathbf{Z}_q$ “ angeben [vgl. 3]. Es sei  $M_q$  ein Cohomologie-Moore-Raum vom

Typ  $(\mathbf{Z}_q, 2)$ . Um einen Raum  $M_q$  zu fixieren, betrachten wir eine Abbildung  $f: S^1 \rightarrow S^1$  vom Grade  $q$  mit  $q > 1$ . Wir setzen  $M_q$  gleich dem Abbildungskegel  $C(f) = S^1 \cup_f CS^1$ . Sind  $X$  und  $Y$  punktierte Räume, so schreiben wir wie üblich  $X \wedge Y$  für das „smash“-Produkt von  $X$  und  $Y$ , also  $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ .

Ist  $\tilde{h}^i(\ )$  eine Cohomologietheorie, so definiert man eine neue Cohomologietheorie  $\tilde{h}^i(\ ; \mathbf{Z}_q)$  mittels  $\tilde{h}^i(X; \mathbf{Z}_q) = \tilde{h}^{i+2}(X \wedge M_q)$  für alle  $i$ . Man verifiziert sofort, dass für die gewöhnliche Cohomologie folgt

$$\tilde{H}^n(S^0; \mathbf{Z}_q) = \tilde{H}^{n+2}(S^0 \wedge M_q) = \tilde{H}^{n+2}(M_q) = \begin{cases} \mathbf{Z}_q & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Schreibweise  $\tilde{H}^n(\ ; \mathbf{Z}_q)$  kompatibel ist mit der üblichen Schreibweise für zelluläre Cohomologie mit Koeffizienten  $\mathbf{Z}_q$ .

Es ist ferner üblich, Cohomologie mit Koeffizienten  $\mathbf{Q}$  wie folgt zu definieren:  $\tilde{h}^n(X; \mathbf{Q}) = \tilde{h}^n(X) \otimes \mathbf{Q}$ . Für die rationalen Zahlen  $\mathbf{Q}$  schreiben wir auch  $\mathbf{Z}_0$ .

Wie in der gewöhnlichen Cohomologietheorie gibt es (für  $X \in \mathfrak{A}$ ) eine exakte Koeffizientensequenz:

$$0 \rightarrow h^i(X) \otimes \mathbf{Z}_q \rightarrow h^i(X; \mathbf{Z}_q) \rightarrow \text{Tor}(h^{i+1}(X); \mathbf{Z}_q) \rightarrow 0$$

Dabei ist, gemäss unseren Konventionen,  $h^i(X; \mathbf{Z}_q) = \tilde{h}^{i+2}(X^+ \wedge M_q)$  für  $q \neq 0$  und  $h^i(X; \mathbf{Z}_0) = \tilde{h}^i(X^+) \otimes \mathbf{Z}_0$ . Für ungerade  $q$  ist  $h^n(X; \mathbf{Z}_q)$  ein  $\mathbf{Z}_q$ -Modul. Ist  $q$  gerade, so kann es vorkommen, dass  $h^n(X; \mathbf{Z}_q)$  nur ein  $\mathbf{Z}_{2q}$ -Modul ist, die obige Koeffizientensequenz also nicht aufspaltet [vgl. 3]. Doch können wir auf jeden Fall schliessen, dass die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl  $r$ , teilerfremd zu  $q$  falls  $q \neq 0$ , einen Isomorphismus  $h^n(X; \mathbf{Z}_q) \xrightarrow{r} h^n(X; \mathbf{Z}_q)$  induziert.

#### d) Transformationsgruppen

Es bezeichne  $\pi$  eine endliche Gruppe, die auf einem topologischen Raum  $X$  operiert. Bekanntlich gibt es für  $\pi$  einen klassifizierenden Raum  $B_\pi = K(\pi, 1)$ , der ein CW-Komplex mit endlichen Skeletten ist. Seine universelle Überlagerung  $E_\pi$  ist ein zusammenziehbarer Raum, auf dem  $\pi$  fixpunktfrei operiert. Wir wollen  $\pi$  auf  $X \times E_\pi$  operieren lassen mittels  $a(x, y) = (ax, ay)$  für alle  $a \in \pi, x \in X$  und  $y \in E_\pi$ . Mit  $X_\pi$  bezeichnen wir den Raum der Bahnkurven (Orbitraum)  $X \times E_\pi / \pi$  bezüglich der Operationen von  $\pi$ . Die Projektion  $X \times E_\pi \rightarrow E_\pi$  ist mit dem Operieren von  $\pi$  verträglich und induziert somit eine Abbildung  $X_\pi \rightarrow B_\pi$  zwischen den entsprechenden Orbiträumen. Diese Abbildung ist eine Faserung mit Faser  $X$  [vgl. 4, p. 52].

### § 1. Räume mit Operatorengruppen

Operiert die endliche Gruppe  $\pi$  auf dem Raum  $X$ , so gibt die Spektralsequenz der Faserung  $X \rightarrow X_\pi \rightarrow B_\pi$  (vgl. § 0, (b)) einen Zusammenhang zwischen der Cohomologie

von  $X$  und der von  $X_\pi$  an. Das folgende Lemma gestattet es dann, von der Cohomologie von  $X_\pi$  auf jene von  $X/\pi$  zu schliessen.

LEMMA 1. Die Projektion  $X \times E_\pi \rightarrow X$  induziert eine Abbildung  $\varphi: X_\pi \rightarrow X/\pi$  zwischen den Orbiträumen. Sind  $X_\pi$  und  $X/\pi$  in  $\mathfrak{A}$  und ist  $q=0$  oder  $(q, |\pi|)=1$ , so induziert  $\varphi$  einen Isomorphismus  $h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q) \cong h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$ .

Beweis. Es sei  $\varphi$  die oben beschriebene Abbildung  $X_\pi \rightarrow X/\pi$ . Für  $y \in X/\pi$  gilt  $\varphi^{-1}(y) \cong E_\pi/\pi(\bar{y})$ , wobei  $\bar{y} \in X$  ein Punkt ist, der über  $y \in X/\pi$  liegt, und  $\pi(\bar{y})$  die Isotropiegruppe von  $\bar{y} \in X$  bezeichnet (d.h.  $\pi(\bar{y}) = \{a \in \pi \mid a\bar{y} = \bar{y}\}$ ). Wegen  $E_\pi/\pi(\bar{y}) \cong \cong K(\pi(\bar{y}), 1)$  ist somit, für  $q=0$  oder  $(q, |\pi|)=1$ ,  $\tilde{H}^n(\varphi^{-1}(y); \mathbf{Z}_q) \cong \tilde{H}^n(\pi(\bar{y}); \mathbf{Z}_q) = 0$ ; denn die Ordnung von  $\pi(\bar{y})$  ist natürlich ein Teiler der Ordnung von  $\pi$ . Also folgt aus dem „Mapping-Theorem“ von VIETORIS, dass  $\varphi$  einen Isomorphismus  $\varphi^*: H^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q) \cong H^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$  induziert. Im Falle  $q=0$  folgt daraus direkt obiges Lemma, wenn man beachtet, dass es für eine auf  $\mathfrak{A}$  definierte Cohomologietheorie  $h^n$  einen natürlichen Isomorphismus  $h^n(X; \mathbf{Q}) \cong \bigoplus_{r+s=n} H^r(X; \tilde{h}^s(S^0) \otimes \mathbf{Q})$  gibt [vgl. 5, p. 397].

Ist  $q \neq 0$ , so betrachtet man die durch  $\varphi$  induzierte Abbildung  $\hat{\varphi}: X_\pi^+ \wedge M_q \rightarrow (X/\pi)^+ \wedge M_q$ . Die Abbildung  $\hat{\varphi}^*: \tilde{H}^n((X/\pi)^+ \wedge M_q) \rightarrow \tilde{H}^n(X_\pi^+ \wedge M_q)$  fällt offensichtlich mit  $\varphi^*$  zusammen, ist also ein Isomorphismus. Da  $X_\pi^+ \wedge M_q$  und  $(X/\pi)^+ \wedge M_q$  in  $\mathfrak{A}$  liegen, können wir schliessen [vgl. 5, p. 376], dass  $\hat{\varphi}$  somit für eine beliebige Cohomologietheorie  $h^n$  einen Isomorphismus  $\tilde{h}^n((X/\pi)^+ \wedge M_q) \rightarrow \tilde{h}^n(X_\pi^+ \wedge M_q)$  induziert. Also ist  $h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q) \cong h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$ .

BEMERKUNG. Operiert  $\pi$  fixpunktfrei auf  $X$ , so sind  $X_\pi$  und  $X/\pi$  homotopieäquivalent, denn die Abbildung  $X_\pi \rightarrow X/\pi$  ist dann eine Faserung mit zusammenziehbarer Faser  $E_\pi$ . Das obige Lemma ist also für diesen Fall trivial.

SATZ 1. Es operiere die endliche Gruppe  $\pi$  auf dem Raum  $X$ . Sind  $X$ ,  $X_\pi$  und  $X/\pi$  in  $\mathfrak{A}$ , so ist für  $q=0$  oder  $(q, |\pi|)=1$  der unter den Operationen von  $\pi$  invariante Teil der Cohomologie von  $X$  (mit Koeffizienten  $\mathbf{Z}_q$ ) isomorph zur Cohomologie des Orbitraumes  $X/\pi$ :

$$h^n(X; \mathbf{Z}_q)^\pi \cong h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q).$$

Beweis. Wir betrachten die Faserungs-Spektralsequenz  $\{E_r^{m,n}, d_r\}$  der Faserung  $X \rightarrow X_\pi \rightarrow B_\pi$ . Sie konvergiert, da  $X_\pi$  in  $\mathfrak{A}$  und  $B_\pi$  ein CW-Komplex mit endlichen Skeletten ist. Da die Multiplikation mit der Gruppenordnung  $|\pi|$  einen Isomorphismus  $h^n(X; \mathbf{Z}_q) \xrightarrow{|\pi|} h^n(X; \mathbf{Z}_q)$  induziert (vgl. § 0, Abschnitt c) folgt

$$E_1^{m,n} = H^m(\pi; h^n(X; \mathbf{Z}_q)) \cong \begin{cases} h^n(X; \mathbf{Z}_q)^\pi & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m \neq 0 \end{cases}$$

Mithin sind alle Differentiale  $d_r = 0$  für  $r \geq 1$ , und es gilt also  $E_1^{m,n} \cong E_\infty^{m,n}$ . Wir erhalten somit  $E_1^{0,n} \cong h^n(X; \mathbf{Z}_q)^\pi \cong \mathcal{G}^0 h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$ . Für  $p > 0$  ist  $E_\infty^{p,n-p} \cong \mathcal{G}^p h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q) = 0$ .

Also ist, da die Filtrierung von  $h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$  vollständig ist,  $\mathcal{G}^0 h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q) \cong h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q)$ . Verwenden wir noch Lemma 1, so folgt  $h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q) \cong h^n(X_\pi; \mathbf{Z}_q) \cong h_n(X; \mathbf{Z}_q)^\pi$ , wobei die Isomorphismen von den kanonischen Abbildungen  $(X \rightarrow X_\pi \rightarrow X/\pi) = (X \rightarrow X/\pi)$  induziert werden.

### § 2. Triviale Operationen auf den Cohomologiegruppen

Es sei weiterhin  $X$  ein Raum mit endlicher Operatorengruppe  $\pi$ . Die Räume  $X$ ,  $X_\pi$  und  $X/\pi$  sollen in  $\mathfrak{A}$  sein. Wir wollen in diesem ganzen Paragraphen voraussetzen, dass die Abelschen Gruppen  $h^n(X)$  endlich-erzeugt seien.

**SATZ 2.** *Es sei  $\pi$  eine endliche Gruppe von Operatoren auf  $X$  und  $q > 1$  eine Zahl mit  $(q, |\pi|) = 1$ . Operiert  $\pi$  trivial auf  $h^{n-1}(X; \mathbf{Z}_q)$  für ein bestimmtes  $n \in \mathbf{Z}$ , so ist  $\text{Tor}(h^n(X), \mathbf{Z}_q) \cong \text{Tor}(h^n(X/\pi), \mathbf{Z}_q)$ .*

*Beweis.* Wir betrachten für  $i = n - 1$  und  $i = n$  die Koeffizientensequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & h^i(X) \otimes \mathbf{Z}_q & \rightarrow & h^i(X; \mathbf{Z}_q) & \rightarrow & \text{Tor}(h^{i+1}(X), \mathbf{Z}_q) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow f_i \otimes \mathbf{Z}_q & & \uparrow \hat{f}_i & & \uparrow \text{Tor}(f_{i+1}, \mathbf{Z}_q) \\ 0 & \rightarrow & h^i(X/\pi) \otimes \mathbf{Z}_q & \rightarrow & h^i(X/\pi; \mathbf{Z}_q) & \rightarrow & \text{Tor}(h^{i+1}(X/\pi), \mathbf{Z}_q) \rightarrow 0 \end{array}$$

Die vertikalen Homomorphismen seien durch die kanonische Abbildung  $f: X \rightarrow X/\pi$  induziert. Dann ist das ganze Diagramm kommutativ wegen der Natürlichkeit der Koeffizientensequenzen. Nach Satz 1 ist  $\hat{f}_i$  ein Monomorphismus. Es folgt

1)  $f_n \otimes \mathbf{Z}_q: h^n(X/\pi) \otimes \mathbf{Z}_q \rightarrow h^n(X) \otimes \mathbf{Z}_q$  ist ein Monomorphismus.

Unsere Voraussetzungen über  $h^{n-1}(X; \mathbf{Z}_q)$  ergeben mit Satz 1 zusammen, dass  $\hat{f}_{n-1}$  ein Isomorphismus ist. Also folgt

2)  $\text{Tor}(f_n, \mathbf{Z}_q): \text{Tor}(h^n(X/\pi), \mathbf{Z}_q) \rightarrow \text{Tor}(h^n(X), \mathbf{Z}_q)$  ist ein Epimorphismus.

Aus 1) und 2) kann man (für endlich-erzeugte Abelsche Gruppen) schliessen, dass  $\text{Tor}(h^n(X/\pi), \mathbf{Z}_q) \cong \text{Tor}(h^n(X), \mathbf{Z}_q)$  ist.

Offensichtlich folgt dies auch schon, wenn man nur voraussetzt, dass die  $q$ -primären Teile von  $h^n(X)$  und  $h^n(X/\pi)$  endliche direkte Summanden sind.

**KOROLLAR 1.** *Operiert  $\pi$  trivial auf  $h^n(X)$  für alle  $n$ , so ist  $h^n(X) \cong h^n(X/\pi)$  modulo  $|\pi|$ -Torsion (d.h.  $h^n(X)$  modulo der Untergruppe der Elemente, welche als Ordnung einen Teiler einer Potenz von  $|\pi|$  haben, ist isomorph zur entsprechenden Faktorgruppe von  $h^n(X/\pi)$ ).*

*Beweis.* Nach Satz 2 haben  $h^n(X)$  und  $h^n(X/\pi)$  die gleiche Torsion modulo  $|\pi|$ -Torsion. Dass  $h^n(X)$  und  $h^n(X/\pi)$  den gleichen Rang haben folgt aus Satz 1, welcher im Falle trivialer Operationen von  $\pi$  auf  $h^n(X)$  impliziert  $h^n(X) \otimes \mathbf{Q} \cong h^n(X/\pi) \otimes \mathbf{Q}$ .

**BEMERKUNG.** Dafür, dass  $h^n(Y)$  mit  $Y \in \mathfrak{A}$  endlich-erzeugt ist, genügt die Voraussetzung:  $\tilde{h}^i(S^0)$  endlich-erzeugt für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Wir wollen ein Beispiel einer Anwendung von Korollar 1 angeben. HODGKIN hat in [6] unter anderem bewiesen, dass der unitäre  $K$ -Ring  $K^*(G)$  einer kompakten zusammenhängenden Liegruppe torsionsfrei ist, falls die Fundamentalgruppe  $\pi_1(G)$  keine Torsion besitzt. Wir können dies wie folgt verallgemeinern

**KOROLLAR 2.** *Ist  $G$  eine zusammenhängende und kompakte Liegruppe und bezeichnet  $T$  die Torsionsuntergruppe der Fundamentalgruppe von  $G$ , so hat  $K^*(G)$  höchstens  $|T|$ -Torsion.*

*Beweis.* Es sei  $\pi_1(G) = F \oplus T$ . Zum Normalteiler  $F$  von  $\pi_1(G)$  gehört eine Überlagerung  $G'$  von  $G$ , auf welcher die Decktransformationengruppe  $\pi \cong \pi_1(G)/F \cong T$  operiert. Nun erfüllt aber  $G'$  die Voraussetzungen des Satzes von HODGKIN (loc. cit.), denn nach Konstruktion ist  $G'$  eine kompakte zusammenhängende Liegruppe mit torsionsfreier Fundamentalgruppe  $\pi_1(G') \cong F$ . Also ist  $K^n(G')$  torsionsfrei für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Da  $G'$  eine zusammenhängende Liegruppe ist, sind die Operationen von  $\pi$  auf  $G'$  vom Homotopietyp der Identität. Folglich operiert  $\pi$  trivial auf  $K^n(G')$ , und wir erhalten Korollar 2 aus Korollar 1 für  $h^n = K^n$ .

### § 3. $p$ -Gruppen, die auf endlichen CW-Komplexen operieren

Im folgenden bezeichnet  $\pi$  immer eine (endliche)  $p$ -Gruppe, also eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von  $p$  ist. Um Sätze über  $p$ -Gruppen zu beweisen, ist das folgende bekannte Lemma ein nützliches Hilfsmittel.

**LEMMA 2.** *Operiert eine  $p$ -Gruppe  $\pi$  auf einer endlichen Menge  $M$ , so besteht zwischen der Anzahl der Elemente von  $M$  und der Anzahl der Fixelemente unter  $\pi$  die folgende Beziehung:  $|M| \equiv |M^\pi| \pmod{p}$ .*

Der Beweis ist evident: Die Menge  $M - M^\pi$  ist Vereinigung von disjunkten  $\pi$ -Äquivalenzklassen, wobei die Anzahl der Elemente in einer solchen Äquivalenzklasse ein Vielfaches von  $p$  beträgt.

Ist  $q$  eine ungerade Primzahl oder 0, so ist  $h^n(X; \mathbb{Z}_q)$  ein  $\mathbb{Z}_q$ -Vektorraum (vgl. § 0, Abschnitt c). Ist seine Dimension über  $\mathbb{Z}_q$  endlich, so schreiben wir dafür  $p_n^{(q)}(X)$ , und nennen dies die  $n$ -te Bettizahl mod.  $q$  von  $X$ . Für  $p_n^{(0)}(X)$  schreiben wir auch  $p_n(X)$ . Natürlich hängt  $p_n^{(q)}(X)$  von der gewählten Cohomologietheorie  $h^n$  ab. Für die gewöhnliche Cohomologietheorie  $H^n$  erhält man die Bettizahlen mod.  $q$  von  $X$  im klassischen Sinn. Im folgenden wollen wir einige Relationen angeben, die unabhängig von der betrachteten Cohomologietheorie zwischen den Bettizahlen bestehen. Zum Beispiel sagt Satz 1 aus, dass unter den dort angegebenen Voraussetzungen immer  $p_n^{(q)}(X) \geq p_n^{(q)}(X/\pi)$  ist wegen  $h^n(X; \mathbb{Z}_q)^\pi \cong h^n(X/\pi; \mathbb{Z}_q)$ .

Wir werden nun Lemma 2 auf  $p$ -Gruppen anwenden, die auf endlichen Cohomologiegruppen operieren. Dabei wollen wir immer voraussetzen, dass die Räume  $X$ ,  $X_\pi$ , und  $X/\pi$  in  $\mathfrak{A}$  liegen und somit Satz 1 gilt.

**SATZ 3.** *Es operiere die  $p$ -Gruppe  $\pi$  auf  $X$ . Dann bestehen zwischen den Bettizahlen (bezüglich einer beliebigen Cohomologietheorie) die folgenden Beziehungen*

a) *Ist  $q \neq 0$  und  $(p, q) = 1$ , so ist für alle  $n: p_n^{(q)}(X) \equiv p_n^{(q)}(X/\pi) \pmod{\theta(q)}$ , wobei  $\theta(q)$  den kleinsten Exponenten  $k > 0$  mit  $q^k \equiv 1 \pmod{p}$  bezeichnet.*

b) *Sind die Gruppen  $h^n(X)$  und  $h^n(X/\pi)$  endlich-erzeugt für alle  $n$ , so folgt  $p_n(X) \equiv p_n(X/\pi) \pmod{(p-1)}$ .*

*Beweis.* Nach Satz 1 ist  $h^n(X; \mathbf{Z}_q) \cong h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q)$  falls  $q=0$  oder  $(q, p)=1$  ist. Fall  $q \neq 0$ . Wir schreiben kurz  $a$  und  $b$  für die Dimensionen  $p_n^{(q)}(X)$  und  $p_n^{(q)}(X/\pi)$ . Aus Lemma 2 folgt  $|h^n(X; \mathbf{Z}_q)| = q^a \equiv |h^n(X; \mathbf{Z}_q)^\pi| = |h^n(X/\pi; \mathbf{Z}_q)| = q^b \pmod{p}$ . Demnach ist  $q^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$ , woraus mit der obigen Definition von  $\theta(q)$  folgt  $a-b = k \cdot \theta(q)$ .

Fall  $q=0$ . Wir wollen diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Dies ist möglich, wenn wir eine Primzahl  $r$  finden mit

$$\text{I) } p_n(X) = p_n^{(r)}(X) \text{ und } p_n(X/\pi) = p_n^{(r)}(X/\pi)$$

$$\text{II) } \theta(r) = p - 1$$

Dann folgt nämlich  $p_n(X) \equiv p_n(X/\pi) \pmod{(p-1)}$ . Nach dem universellen Koeffiziententheorem folgt

$$h^n(X; \mathbf{Z}_s) \cong h^n(X) \otimes \mathbf{Z}_s \oplus \text{Tor}(h^{n+1}(X), \mathbf{Z}_s)$$

für eine beliebige ungerade Primzahl  $s$ . Wählt man  $s$  teilerfremd zu den Ordnungen der (endlichen) Torsionsuntergruppen der Gruppen  $h^n(X)$ ,  $h^{n+1}(X)$ ,  $h^n(X/\pi)$  und  $h^{n+1}(X/\pi)$ , so ist die Bedingung I evidenterweise erfüllt.

Es sei nun  $q^*$  eine natürliche Zahl mit  $\theta(q^*) = p - 1$ , d.h. eine primitive  $(p-1)$ -te Einheitswurzel mod.  $p$ . Dann ist  $(q^*, p) = 1$ . Nach dem Satz von DIRICHLET gibt es folglich in der Menge  $F = \{f \mid f = q^* + mp, m \in \mathbf{Z}, m > 0\}$  unendlich viele Primzahlen. Aber für alle  $f \in F$  gilt trivialerweise  $f^w = (q^* + mp)^w \equiv (q^*)^w \pmod{p}$ , also  $\theta(f) = \theta(q^*)$ . Wir wählen nun aus  $F$  eine Primzahl  $p^*$ , welche die Ordnungen der Torsionsuntergruppen von  $h^n(X)$ ,  $h^{n+1}(X)$ ,  $h^n(X/\pi)$  und  $h^{n+1}(X/\pi)$  nicht teilt. Dann hat  $p^*$  die von  $r$  geforderten Eigenschaften.

**BEMERKUNG.** Ein analoges Resultat erhält man für  $q=2$ , wenn man sich auf Cohomologietheorien beschränkt, für welche  $h^n(X; \mathbf{Z}_2)$  ein  $\mathbf{Z}_2$ -Modul ist (z.B. unitäre K-Theorie).

Der Satz 3 gibt keine Auskunft über  $p_n^{(p)}(X)$ . Wir wollen wenigstens für die gewöhnliche Cohomologie eine Abschätzung dieser kritischen Bettizahl angeben.



**SATZ 4.** *Es sei  $\pi$  eine  $p$ -Gruppe, die fixpunktfrei auf einem Raum  $X$  operiere. Dann erfüllen die gewöhnlichen Bettizahlen mod.  $p$  von  $X$  und  $X/\pi$  die folgende Ungleichung:  $p_n^{(p)}(X) \leq |\pi| \cdot p_n^{(p)}(X/\pi)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen dies vorerst für den Fall  $\pi \cong \mathbf{Z}_p$ . Der allgemeine Fall wird sich dann mit vollständiger Induktion ergeben. Es gibt eine exakte Sequenz von  $\pi$ -Moduln  $0 \rightarrow I \rightarrow \mathbf{Z}_p[\pi] \rightarrow \mathbf{Z}_p \rightarrow 0$  wobei  $I$  das Augmentationsideal von  $\mathbf{Z}_p[\pi]$  bezeichnet. Dieses Ideal ist nilpotent und es gilt sogar  $I^k/I^{k+1} \cong \mathbf{Z}_p$  für  $0 \leq k < p$  ( $I^0 = \mathbf{Z}_p[\pi]$ ,  $I^p = 0$ ), vgl. [4, p. 39]. Wir haben somit eine Anzahl von Koeffizientensequenzen  $0 \rightarrow I^{k+1} \rightarrow I^k \rightarrow \mathbf{Z}_p \rightarrow 0$ , zu welchen exakte Cohomologiesequenzen

$$\cdots \rightarrow H^n(X/\pi; I^{k+1}) \rightarrow H^n(X/\pi; I^k) \rightarrow H^n(X/\pi; \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^{n+1}(X/\pi; I^{k+1}) \rightarrow \cdots$$

gehören. Man liest daraus ab, dass für die  $\mathbf{Z}_p$ -Dimensionen gilt  $\dim H^n(X/\pi; I^k) \leq \dim H^n(X/\pi; I^{k+1}) + p_n^{(p)}(X/\pi)$ .

Wegen  $H^n(X/\pi; I^0) = H^n(X/\pi; \mathbf{Z}_p[\pi]) \cong H^n(X; \mathbf{Z}_p)$  folgt

$$\begin{aligned} p_n^{(p)}(X) &\leq \dim H^n(X/\pi; I^1) + p_n^{(p)}(X/\pi) \leq \dim H^n(X/\pi; I^2) + 2 \cdot p_n^{(p)}(X/\pi) \\ &\leq \dim H^n(X/\pi; I^{p-1}) + (p-1) \cdot p_n^{(p)}(X/\pi) \end{aligned}$$

Aber es ist  $I^{p-1} \cong I^{p-1}/I^p \cong \mathbf{Z}_p$ , woraus schliesslich  $p_n^{(p)}(X) \leq p \cdot p_n^{(p)}(X/\pi)$  folgt.

Ist  $\pi$  irgendeine  $p$ -Gruppe, so besitzt sie einen Normalteiler  $\pi_N$  vom Index  $p$ , denn  $\pi$  ist auflösbar. Man kann also die Abbildung  $\Phi: X \rightarrow X/\pi$  faktorisieren über  $X/\pi_N$  als  $\Phi = \Phi_2 \Phi_1$ :

$$X \xrightarrow{\Phi_1} X/\pi_N \xrightarrow{\Phi_2} X/\pi$$

Ein Induktionsschluss liefert sofort  $p_n^{(p)}(X) \leq |\pi_N| p_n^{(p)}(X/\pi_N) \leq p \cdot |\pi_N| p_n^{(p)}(X/\pi) = |\pi| p_n^{(p)}(X/\pi)$ .

#### § 4. Einige Anwendungen

Wir wollen einige einfache Korollare angeben, welche aus den Sätzen der letzten Paragraphen folgen. Die Räume  $X$ ,  $X_\pi$  und  $X/\pi$  sollen wie immer in  $\mathfrak{A}$  liegen.

**KOROLLAR 3.** *Es operiere die  $p$ -Gruppe  $\pi$  auf  $X$ . Sind die Gruppen  $h^n(X)$  und  $h^n(X/\pi)$  endlich-erzeugt und ist  $p_n(X) < (p-1)$  für alle  $n$ , so operiert  $\pi$  trivial auf  $h^*(X; \mathbf{Q})$ .*

*Beweis.* Aus Satz 3 folgt  $p_n(X) \equiv p_n(X/\pi) \pmod{(p-1)}$ . Andererseits ist allgemein  $p_n(X) \geq p_n(X/\pi)$ , sodass aus  $p_n(X) < (p-1)$  folgt, dass  $p_n(X) = p_n(X/\pi)$  sein muss. Also ist  $h^n(X/\pi; \mathbf{Q}) \cong h^n(X; \mathbf{Q})^\pi \cong h^n(X; \mathbf{Q})$  für alle  $n$ .

Einen analogen Satz erhält man, wenn man in Korollar 3 die Bedingung  $p_n(X) < (p-1)$  ersetzt durch  $p_n^{(q)}(X) < \theta(q)$ .

Die nun folgenden Korollare beziehen sich auf die gewöhnliche Cohomologietheorie  $H^n$ .

**KOROLLAR 4.** *Es operiere die  $p$ -Gruppe  $\pi$  fixpunktfrei auf  $X$ . Ist  $p_n^{(p)}(X/\pi) = 0$  so ist auch  $p_n^{(p)}(X) = 0$ .*

Der Beweis folgt direkt aus Satz 4, welcher aussagt, dass die Ungleichung  $p_n^{(p)}(X) \leq |\pi| p_n^{(p)}(X/\pi)$  besteht.

Für die anderen Bettizahlen  $p_n^{(q)}$ ,  $q$  teilerfremd zu  $p$ , kann keine solche Beziehung bestehen, wie einfache Gegenbeispiele zeigen.

**KOROLLAR 5.** *Es operiere die  $p$ -Gruppe  $\pi$  fixpunktfrei auf  $X$ . Ist die Euler-Poincaré-Charakteristik  $\chi(X) \neq 0$ , so folgt  $\max_n p_n(X) \geq (p-1)$ . (Es ist  $X \in \mathfrak{A}$ , also  $H^n(X)$  endlich-erzeugt für alle  $n$  und die Euler-Poincaré-Charakteristik  $\chi(X) = \sum (-1)^n p_n(X)$  wohldefiniert.)*

*Beweis.* Wäre  $\max p_n(X) < (p-1)$ , so würde aus Korollar 3 folgen  $p_n(X) = p_n(X/\pi)$  und mithin  $\chi(X) = \chi(X/\pi)$ . Da wir vorausgesetzt haben, dass  $\pi$  fixpunktfrei operiert, gilt bekanntlich  $\chi(X) = |\pi| \cdot \chi(X/\pi)$ . Wegen  $\chi(X) \neq 0$  müsste somit  $|\pi| = 1$  sein, was wir natürlich ausschliessen.

Man kann aus diesen Korollaren Sätze über beliebige Transformationsgruppen auf  $X$  erhalten, wenn man das Operieren ihrer endlichen  $p$ -Untergruppen betrachtet.

Zum Schluss sei noch eine Anwendung auf die Gruppentheorie angegeben. Es bezeichne  $G$  eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Gruppe und  $R_p(G) = \dim_{\mathbf{Z}_p}(G/[G, G]) \otimes \mathbf{Z}_p$  den  $p$ -Rang der abelsch-gemachten Gruppe  $G$ . Mit Hilfe von Satz 4 kann man eine Abschätzung für den  $p$ -Rang eines abelsch-gemachten Normalteilers von  $G$  gewinnen.

**KOROLLAR 6.** *Es sei  $H$  ein Normalteiler der Gruppe  $G$  und  $G/H$  eine (endliche)  $p$ -Gruppe. Die abelsch-gemachten Gruppen  $G$  und  $H$  sollen endlich-erzeugt sein. Dann gilt  $R_p(H) \leq |G/H| \cdot R_p(G)$ .*

*Beweis.* Wir wählen für  $X$  den Eilenberg-MacLane CW-Komplex  $K(H, 1)$ , welcher  $K(G, 1)$  überlagert. Decktransformationengruppe dieser Überlagerung ist die  $p$ -Gruppe  $\pi \cong G/H$ . Nach Satz 4 (der auch für unendliche CW-Komplexe gilt) folgt  $p_1^{(p)}(X) \leq |G/H| \cdot p_1^{(p)}(X/\pi)$ . Da  $G/[G, G]$  endlich-erzeugt ist, gilt  $H^1(X/\pi; \mathbf{Z}_p) \cong \text{Hom}(G/[G, G], \mathbf{Z}_p) \cong (G/[G, G]) \otimes \mathbf{Z}_p$  und somit  $p_1^{(p)}(X/\pi) = R_p(G)$ . Analog ist  $p_1^{(p)}(X) = R_p(H)$ , womit das Korollar bewiesen ist.

Ist  $G$  eine freie Gruppe, so steht dieses Korollar im Einklang mit dem Satz von Schreier, welcher besagt, dass  $(R_p(H) - 1) = |G/H| \cdot (R_p(G) - 1)$  ist; also gilt  $R_p(H) = |G/H| \cdot R_p(G) - (|G/H| - 1) \leq |G/H| \cdot R_p(G)$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] WHITEHEAD, G. W., *Generalized Homology Theories*, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 227–283.  
 [2] ECKMANN, B. and HILTON, P. J., *Composition Functors and Spectral Sequences*, Comment. Math. Helv. 41 (1966–67), 187–221.

- [3] ARAKI, S. and TODA, H., *Multiplicative Structures in mod  $q$  Cohomology theories*, I, Osaka J. Math. 2 (1965), 71–115.
- [4] BOREL, A., *Seminar on Transformation Groups* (Princeton University Press, 1960).
- [5] ECKMANN, B., *Topologia algebraica* (Università di Roma, 1966).
- [6] HODGKIN, L., *On the K-Theory of Lie Groups*, Topology 6 (1967), 1–36.

Eingegangen den 22. Dezember 1967