Strukturen auf Quotienten komplexer Räume.

Strukturen auf Quotienten komplexer Räume

KLAUS-WERNER WIEGMANN (München)

In seiner Arbeit [6] hat CARTAN auf dem Quotienten X/R eines reduzierten komplexen Raumes X nach einer eigentlichen Äquivalenzrelation R die Struktur ${}_X\mathcal{O}/R$ betrachtet und bewiesen, daß $(X/R, {}_X\mathcal{O}/R)$ genau dann ein komplexer Raum ist, wenn X/R lokal-${}_X\mathcal{O}/R$-separabel ist (Main Theorem). Auch für komplexe Räume im Sinne von GRAUERT [9] läßt sich die *Quotientenstruktur* definieren (s. § **1**) und ein verschärftes Main Theorem beweisen (s. § **5**). ${}_X\mathcal{O}/R$ ist gewissermaßen eine maximale lokalgeringte Struktur auf X/R.

In der vorliegenden Arbeit werden noch andere lokal-geringte Strukturen auf Quotienten komplexer Räume betrachtet, definiert z.B. durch holomorphe Funktionen und Abbildungen, sogenannte *Spektralstrukturen* (s. § **2**) oder durch analytische Äquivalenzrelationen im Sinne von HOLMANN [13] (s. § **6**). Ergebnisse sind u.a.:

(a) *Ein komplexer Raum ist genau dann lokal-holomorph-separabel, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert* (s. § **3** und § **4**).

(b) *Jeder schwach-holomorph-konvexe komplexe Raum ist holomorph-konvex* (s. § **4**).

(c) *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $\mathscr{B}$ eine Garbe lokaler Unteralgebren von $\mathscr{A}$. Dann ist $(X, \mathscr{B})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn $\mathscr{B}(U)$ abgeschlossen in $\mathscr{A}(U)$ ist für offenes $U \subset X$, und außerdem X lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär ist. Die angegebenen Bedingungen sind unabhängig* (s. § **5**).

(d) *Nicht alle komplexen Unterstrukturen auf einem komplexen Quotienten $(X/R, \mathscr{A}/R)$ werden durch analytische Äquivalenzrelationen auf $(X, \mathscr{A})$ induziert.*

Die Begriffe werden in § **0** definiert.

§ 0. Vorbemerkungen

Ein *geringter Raum* $(X, \mathscr{A})$ besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathscr{A}$ von Ringen (oder Algebren) auf X. Ist M eine beliebige Teilmenge von X, so sei $\mathscr{A}_M$ der induktive Limes der Schnitte $\mathscr{A}(U) = \Gamma(U, \mathscr{A})$ über alle offenen Umgebungen U von M in X. Ist M offen, so gilt $\mathscr{A}_M = \mathscr{A}(M)$. $\mathscr{A}_x := \mathscr{A}_{\{x\}}$ heißt *Halm*. von $\mathscr{A}$ im Punkte $x \in X$. Die Elemente des Halmes werden *Keime* genannt.

Ein *lokal-geringter Raum* sei ein Paar $(X, \mathscr{A})$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathscr{A}$ auf X von lokalen **C**-Algebren $\mathscr{A}_x$, $x \in X$, das sind kommutative noethersche Algebren mit Eins über dem Körper der komplexen Zahlen, die genau ein maximales Ideal $\mathfrak{a}_x$ besitzen; die Verkettung $\mathbf{C} \to \mathscr{A}_x \to \mathscr{A}_x/\mathfrak{a}_x$ soll außerdem ein Isomorphismus sein. Jeder Halm $\mathscr{A}_x$ stimmt mit der direkten Summe $\mathfrak{a}_x \oplus \mathbf{C}$ überein. Einem Keim $\alpha \in \mathscr{A}_x$ wird als *Funktionswert*, $\alpha(x)$, sein Bild bei der Projektion $\mathscr{A}_x \to \mathbf{C}$ zugeordnet. Ein Schnitt $f \in \Gamma(U, \mathscr{A})$, U offene Teilmenge von X, definiert eine komplexwertige Funktion $U \to \mathbf{C}$, die wieder mit f bezeichnet werden soll: $f(x) \in \mathbf{C}$ sei der Wert des Keimes $f_x \in \mathscr{A}_x$, $x \in U$.

$\mathscr{A}_M$ für $M \subset X$ ist zwar stets eine $\mathbf{C}$-Algebra, aber i.a. nicht lokal, vgl. jedoch Hilfssatz 1, § **1**.

Die Quotientengarbe $\mathscr{A}_{\mathrm{red}} := \mathscr{A}/\mathscr{N}$ einer lokal-geringten Struktur $\mathscr{A}$ modulo der Idealgarbe $\mathscr{N}$ der nilpotenten Elemente definiert wieder einen lokal-geringten Raum $(X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}})$, die *Reduktion* von $(X, \mathscr{A})$.

Morphismen $(X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ zwischen lokal-geringten Räumen sind Paare (ϕ, ϕ^*) stetiger Abbildungen

$$\phi: X \to Y \quad \text{und} \quad \phi^*: \phi^{-1}(\mathscr{B}) \to \mathscr{A};$$

dabei ist ϕ^* eine Familie *lokaler* Algebra-Homomorphismen

$$\phi_x^*: \mathscr{B}_{\phi(x)} \to \mathscr{A}_x (x \in X),$$

d.h. ϕ_x^* bildet $1_{\phi(x)} \in \mathscr{B}_{\phi(x)}$ auf $1_x \in \mathscr{A}_x$ und deshalb auch das maximale Ideal $\mathfrak{b}_{\phi(x)}$ von $\mathscr{B}_{\phi(x)}$ in das maximale Ideal $\mathfrak{a}_x$ von $\mathscr{A}_x$ ab. Jedes ϕ_x^* definiert somit einen Vektorraum-Homomorphismus

$$\delta \phi_x: \mathfrak{b}_{\phi(x)}/\mathfrak{b}_{\phi(x)}^2 \to \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2$$

der (ersten) *Cotangentialräume* $T_{\phi(x)}(Y, \mathscr{B})$ und $T_x(X, \mathscr{A})$. Der Morphismus (ϕ, ϕ^*) induziert außerdem Algebra-Homomorphismen der Schnitte

$${}^t\phi_U: \Gamma(U, \mathscr{B}) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathscr{A})$$

für offenes $U \subset Y$, definiert durch Festlegen der Keime

$$[{}^t\phi_U(f)]_x := \phi_x^*(f_{\phi(x)}),$$

falls $f \in \Gamma(U, \mathscr{B})$ und $x \in \phi^{-1}(U)$. Der zum kanonischen Morphismus

$$(\mathrm{id}_X, \mathrm{red}): (X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}}) \to (X, \mathscr{A})$$

gehörende *Reduktions-Homomorphismus* sei

$${}^t\varrho_U: \Gamma(U, \mathscr{A}) \to \Gamma(U, \mathscr{A}_{\mathrm{red}}).$$

$f \in \Gamma(U, \mathscr{A})$ und ${}^t\varrho_U(f) \in \Gamma(U, \mathscr{A}_{\mathrm{red}})$ haben gleiche Funktionswerte.

Wir können für lokal-geringte Räume Eigenschaften wie in [27] definieren: Es sei F eine Menge globaler Schnitte auf $(X, \mathscr{A})$, $F \subset A := \Gamma(X, \mathscr{A})$. $(X, \mathscr{A})$ heißt dann

a) *F-ausbreitbar*, bzw.

b) (*schwach-*)*F-konvex*, bzw.

c) *F-separabel* oder

d) *F-vollständig*,

wenn die Abbildung $\phi: X \to \mathbf{C}^F$, $x \mapsto (f(x))_{f \in F}$, a) diskret, bzw. b) (fast-)eigentlich, bzw. c) injektiv oder d) injektiv und eigentlich ist. Wir sagen: X ist *lokal-F-*..., wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß $\phi \mid U$ die entsprechende Eigenschaft a)–d) hat.

Für Teilmengen K von X sei

$$\hat{K}_F := \bigcap_{f \in F} \{x \in X : |f(x)| \leqslant \sup |f(K)|\} \quad \text{und} \quad \hat{K} := \hat{K}_A .$$

$(X, \mathscr{A})$ ist genau dann (schwach-)F-konvex, wenn für jede kompakte Menge $K \subset X$ auch $\hat{K}_F$ kompakt ist (bzw. kompakte Zusammenhangskomponenten besitzt). Denn es gilt:

$$\hat{K}_F = \phi^{-1}\left(\prod_{f \in F} \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant \sup |f(K)|\}\right).$$

Wir sagen: $(X, \mathscr{A})$ ist *F-regulär*, wenn das Bild von F bei der Abbildung $\gamma_x: A \to \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2$, $f \mapsto (f - f(x))_x \bmod \mathfrak{a}_x^2$, den ganzen Tangentialraum aufspannt, für alle $x \in X$, d.h. es gilt: $T_x(X, \mathscr{A}) := \mathfrak{a}_x/\mathfrak{a}_x^2 = \gamma_x(\mathbf{C}[F])$.

$(X, \mathscr{A})$ heiße *lokal-$\mathscr{A}$-ausbreitbar* (bzw....), wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U existiert, so daß $(U, \mathscr{A} \mid U)$ ein $\Gamma(U, \mathscr{A})$-ausbreitbarer (bzw....) lokal-geringter Raum ist.

Komplexe Räume im Sinne von GRAUERT [9] und GROTHENDIECK [12] sind nach Definition lokal-geringte Räume. Ihre Reduktionen sind sogar komplexe Räume im Serreschen Sinn [23]. Wir setzen für komplexe Räume stets abzählbare Topologie voraus. Dann kann die Algebra $\Gamma(X, \mathscr{A})$ aller globalen Schnitte (=holomorphe Funktionen) auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ in kanonischer Weise zu einer *vollständigen* topologischen Algebra gemacht werden, so daß im reduzierten Fall, $\Gamma(X, \mathscr{A}_{\text{red}}) \subset \Gamma(X, {}_X\mathscr{C})$, da $\mathscr{A}_{\text{red}} \subset {}_X\mathscr{C}$, genau die Topologie der kompakten Konvergenz vorliegt, vgl. [7] und [9]. Morphismen zwischen komplexen Räumen werden *holomorphe Abbildungen* genannt. Jede holomorphe Abbildung $(\phi, \phi^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ induziert einen *stetigen* Algebra-Homomorphismus

$$t_\phi: \Gamma(Y, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{A}).$$

Jeder komplexe Raum $(X, \mathscr{A})$ ist lokal-$\mathscr{A}$-separabel, -regulär, -konvex, -vollständig. Doch sind die globalen Eigenschaften i.a. nicht erfüllt. Statt „A-ausbreitbar" ... wird meist „holomorph-ausbreitbar" ... gesagt. Für „holomorph-vollständig" ist die Bezeichnung *Steinsch* üblich. Nach Theorem A ([5] und [9]) ist jeder Steinsche Raum holomorph-regulär. Ein F-regulärer komplexer Raum $(X, \mathscr{A})$ besitzt *lokale Koordinaten durch globale Funktionen* aus $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$, d.h. zu jedem Punkt $x \in X$ existieren eine Umgebung U und endlich viele Schnitte $f_1, \ldots, f_k \in F$, die eine Einbettung (=injektive, eigentliche und reguläre Abbildung, vgl. [26]) $(U, \mathscr{A} \mid U) \to (\mathbf{C}^k, {}_k\mathcal{O})$ definieren. (Dabei sei ${}_k\mathcal{O}$ die gewöhnliche Garbe der holomorphen Funktionskeime des $\mathbf{C}^k$).

Jeder F-reguläre komplexe Raum ist deshalb F-ausbreitbar, sogar lokal-F-separabel. Für lokal-geringte Räume ist diese Aussage i.a. falsch:

Beispiel 1. Es sei $\mathcal{O} := {}_2\mathcal{O}$ die gewöhnliche Garbe der Holomorphie auf $X := \mathbf{C}^2$ und $p: X \to \mathbf{C}$ die Projektion auf die erste Koordinate $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Für offenes $U \subset X$ sei $\mathscr{B}(U)$ die Algebra aller holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(U)$, die auf jeder Faser $p^{-1}(p(x)) \cap U$, $x \in U$, konstant sind. Der (nach Hilfssatz 1, § **1**) lokal-geringte Raum $(X, \mathscr{B})$ ist $\Gamma(X, \mathscr{B})$-regulär, aber nicht (lokal-) $\Gamma(X, \mathscr{B})$-ausbreitbar, nicht einmal lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar.

Nach Grauert [9] ist ein komplexer Raum $(X, \mathscr{A})$ genau dann Steinsch, wenn $(X, \mathscr{A}_{\text{red}})$ diese Eigenschaft hat. Diese Äquivalenz ist für die allgemeineren Begriffe a), b) und c) nicht richtig, vgl. Schuster [21]. Grauert [8] bewies auch, daß jeder holomorph-ausbreitbare und holomorph-konvexe Raum Steinsch ist, vgl. dazu § **4**, insbesondere Lemma 1.

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $F = \mathbf{C}[F] \subset A := \Gamma(X, \mathscr{A})$, so gilt für $\phi: X \to \mathbf{C}^F$, $x \mapsto (f(x))_{f \in F}$, und alle Mengen $K \subset X$:

$$\hat{K}_F = \phi^{-1}\Big(\prod_{f \in F} f(K)^\wedge\Big),$$

wobei $f(K)^\wedge \subset \mathbf{C}$ bzgl. $\Gamma(\mathbf{C}, {}_1\mathcal{O})$ zu bilden ist.

§ 1. Definition der Quotientenabbildung

Es seien X und Y topologische Räume. Eine surjektive und stetige Abbildung $p: X \to Y$ heißt (topologische) *Quotientenabbildung*, wenn eine Teilmenge U von Y genau dann offen ist, wenn sie ein offenes Urbild $p^{-1}(U) \subset X$ besitzt. Ist R die zu p gehörende Äquivalenzrelation auf X, so schreiben wir auch X/R statt Y. $p: X \to X/R$ heißt auch Projektion.

Ist $\mathscr{A}$ eine Garbe auf X, so definieren wir die Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ auf X/R durch $(p_0\mathscr{A})(U) := \mathscr{A}(p^{-1}(U))$ für offenes $U \subset X/R$. $(X/R, p_0\mathscr{A})$ ist ein geringter Raum, aber i.a. nicht lokal-geringt, auch wenn $(X, \mathscr{A})$ ein lokal-geringter Raum ist. Jeder Halm $(p_0\mathscr{A})_y$, $y \in Y$, ist in $\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}$ enthalten. $(p_0\mathscr{A})_y$ und $\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}$ stimmen überein, falls die Faser $p^{-1}(y)$ ein p-saturiertes Fundamentalsystem von Umgebungen besitzt. Das ist z.B. erfüllt, wenn p eigentlich ist. In jedem Fall induzieren die Homomorphismen

$$p_x^*: (p_0\mathscr{A})_{p(x)} \to \mathscr{A}_x \quad (x \in X)$$

einen Morphismus geringter Räume

$$(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (X/R, p_0\mathscr{A}).$$

Ist $(X, \mathscr{A})$ lokal-geringt, so definieren wir auf X/R die sogenannte *Quotientenstruktur* $\mathscr{A}/R$ als Untergarbe von $p_0\mathscr{A}$, bestehend aus denjenigen Elementen, die auf den Fasern von R konstante Funktionswerte haben:

$$\mathscr{A}/R(U) := \{f \in \mathscr{A}(p^{-1}(U)) \mid f\colon p^{-1}(y) \to \mathbf{C} \text{ ist konstant}, \quad y \in U\}.$$

Selbstverständlich können wir p_x^* auf $(\mathscr{A}/R)_{p(x)}$ beschränken, und $(p, p^*)\colon(X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{A}/R)$ ist ein Morphismus lokal-geringter Räume, denn es gilt:

HILFSSATZ 1. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein lokal-geringter Raum, $M \subset X$ beliebig. Dann ist*

$$B := \{f \in \mathscr{A}_M \mid f\colon M \to \mathbf{C},\ x \mapsto f_x(x) \textit{ ist konstant}\}$$

eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{b} := \{f \in B \mid f_x(x) = 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in M\}.$$

B ist die größte lokale Unteralgebra von $\mathscr{A}_M$. –

Beweis. B ist eine Algebra über $\mathbf{C}$, und $\mathfrak{b}$ ist ein Ideal in B. Für jedes $x \in M$ ist $\tau_x\colon B \to \mathscr{A}_x, f \mapsto f_x$, ein Algebra-Homomorphismus. Ist $\mathfrak{a}_x$ das maximale Ideal in $\mathscr{A}_x$, so gilt:

$$\begin{aligned}\tau_x^{-1}(\mathfrak{a}_x) &= \{f \in B\colon f_x \in \mathfrak{a}_x\} = \{f \in B\colon f_x \in \operatorname{Kern}(\mathscr{A}_x \to \mathscr{A}_x/\mathfrak{a}_x = \mathbf{C})\}\\ &= \{f \in B\colon f_x(x) = f(x) = 0\}\\ &= \{f \in B\colon f(x') = 0 \quad \text{für alle} \quad x' \in M\} = \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Da $\mathbf{C} \subset B$ und $\mathbf{C} \subset \mathscr{A}_x$ sowie $\tau_x(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbf{C}$ gilt, ist $B \to \mathbf{C}, f \mapsto f_x \bmod \mathfrak{a}_x$, ein surjektiver Homomorphismus mit Kern $= \mathfrak{b}$, d.h. $B/\mathfrak{b} = \mathbf{C}$, $\mathfrak{b}$ ist maximales Ideal in B. Ist B_0 eine beliebige lokale Unteralgebra von $\mathscr{A}_M$, dann bildet $B_0 \to \mathscr{A}_x, f \mapsto f_x$, für jedes $x \in M$ das maximale Ideal $\mathfrak{b}_0$ von B_0 in $\mathfrak{a}_x$ ab, d.h. $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}$ und $B_0 = \mathfrak{b}_0 \oplus \mathbf{C} \subset \mathfrak{b} \oplus \mathbf{C} = B$; q.e.d. –

Die Situation $(p, p^*)\colon(X, \mathscr{A}) \to (X/R, p_0\mathscr{A})$ wollen wir verallgemeinern und definieren: Ein Morphismus

$$(p, p^*)\colon (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$$

(lokal-)geringter (bzw. komplexer) Räume $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ heißt (lokal-)geringte (bzw. holomorphe) *Quotientenabbildung*, wenn $p\colon X \to Y$ eine topologische Quotientenabbildung ist mit $\mathscr{B} \subset p_0\mathscr{A}$. Im lokal-geringten und deshalb auch im komplexen Fall gilt wegen Hilfssatz 1 für die von p definierte Äquivalenzrelation R auf $X\colon \mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$. $\mathscr{A}/R$ ist eine maximale lokal-geringte Struktur auf X/R. Setzt man wie LIEB [16] voraus, daß die Strukturgarbe eines lokal-geringten Raumes eine Garbe stetiger Funktionskeime ist, das ist z.B. für reduzierte komplexe Räume richtig, so ist die Quotientengarbe die größte geringte Struktur auf dem topologischen Quotienten, für die die Projektion ein Morphismus lokal-geringter Räume ist.

Auf Quotienten X/R wollen wir also nicht nur die Garbe $\mathscr{A}/R$ betrachten, sondern beliebige Garben von lokalen Unteralgebren $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$ zulassen. Ist $(X/R, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum, so ist X/R lokal-$\mathscr{B}$-vollständig, insbesondere lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär; für offene Mengen $U \subset X/R$ ist $\mathscr{B}(U)$ abgeschlossen in $\mathscr{A}(p^{-1}(U)) = (p_0\mathscr{A})(U)$.

Definition. Ist $(X, \mathscr{A})$ ein geringter Raum, so heißt eine Untergarbe $\mathscr{B}$ von $\mathscr{A}$ *abgeschlossen*, wenn alle Schnittmengen $\mathscr{B}(U)$ für offenes $U \subset X$ abgeschlossen in $\mathscr{A}(U)$ sind. –

$\mathscr{A}/R$ ist eine abgeschlossene Untergarbe von $p_0\mathscr{A}$. Abgeschlossene Garben von lokalen Unteralgebren $\mathscr{B} \subset p_0\mathscr{A}$, für die X/R lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär ist, wollen wir *R-Garben* nennen. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß jede in der Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ enthaltene komplexe Struktur auf X/R eine R-Garbe ist. Es soll untersucht werden, inwiefern diese Aussage über *komplexe Unterstrukturen* umkehrbar ist, vgl. § 5.

Definition. Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, so heißt eine Garbe $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ von Unteralgebren eine *komplexe Unterstruktur* auf X, wenn auch $(X, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum ist. $\mathscr{A}$ ist eine *Verfeinerung* von $\mathscr{B}$ in der Terminologie von Grauert-Remmert.

Ist $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{A}/R)$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so stimmt $\mathscr{A}/R$ mit der Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ genau dann überein, wenn R *einfach* ist. Denn ist $\mathscr{A}/R = p_0\mathscr{A}$, so folgt nach einem Lemma von Cartan-Stein, vgl. etwa [27], daß für jeden Steinschen Teil $U \subset X/R$ die Funktionen aus $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ die Zusammenhangskomponenten der Fasern von p trennen. Wegen $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A}) = \Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ sind aber die Funktionswerte der Schnitte auf $p^{-1}(y)$, $y \in U$, konstant. Ist andererseits p eine einfache Abbildung, so ist jede Faser $p^{-1}(y)$, $y \in X/R$, eine kompakte und zusammenhängende analytische Menge; deshalb hat jeder Schnitt einer Umgebung $p^{-1}(U)$ von $p^{-1}(y)$ mit Werten in $\mathscr{A}$ konstante Funktionswerte auf den Fasern von p, d.h. $p_0\mathscr{A} \subset \mathscr{A}/R$.

Für $\mathscr{A}/R = p_0\mathscr{A}$ ist der von (p, p^*) induzierte Algebra-Monomorphismus ${}^t p: \Gamma(X/R, \mathscr{A}/R) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ sogar surjektiv. Die Umkehrung ist falsch, wie einfache Gegenbeispiele zeigen.

Cartan beweist mit dem Main Theorem [6], daß eine eigentliche Äquivalenzrelation R auf einem *reduzierten* komplexen Raum $(X, \mathscr{O})$ genau dann einen komplexen Quotienten $(X/R, \mathscr{O}/R)$ definiert, wenn X/R lokal-$\mathscr{O}/R$-separabel ist. Wir werden diese Aussage für nicht notwendig reduzierte Räume beweisen und zeigen, daß es genügt, lokal-$\mathscr{O}/R$-ausbreitbar vorauszusetzen, vgl. § 5. Doch zunächst folgen weitere Vorbereitungen.

§ 2. Durch holomorphe Funktionen und Abbildungen definierte Äquivalenzrelationen

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, so definiert jede Teilmenge F von $A := \Gamma(X, \mathscr{A})$ eine Äquivalenzrelation, die mit F bezeichnet werden soll: F identifiziert Punkte aus

X, wenn sie durch keine Funktion aus F getrennt werden. Die Menge F definiert dieselbe Äquivalenzrelation auf X wie die von ihr erzeugte Unteralgebra $\mathbf{C}[F]$ in A, aber auch wie ihre abgeschlossene Hülle $\bar{F}$ in A bzgl. der durch den komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ induzierten Topologie. (Zum Beweis genügt es, die Reduktion $(X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}})$ und die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\Gamma(X, \mathscr{A}_{\mathrm{red}}) \subset \Gamma(X, {}_X\mathscr{C})$ zu betrachten).

Nach § **1** definiert jede Äquivalenzrelation R auf X eine Unteralgebra $B = \Gamma(X/R, \mathscr{A}/R)$ von A. Die von B induzierte Äquivalenzrelation auf X ist i.a. von R verschieden, wie an einfachen Beispielen zu sehen ist.

Wie in [11], [16] und [27] geben wir für beliebiges $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ eine geringte Struktur $\mathscr{S}_F$ auf $Y := X/F$ an. $p: X \to Y$ bezeichne die Projektion, der zugehörige Algebra-Isomorphismus sei ${}^t p: \Gamma(Y, p_0 \mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$.

Für offenes U in Y sei $\mathscr{S}_F(U)$ die Algebra aller Schnitte aus $\mathscr{A}(p^{-1}(U))$, die in einer Umgebung jeder Faser $p^{-1}(y)$, $y \in U$, in eine konvergente Potenzreihe

$$\sum a_{i_1 \ldots i_k} (f_1 - f_1(y))^{i_1} \ldots (f_k - f_k(y))^{i_k}$$

mit $f_1, \ldots, f_k \in F$ entwickelt werden können. $\mathscr{S}_F$ heißt *Spektralstruktur* bzgl. $(X, \mathscr{A})$ und F. Es gilt $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/F \subset p_0 \mathscr{A}$. $(Y, \mathscr{S}_F)$ ist ein ${}^t p^{-1}(F)$-separabler und ${}^t p^{-1}(F)$-regulärer lokal-geringter Raum, insbesondere ist Y lokal-$\mathscr{S}_F$-separabel und lokal-$\mathscr{S}_F$-regulär (deshalb lokal-$\mathscr{A}/F$-separabel): $\mathscr{S}_F$ ist eine F-Garbe auf $Y = X/F$. Ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ ein komplexer Raum, so enthält $\Gamma(Y, \mathscr{S}_F)$ das ${}^t p$-Urbild ${}^t p^{-1}(\overline{\mathbf{C}[F]})$ der abgeschlossenen Hülle der von F in A erzeugten Unteralgebra. In [27, Quotientensatz] wurde bereits gezeigt:

Besitzt eine Faser $p^{-1}(y)$, $y \in Y$, eine saturierte F-konvexe Umgebung, so ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ in einer Umgebung von y ein komplexer Raum.

Man sieht, daß diese Voraussetzung für alle Punkte aus Y erfüllt ist, wenn F eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X definiert (z.B. wenn X ein F-konvexer oder F-separabler Raum ist, vgl. § **4**). Wir formulieren das Ergebnis als

Satz 1. *Es sei $\mathscr{S}_F$ die Spektralstruktur bzgl. eines komplexen Raumes $(X, \mathscr{A})$ und einer Teilmenge F von $\Gamma(X, \mathscr{A})$, $p: X \to Y := X/F$ die Projektion auf den Quotienten und ${}^t p: \Gamma(Y, p_0 \mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ der zugehörige Algebra-Isomorphismus. Definiert F eine eigentliche Äquivalenzrelation, so ist $(Y, \mathscr{S}_F)$ ein ${}^t p^{-1}(F)$-separabler und ${}^t p^{-1}(F)$-regulärer komplexer Raum mit $\Gamma(Y, \mathscr{S}_F) \supset {}^t p^{-1}(\overline{\mathbf{C}[F]})$. Die Abbildung $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{S}_F)$ ist eine eigentliche holomorphe Quotientenabbildung. Jede Funktion $f \in F$ kann über $(Y, \mathscr{S}_F)$ faktorisiert werden:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{C} \\ Y = X/F . - \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Als Verallgemeinerung wollen wir *Zerlegungen* von Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen betrachten, die durch globale Funktionen definiert werden. Sind R und S Äquivalenzrelationen auf einem topologischen Raum X, so heißt S eine *Zerlegung* von R, wenn jede Faser von S die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten einer Faser von R ist. Eine spezielle Zerlegung ist die zu R gehörende einfache Äquivalenzrelation.

Ist $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ vorgegeben und $\tilde{F}$ eine Zerlegung der Äquivalenzrelation F, so kann auch auf dem Quotienten $X/\tilde{F}$ eine Spektralstruktur $\mathscr{S}_{\tilde{F}}$ definiert werden. Aber $(X/F, \mathscr{S}_{\tilde{F}})$ wird i.a. kein komplexer Raum, selbst wenn $\tilde{F}$ eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X ist.

BEISPIEL 2. Es sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die Gaußsche Ebene mit der gewöhnlichen komplexen Struktur, z die Koordinatenfunktion und $F := \mathbf{C}[z^2] \subset \Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{O})$. Die zu F gehörende einfache Relation F' ist trivial also eigentlich. Trotzdem ist $\mathscr{S}_{F'}$ keine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$, denn nach Definition gilt:

$$\mathscr{S}_{F',x} = \begin{Bmatrix} \mathscr{O}_x & \text{für alle } x \neq 0 \\ \mathbf{C}[\langle z^2 \rangle] & \text{für } x = 0 \end{Bmatrix},$$

d.h. keine Umgebung U von 0 ist $\Gamma(U, \mathscr{S}_{F'})$-separabel. – Wir beweisen allerdings in § **4** und § **6**, daß $(X/\tilde{F}, \mathscr{A}/\tilde{F})$ ein komplexer Raum ist für eigentliches $\tilde{F}$.

Eine endliche Menge $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ definiert eine holomorphe Abbildung $\phi : (X, \mathscr{A}) \to (\mathbf{C}^n, {}_n\mathscr{O})$. Die Spektralgarbe $\mathscr{S}_F$ auf X/F besteht dann aus *zurückgenommenen* Taylorreihen. Wird X/F mit $\phi(X)$ identifiziert (das ist möglich, wenn ϕ semi-eigentlich ist, vgl. Hilfssatz 2*.), so gilt:

$$(+) \qquad \mathscr{S}_F = ({}_n\mathscr{O}/\mathrm{Ann}_{{}_n\mathscr{O}} \phi_0 \mathscr{A}) \mid \phi(X).$$

Eine stetige Abbildung $\phi : X \to Y$ topologischer Räume heißt nach KUHLMANN [15] ***semi-eigentlich***, wenn zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung $U_y \subset Y$ und eine kompakte Menge $K_y \subset X$ existieren, so daß für alle $y' \in \phi(X) \cap U_y$ gilt: $\phi^{-1}(y') \cap K_y \neq \emptyset$. Sind X und Y lokal-kompakte Räume, so ist $\phi : X \to Y$ genau dann semi-eigentlich, wenn zu jeder kompakten Menge $L \subset Y$ eine kompakte Menge $K \subset X$ existiert mit $L \cap \phi(X) \subset \phi(K)$. Eine Äquivalenzrelation R auf X heißt semi-eigentlich, wenn die Projektion $p : X \to X/R$ eine semi-eigentliche Abbildung ist.

Nicht alle holomorphen Abbildungen sind semi-eigentlich, z.B. $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, y)$. Jede eigentliche Abbildung ist semi-eigentlich.

Die Situation (+) wollen wir nun verallgemeinern:

Es sei $(h, h^*) : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ eine holomorphe Abbildung, R die auf X durch h definierte Äquivalenzrelation. Der Quotient X/R und das Bild $h(X)$ stimmen i.a. nur mengentheoretisch überein. Führen wir auf X/R die feinste Topologie T' ein, so daß $p : X \to X/R$ stetig wird, so ist $T' \subset \mathfrak{P}(X/R) = \mathfrak{P}(h(X))$ eine Obermenge der von Y auf

$h(X)$ induzierten Topologie T: Die Quotiententopologie T' ist feiner als die Relativtopologie T. Es gilt $T=T'$ genau dann, wenn jede abgeschlossene und bzgl. p saturierte Menge in X ein abgeschlossenes h-Bild in Y besitzt. Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn h eine semi-eigentliche Abbildung ist.

Wir wählen nun eine offene Steinsche Überdeckung $\mathfrak{A} := (U_i)_{i\in I}$ von Y, so daß jedes $(U_i, \mathscr{B} \mid U_i)$ in einen $\mathbf{C}^{n_i}$ eingebettet werden kann. Diese Realisierung wird durch Funktionen $f_{i1}, \ldots, f_{in_i} \in \mathscr{A}(V_i)$, $V_i := h^{-1}(U_i)$, beschrieben:

$$(f_{i1}, \ldots, f_{in_i}) =: f_i : (V_i, \mathscr{A} \mid V_i) \to (\mathbf{C}^{n_i}, {}_{n_i}\mathcal{O}),$$

$\mathscr{B} \mid U_i = {}_{n_i}\mathcal{O}/{}_i\mathscr{I} \mid U_i$, so daß ${}_i\mathscr{I} \subset \operatorname{Kern} f_i^*$ und $f_i(V_i) = h(X) \cap U_i$.

Mittels der $F_i := \{f_{i1}, \ldots, f_{in_i}\} \subset \Gamma(V_i, \mathscr{A})$ definieren wir auf X/R die geringte *Spektralstruktur* $\mathscr{S}_{h, \mathfrak{A}}$:

$$\mathscr{S}_{h, \mathfrak{A}} \mid U_i \cap h(X) := \mathscr{S}_{F_i}.$$

$\mathscr{S}_{F_i}$ ist definiert auf V_i/F_i, das mengentheoretisch mit $U_i \cap h(X)$ übereinstimmt. Es gilt: $\mathscr{S}_{F_i, y} = \mathscr{S}_{F_j, y}$, falls $y \in U_i \cap U_j \cap h(X)$. Denn aus der Konstruktion folgt:

$$\mathscr{S}_{F_i, y} = \operatorname{Bild} f^*_{i, f_i(x)} = \operatorname{Bild} h^*_y = \operatorname{Bild} f^*_{j, f_j(x)} = \mathscr{S}_{F_j, y}$$

Das gilt für alle $x \in h^{-1}(y)$.

Nach dem Homomorphiesatz ist Bild $h_y^* = \mathscr{B}_y/\operatorname{Kern} h_y^*$; andererseits ist $\operatorname{Kern} h_y^* = (\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}} h_0 \mathscr{A})_y$. Ist also h eigentlich und somit $\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}} h_0 \mathscr{A} =: \mathscr{K}$ eine kohärente Idealgarbe in $\mathscr{B}$ ([9], [22]) mit Nullstellenmenge $h(X)$, so ist $(h(X), \mathscr{B}/\mathscr{K} \mid h(X)) = (X/R, \mathscr{S}_h)$ ein komplexer Raum, vgl. CARTAN [6, Theorem 2]).

Auf gleiche Weise folgt, daß $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{A}}$ unabhängig von der Wahl der Überdeckung $\mathfrak{A}$ ist. Wir dürfen also $\mathscr{S}_h$ für die Spektralgarbe schreiben. Ist $h = (h_1, \ldots, h_n): X \to \mathbf{C}^n$, so stimmt diese Definition mit der früheren überein: $\mathscr{S}_h = \mathscr{S}_{\{h_1, \ldots, h_n\}}$.

Nun betrachten wir eine Familie $h = (h_k)_{k\in K}$ holomorpher Abbildungen $h_k: (X, \mathscr{A}) \to (Y_k, \mathscr{B}_k)$. R sei die von h auf X definierte Äquivalenzrelation, $p: X \to Y := X/R$ die Projektion. Mengentheoretisch gilt wieder:

$$h(X) = X/R \subset \prod_{k\in K} Y_k.$$

$\mathfrak{A}_k := (U_{ki})_{i\in I}$ sei eine offene Steinsche Überdeckung von Y_k, $k \in K$. $V_{ki} := h_k^{-1}(U_{ki}) \subset X$ mit $\bigcup_{i\in I} V_{ki} = X$ und $f_{ki1}, \ldots, f_{kin_{ki}} \in \mathscr{A}(V_{ki})$ seien wie vorher gewählt. $\mathfrak{A} := (\mathfrak{A}_k)_{k\in K}$. Für offenes $U \subset Y$ sei $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{A}}(U)$ die Algebra aller $\alpha \in \mathscr{A}(p^{-1}(U))$, so daß für alle $y \in U$ der Keim $\alpha_{p^{-1}(y)}$ in einer Umgebung der Faser $p^{-1}(y)$ in eine konvergente Potenzreihe $\sum a_{v_1 \ldots v_n} f_1^{v_1} \ldots f_n^{v_n}$ entwickelt werden kann, wobei $f_1, \ldots, f_n \in \bigcup_{k\in K} \{f_{kil} : y \in V_{ki}$ und $l = 1, \ldots, n_{ki}\}$.

Dann gilt wieder $\mathscr{S}_{h,\mathfrak{A}} = \mathscr{S}_{h,\mathfrak{A}'}$ für beliebige Überdeckungsfamilien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so daß wir wieder nur $\mathscr{S}_h$ für die von h erzeugte *Spektralstruktur* auf X/R schreiben dürfen. Ist h eine Abbildungsfamilie mit den Bildräumen $Y_k = \mathbf{C}$, $k \in K$, so stimmt $\mathscr{S}_h$ mit der früher definierten Garbe $\mathscr{S}_F$ überein, falls F die h entsprechende Teilmenge von $\Gamma(X, \mathscr{A})$ ist.

HILSSATZ 2. *Sind fast alle Y_k holomorph-vollständig, so ist Y lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel und lokal-$\mathscr{S}_h$-regulär.* –

Beweis. Zu jedem Punkt $y_0 \in Y = X/R \subset \Pi Y_k$ existiert nach Voraussetzung eine Umgebung mit $\mathrm{pr}_k(U) \subset U_{k\,i_k}$ für ein $U_{k\,i_k} \in \mathfrak{U}_k$. Die Menge der zugehörigen Schnitte sei

$$F := \bigcup_{k \in K} \{f_{k\,i_k 1} \mid V : 1 = 1, \ldots, n_{k\,i_k}\},$$

für $V := p^{-1}(U)$. Dann gilt $\mathscr{S}_h \mid U = \mathscr{S}_F$, q.e.d. –

HILFSSATZ 2*. *Ist die von h auf X erzeugte Relation R semi-eigentlich, so ist $Y = X/R$ lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel.* –

Beweis. $h: X \to \Pi Y_k$ ist nach Voraussetzung semi-eigentlich. Also gibt es zu jedem Punkt $y \in h(X) = Y$ eine offene Umgebung $U_y \subset Y$ und eine kompakte Menge $K_y \subset \subset X$ mit $h^{-1}(y') \cap K_y \neq \emptyset$ für alle $y' \in U_y$. Die Quotiententopologie auf Y stimmt hier mit der Relativtopologie überein.

Nach CARTAN [6, Lemma] kann die Relation R auf K_y schon durch endlich viele Abbildungen aus h beschrieben werden, d.h. es existiert eine holomorphe Abbildung

$$f = (h_{k_1}, \ldots, h_{k_r}) : X \to Z := Y_{k_1} \times \cdots \times Y_{k_r},$$

so daß $f^{-1}(f(x)) = h^{-1}(h(x))$ für alle $x \in h^{-1}(U_y)$ gilt. Die Elemente von $\mathscr{S}_f(h^{-1}(U_y))$ trennen die Fasern $h^{-1}(y')$, $y' \in U_y$. Andererseits ist $\mathscr{S}_{f,y'}$ in $\mathscr{S}_{h,y'}$ enthalten für alle $y' \in U_y$, d.h. Y ist lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel, q.e.d. –

Die Spektralgarben $\mathscr{S}_{\tilde{h}}$ von Zerlegungen der Relation einer Familie h werden analog definiert. Es gelten auch mit Satz 1 verwandte Aussagen, die wir nach einigen Vorbereitungen zeigen werden, vgl. § **5**.

§ 3. Holomorph-separable und holomorph-konvexe Räume

Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein F-separabler komplexer Raum mit $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$. Dann ist $X/F = X$, und F ist eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X, d.h. $(X, \mathscr{S}_F)$ ist nach Satz 1 ein F-regulärer und F-separabler komplexer Raum mit $\Gamma(X, \mathscr{S}_F) = \overline{\mathbf{C}[F]} \subset \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$. Für $F = \Gamma(X, \mathscr{A})$ erhalten wir eine Aussage, die LIEB [16, Satz 3] für reduziertes X bewies:

SATZ 2. *Auf jedem holomorph-separablen komplexen Raum existiert eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra.* –

Für $A = \Gamma(X, \mathscr{A})$ ist $\mathscr{S} := \mathscr{S}_A$ echt in $\mathscr{A}$ enthalten, wenn $(X, \mathscr{A})$ nicht holomorph-regulär ist, d.h. es existiert ein Punkt $x \in X$ mit $n := \operatorname{emdim}_x(X, \mathscr{S}) < \operatorname{emdim}_x(X, \mathscr{A}) = : m$. Wir realisieren eine Umgebung U von x jeweils minimal:

$$\begin{array}{ll} (U, \mathscr{S}) \subset Z \subset \mathbf{C}^n & (U, \mathscr{A}) \subset W \subset \mathbf{C}^m \\ \mathscr{S} = {}_Z\mathcal{O}/\mathscr{F} \mid U & \mathscr{A} = {}_W\mathcal{O}/\mathscr{G} \mid U \end{array}$$
$$U \cong \{z \in Z : \mathscr{F}_z \neq {}_Z\mathcal{O}_z\} \cong \{w \in W : \mathscr{G}_w \neq {}_W\mathcal{O}_w\}.$$

Aus der $\Gamma(X, \mathscr{S})$-Regularität folgt gerade, daß Schnitte $f_1, \ldots, f_n \in A = \Gamma(X, \mathscr{A}) = \Gamma(X, \mathscr{S})$ existieren mit

$$\mathscr{F} = \operatorname{Ann}_{Z\mathcal{O}}(f_1, \ldots, f_n)_0 (\mathscr{S} \mid U) \subset {}_Z\mathcal{O}.$$

Für $\mathscr{G}$ kann man allerdings solche Schnitte nicht finden. Lieb [16] hat für den reduzierten Fall eine Folgerung zu Satz 2 angegeben:

Corollar 1. *Ist $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ für einen konplexem Raum $(X, \mathscr{A})$ gegeben, so daß $\mathscr{A}/F$ eine komplexe Struktur auf X/F ist, so ist auch $(X/F, \mathscr{S}_F)$ ein komplexer Raum.* –

Beweis. Es sei $p: X \to X/F$ die Projektion und ${}^t p: \Gamma(X/F, p_0\mathscr{A}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ der zugehörige Algebra-Isomorphismus. Dann ist $F^* := {}^t p^{-1}(F)$ in $\Gamma(X/F, \mathscr{A}/F)$ enthalten und trennt die Punkte von X/F. Wegen Satz 2 ist nun $(X/F, \mathscr{S}_{F^*})$ ein komplexer Raum, $\mathscr{S}_{F^*}$ und $\mathscr{S}_F$ stimmen aber nach Definition überein, q.e.d. –

Beispiel 3. Wir betrachten $(\mathbf{C}, \mathcal{O})$, $\mathcal{O} := {}_1\mathcal{O}$, z sei die Koordinatenfunktion. Die aus den Polynomen z^2, z^3 aus $\Gamma(\mathbf{C}, \mathcal{O})$ bestehende Menge F trennt die Punkte von $\mathbf{C}$, und $(\mathbf{C}, \mathscr{S}_F)$ ist deshalb ein komplexer Raum. Es gilt:

$$\mathscr{S}_{F,x} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu T^\nu \in \mathcal{O}_0 \quad \text{mit} \quad a_1 = 0\} & \text{falls } x = 0 \\ \mathcal{O}_x & \text{falls } x \neq 0 \end{array} \right\},$$

d.h. $(\mathbf{C}, \mathscr{S}_F)$ ist die *Neilsche Parabel.* –

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein F-konvexer komplexer Raum, so ist $(X/F, \mathscr{S}_F)$ ein ${}^t p^{-1}(F)$-konvexer und ${}^t p^{-1}(F)$-separabler komplexer Raum, insbesondere Steinsch. Der Spezialfall $F = A$ liefert die Existenz des Remmertschen Quotienten [20] auch im nichtreduzierten Fall: Aus $A = {}^t p\Gamma(Y, \mathscr{S}_A) = {}^t p\Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$ folgt $\Gamma(Y, \mathscr{S}_A) = \Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$. Die holomorphe Abbildung

$$(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{S}_A),$$

$Y := X/A$, ist eigentlich, also ist $p_0\mathscr{A}$ nach Grauert [9] eine kohärente $\mathscr{S}_A$-Modul-Garbe auf Y. Weil $(Y, \mathscr{S}_A)$ Steinsch ist, gibt es nach Theorem A ([5], [9]) endlich viele Schnitte $h_1, \ldots, h_m \in \Gamma(Y, p_0\mathscr{A})$, die jeden Halm $(p_0\mathscr{A})_y$ über $\mathscr{S}_{A,y}$ erzeugen, $y \in Y$:

$$(p_0\mathscr{A})_y = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{S}_{A,y} h_{i,y} \subset \mathscr{S}_{A,y}.$$

Da andererseits $\mathscr{S}_A \subset \mathscr{A}/A \subset p_0\mathscr{A}$ gilt, stimmen alle drei Garben überein: p hat zusammenhängende Fasern. Dazu vgl. man auch [27, Lemma von CARTAN-STEIN]. Es gilt also:

SATZ 3. *Zu jedem holomorph-konvexen komplexen Raum* $(X, \mathscr{A})$ *existiert ein Steinscher Raum* $(Y, \mathscr{B})$ *und eine surjektive, einfache und eigentliche holomorphe Abbildung* $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$, *die einen Isomorphismus* ${}^t p: \Gamma(Y, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ *der holomorphen Funktionenalgebren induziert.* (p, p^*) *ist eine Quotientenabbildung: Y ist der Quotient von X nach der durch* $\Gamma(X, \mathscr{A})$ *definierten Äquivalenzrelation, und* $\mathscr{B}$ *stimmt mit der Bildgarbe* $p_0 \mathscr{A}$ *überein. Jede holomorphe Funktion auf X kann über Y faktorisiert werden.* –

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein F-konvexer Raum, $F \subset A = \Gamma(X, \mathscr{A})$, so erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & (X, \mathscr{A}) \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_F"] & \\ (X/A, \mathscr{S}_A) \arrow[rr, "\phi"] & & (X/F, \mathscr{S}_F), \end{tikzcd}$$

wobei ϕ eine diskrete holomorphe Abbildung ist, weil die Fasern von p_A mit den Zusammenhangskomponenten der Fasern von p_F übereinstimmen.

BEISPIEL 4. Es sei $(X, \mathscr{A})$ holomorph-konvex und endlich-dimensional; dann gibt es etwa nach [2], [18], [26, Trennungssatz] und [27, Satz von BISHOP] endlichviele Schnitte $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathscr{A}) =: A$, die eine eigentliche und maximal-(punkte-)trennende holomorphe Abbildung $(X, \mathscr{A}) \to (\mathbf{C}^n, {}_n\mathscr{O})$ definieren. X ist F-konvex ($F := \{f_1, \ldots, f_n\} \subset A$), und es gilt: $X/F = X/A$, $\mathscr{S}_A = \mathscr{A}/A = \mathscr{A}/F$. Allerdings sind $\mathscr{S}_F$ und $\mathscr{S}_A$ i.a. verschieden. –

Nun beweisen wir:

SATZ 1*. *Es sei* $(X, \mathscr{A})$ *ein komplexer Raum,* $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ *und* F' *die einfache Zerlegung der Äquivalenzrelation* F *auf* X*; ist dann* F' *eigentlich, so ist* $(X/F', \mathscr{A}/F')$ *ein komplexer Raum.* –

Bemerkung. Nach CARTAN [6, Beweis zu Theorem 3] ist jede *einfache* Äquivalenzrelation auf einem lokal-kompakten Raum schon eigentlich, wenn sie kompakte Fasern hat. Für nichteinfache Relationen ist diese Aussage falsch. Gegenbeispiel: Die Projektion von

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x y = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 0\}$$

auf die erste Koordinate induziert eine solche Relation auf X.

Beweis von Satz 1*. Es genügt zu zeigen, daß jede Faser $p^{-1}(p(x))$, $x \in X$, der

Projektion $p: X \to X/F'$ eine Umgebung U besitzt, so daß $(U, \mathscr{A} \mid U)$ holomorph-konvex ist, vgl. Satz 3. Wir beweisen sogar mehr:

HILFSSATZ 3. *Ist $\tilde{F}$ eine beliebige eigentliche Zerlegung von F und $q: X \to X/\tilde{F}$ die Projektion, so besitzt jede Faser $p^{-1}(p(x))$ eine holomorph-konvexe Umgebung U mit $U \cap q^{-1}(q(x)) = p^{-1}(p(x))$.* –

Beweis. F' ist eigentlich. Wir wählen eine relativ-kompakte Umgebung V von $p(x)$, so daß $p^{-1}(p(x)) = p^{-1}(V) \cap q^{-1}(q(x))$ ist – das ist möglich, weil $p(q^{-1}(q(x))$ in X/F' diskret ist –, außerdem endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in F$, die die Äquivalenzrelation F' auf $p^{-1}(V)$ beschreiben. Nach einem topologischen Satz, vgl. STEIN [24, Hilfssatz 3] definieren deshalb die f_i eine eigentliche (holomorphe) Abbildung einer Umgebung $U \subset p^{-1}(V)$ von $p^{-1}(x)$ in einen Polyzylinder des $\mathbf{C}^r$. U kann p-saturiert gewählt werden, weil p eigentlich ist, und ist holomorph-konvex, wie verlangt wurde. Hilfssatz 3 ist bewiesen.

Beispiele zu Satz 1* liefern lokal-holomorph-separable oder auch schwach-holomorph-konvexe komplexe Räume, die wir im folgenden Abschnitt betrachten wollen.

§ 4. Lokal-holomorph-separable und schwach-holomorph-konvexe Räume

Ist $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum, $F \subset A = \Gamma(X, \mathscr{A})$ und X etwa a) F-ausbreitbar, b) F-regulär, c) lokal-F-separabel oder d) schwach-F-konvex, so hat die zu F gehörende einfache Äquivalenzrelation F' auf X kompakte Fasern und ist deshalb eigentlich, $(X/F', \mathscr{A}/F')$ ist ein komplexer Raum. In den Fällen a), b) und c) gilt sogar $X/F' = X$ und $\mathscr{A} = \mathscr{A}/F'$. Für b) und c) ist $\mathscr{S}_{F'}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X, \mathscr{A})$. Es gilt $F \subset \Gamma(X, \mathscr{S}_{F'})$, und $(X, \mathscr{S}_{F'})$ ist F-regulär. Wir erhalten die folgende Verschärfung von Satz 2:

SATZ 2*. *Ein komplexer Raum ist genau dann lokal-holomorph-separabel, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert.* –

Beweis. Ist $(X, \mathscr{A})$ lokal-A-separabel für $A := \Gamma(X, A)$, so definiert die einfache Relation A' gerade die Identität auf X. $\mathscr{S}_{A'}$ ist eine holomorph-reguläre Unterstruktur. Die andere Beweisrichtung ist klar.

Der Begriff *schwach-holomorph-konvex* wurde von BISHOP [2] für *partially analytic spaces* eingeführt. In einer Besprechung dieser Arbeit in den Mathematical Reviews 23A, p. 184 (1962) bemerkt GRAUERT, daß die Eigenschaften holomorph-konvex und schwach-holomorph-konvex für (reduzierte) komplexe Räume *nicht-trivial übereinstimmen.* Wir wollen hier die Äquivalenz für beliebige komplexe Räume beweisen:

SATZ 4. *Jeder schwach-holomorph-konvexe Raum ist holomorph-konvex.* –

Zunächts zeigen wir die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von GRAUERT [8]:

LEMMA 1. *Ein schwach-holomorph-konvexer und holomorph-ausbreitbarer komplexer Raum ist holomorph-vollständig.* –

Es genügt, diese Aussage für den reduzierten Fall zu beweisen, weil ein Raum genau dann Steinsch ist, wenn seine Reduktion Steinsch ist, vgl. [9].

X sei also ein schwach-holomorph-konvexer und holomorph-ausbreitbarer (reduzierter) komplexer Raum, $A:=\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$. Etwa nach [25, Satz 1.2] brauchen wir nur zu beweisen, daß zu jeder kompakten Menge $K\subset X$ eine A-konvexe Umgebung U existiert. Denn dann kann X durch holomorph-konvexe und holomorph-ausbreitbare (also nach [8] holomorph-vollständige) offene Teilmengen X_ν ausgeschöpft werden, so daß X_ν jeweils holomorph-konvex bzgl. $X_{\nu+1}$ ist, $\nu=1, 2, \ldots$.

Die Vereinigung L aller Zusammenhangskomponenten von $\hat{K}$, die K treffen, ist kompakt. Das folgt aus

HILFSSATZ 4. *Es sei R ein lokal-kompakter Raum, $M\subset R$ eine abgeschlossene Menge mit kompakten Komponenten M_i $(i\in I)$. Dann ist die Vereinigung L derjenigen M_i, die eine vorgegebene kompakte Menge $K\subset R$ treffen, ebenfalls kompakt.* –

Beweis. $\tilde{R}=R\cup\{\infty\}$ sei die Kompaktifizierung von R. Mit M wäre auch L kompakt. Es sei also M nicht kompakt. Dann stimmt die abgeschlossene Hülle $\tilde{M}$ von M bzgl. $\tilde{R}$ mit $M\cup\{\infty\}$ überein. Sei M_∞ die ∞ enthaltene Komponenten von $\tilde{M}$. Da die M_i kompakt sind, ist $\tilde{M}_i=M_i\subset\tilde{R}$ und $\tilde{M}\backslash M_i$ sowohl offen als auch abgeschlossen in M, d.h. nach [4, Chap. I, § 11, n° 5]:

$$\{\infty\}\subset M_\infty\subset\bigcap_{i\in I}(\tilde{M}\backslash M_i)=\tilde{M}\backslash\bigcup_{i\in I}M_i=\tilde{M}\backslash M=\{\infty\}.$$

Somit ist $\{\infty\}$ gleich dem Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen $N\subset\tilde{M}$ mit $\infty\in N$, wobei o.B.d.A. $N\subset\tilde{R}\backslash K$ vorausgesetzt werden darf. Also besitzt ∞ in $\tilde{R}$ eine offene Umgebung U mit $\partial U\cap M=\emptyset$ und $U\cap K=\emptyset$, etwa $U:=N\cup\cup[\tilde{R}\backslash(\tilde{M}\cup K)]$. $\tilde{R}\backslash U=R\backslash U$ ist kompakt in R und enthält L, nach Konstruktion. Hilfssatz 4 ist bewiesen. –

Wir wählen eine Umgebung V von L, deren Rand ∂V kompakt ist und $\hat{K}$ nicht trifft. Zu jedem Punkt $x\in\partial V$ existiert dann ein $f\in A$ mit $|f(x)|>\sup|f(K)|$. Diese Bedingung ist sogar für eine Umgebung von x erfüllt. Deshalb gibt es endlich viele Funktionen $f_1,\ldots,f_l\in A$ und eine reelle Zahl $\varepsilon>0$ mit

$$\max_{1\leqslant i\leqslant l}|f_i(x)|>\varepsilon>\max_{1\leqslant i\leqslant l}\sup|f_i(K)|$$

für alle $x\in\partial V$. Wir setzen

$$U:=\{x\in V:|f_i(x)|<\varepsilon\quad\text{für alle}\quad i=1,\ldots,l\}$$

und

$$W:=\{z\in\mathbf{C}^l:|z_i|<\varepsilon\quad\text{für alle}\quad i=1,\ldots,l\}.$$

Dann ist die holomorphe Abbildung $(f_1, \ldots, f_l): U \to W$ eigentlich. U ist die gesuchte Umgebung von K, q.e.d.

Beweis von Satz 4. Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein schwach-holomorph-konvexer (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum und A' die von $A = \Gamma(X, \mathscr{A})$ definierte einfache Äquivalenzrelation auf X. Nach Satz 1* ist $\mathscr{B} := \mathscr{A}/A'$ eine komplexe Struktur auf $Y := X/A'$. $(Y, \mathscr{B})$ ist sogar schwach-holomorph-konvex und holomorph-ausbreitbar, weil die holomorphe Abbildung $(q, q^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ eigentlich sowie surjektiv und der zugehörige Homomorphismus ${}^t q: \Gamma(Y, \mathscr{B}) \to \Gamma(X, \mathscr{A})$ bijektiv ist. Nach Lemma 1 ist $(Y, \mathscr{B})$ Steinsch, insbesondere holomorph-konvex, q.e.d.

Übrigens stimmt $\mathscr{B}$ wieder mit der Bildgarbe $q_0 \mathscr{A}$ überein, vgl. Satz 3.

§ 5. Topologische Äquivalenzrelationen

Wir beweisen nun die folgende Verallgemeinerung des Main Theorem von CARTAN [6] für komplexe Räume im Sinne von GRAUERT:

THEOREM. *Es sei R eine eigentliche Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$. Dann ist $(X/R, \mathscr{A}/R)$ genau dann ein komplexer Raum, wenn X/R lokal-$\mathscr{A}/R$-ausbreitbar ist.* –

Beweis. Die angegebene Bedingung ist gewiß notwendig. Es genügt also zu zeigen, daß $(X/R, \mathscr{A}/R)$ ein komplexer Raum ist, wenn jeder Punkt $y \in X/R$ eine Umgebung U besitzt, so daß $(U, \mathscr{A}/R \mid U)$ ein $\Gamma(U, \mathscr{A}/R)$-ausbreitbarer (lokal-geringter) Raum ist.

Zunächst zeigen wir mit einem bei CARTAN [6] beschriebenen Trick von GROTHENDIECK, vgl. auch [12]:

SATZ 5. *Ist R eine eigentliche Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$, so ist $\mathscr{A}/R$ für jede komplexe Struktur $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$ auf X/R eine kohärente $\mathscr{B}$-Garbe.* –

Beweis von Satz 5. Es sei $p: X \to Y := X/R$ die Projektion und $p_x^*: \mathscr{B}_{p(x)} \to \mathscr{A}_x$ $(x \in X)$ die Beschränkung des natürlichen Homomorphismus $\mathscr{A}_{p^{-1}(p(x))} \to \mathscr{A}_x$. Dann ist $(p, p^*): (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathscr{A}) \arrow[d, "p"'] & (R, \mathscr{R}) \arrow[l, shift left, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[l, shift right] \arrow[dl, dashed, "g"] \arrow[d, "p \times p"] \subset & (X \times X, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A}) \arrow[d, "p \times p"] \\
(Y, \mathscr{B}) \arrow[r, "\simeq", "d"'] & (D, \mathscr{D}) \subset & (Y \times Y, \mathscr{B} \hat{\otimes} \mathscr{B})
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}$ die kanonische Struktur auf $X\times X$. „$\hat{\otimes}$" bezieht sich auf das analytische Tensorprodukt, vgl. NAGATA [17, § 47]: $(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})_{(x,x')}:=\mathscr{A}_x\hat{\otimes}\mathscr{B}_{x'}$. D sei die Diagonale von $Y\times Y$, $\mathscr{D}:=(\mathscr{B}\hat{\otimes}\mathscr{B}/\mathscr{K})\mid D$ diejenige Struktur auf D, für die $(Y,\mathscr{B})$ und $(D,\mathscr{D})$ mittels der Diagonalabbildung $d: Y\to Y\times Y$ biholomorph äquivalent sind, $\mathscr{K}:=\operatorname{Kern} d^*$. Das Urbild $(p\times p)^{-1}(D)$ stimmt mit dem Graphen der Äquivalenzrelation $R\subset X\times X$ überein. Es sei $\mathscr{R}:=(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}/\mathscr{I})\mid R$ für die vom Bild $(p\times p)^*\mathscr{K}$ erzeugte Idealgarbe $\mathscr{I}\subset\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{A}$. Bei GROTHENDIECK [12] wird $(R,\mathscr{R})$ das *Faserprodukt* von X über Y genannt und mit $X\times_Y X$ bezeichnet, genauer $(X,\mathscr{A})\times_{(Y,\mathscr{B})}(X,\mathscr{A})$. pr_i sei die Beschränkung (auf R) der holomorphen Projektion von $X\times X$ auf die i-te Koordinate $(i=1,2)$. $g:=d^{-1}\cdot(p\times p)=p\cdot\mathrm{pr}_i$ und p sind eigentliche holomorphe Abbildungen. Deshalb erhalten wir mit den Bildgarbe $p_0\mathscr{A}$ und $g_0\mathscr{R}$ nach GRAUERT [9] kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garben (von Algebren) auf Y. Jedes pr_i definiert einen $\mathscr{B}$-Modul-Garben-Homomorphismus $u_i: p_0\mathscr{A}\to g_0\mathscr{R}$. Für $u:=u_1-u_2$ gilt:

$$\mathscr{B}\subset\operatorname{Kern} u\subset\mathscr{A}/R\subset p_0\mathscr{A}.$$

$\mathscr{A}/R$ stimmt sogar mit dem u-Urbild der nilpotenten Elemente $\mathscr{N}$ von $g_0\mathscr{R}$ überein. $\mathscr{N}$ ist aber die 0-te Bildgarbe der nilpotenten Elemente aus $\mathscr{R}$. Deshalb sind $\mathscr{N}$ und $\mathscr{A}/R=u^{-1}(\mathscr{N})$ kohärente $\mathscr{B}$-Garben auf Y, vgl. [9] und [22]. Damit ist Satz 5 bewiesen. Betrachten wir hier die identische Äquivalenzrelation, so erhalten wir den folgenden Spezialfall (und eine Umkehrung):

Sei $(X,\mathscr{B})$ ein komplexer Raum und $\mathscr{A}$ eine Garbe von lokalen Oberalgebren, $\mathscr{A}\supset\mathscr{B}$. Dann ist $(X,\mathscr{A})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn $\mathscr{A}$ eine kohärente $\mathscr{B}$-Garbe ist. –

Die Notwendigkeit der Kohärenz können wir direkt zeigen, weil die induzierte holomorphe Abbildung $(X,\mathscr{A})\to(X,\mathscr{B})$ eigentlich und $\mathscr{A}$ als Bildgarbe $id_0\mathscr{A}$ nach GRAUERT [9] kohärent ist. Die Umkehrung folgt nach HOUZEL (vgl. Séminaire Henri Cartan 1960/61): $(X,\mathscr{A})=\operatorname{Specan}(\mathscr{A})$. Unter den Voraussetzungen des Theorems gilt:

COROLLAR 2. *$(X/R,\mathscr{A}/R)$ ist genau dann ein komplexer Raum, wenn auf X/R irgendeine komplexe Struktur $\mathscr{B}$ existiert, so daß die Projektion $p: X\to X/R$ zu einer holomorphen Abbildung $(p,\bar{p}):(X,\mathscr{A})\to(X/R,\mathscr{B})$ ergänzt werden kann.* –

Beweis. Es sei wieder $Y:=X/R$. Wir können o.E.d.A. $\mathscr{B}$ als Untergarbe von $\mathscr{A}/R$ und $\bar{p}=p^*\mid\mathscr{B}$ annehmen, denn $\mathscr{I}:=\operatorname{Ann}_{\mathscr{B}}p_0\mathscr{A}$ ist nach [9] und [22] eine kohärente Idealgarbe in $\mathscr{B}$ mit Nullstellenmenge $p(X)=Y$, und es gilt für alle $y\in Y$:

$$\mathscr{I}_y=\operatorname{Kern}(\mathscr{B}_y\xrightarrow{\bar{p}_y}\mathscr{A}_{p^{-1}(y)}).$$

Also ist $\mathscr{B}':=\mathscr{B}/\mathscr{I}$ eine komplexe Struktur auf Y mit $\mathscr{B}'\subset p_0\mathscr{A}$ und (wegen Hilfssatz 1) $\mathscr{B}'\subset\mathscr{A}/R$. Y ist lokal-$\mathscr{B}$-separabel, also auch lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel, d.h. zu jedem Punkt $y\in Y$ existiert eine Umgebung U, so daß $F:=\Gamma(U,\mathscr{A}/R)$ die Punkte von

U trennt. Als Teilmenge von $\Gamma(V, \mathscr{A})$ definiert F auf $V := p^{-1}(U)$ die Äquivalenzrelation R. Deshalb ist F eine eigentliche Relation auf V und $(U, \mathscr{S}_F)$ ist nach Satz 1 ein komplexer Raum mit $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/R \mid U$. Nach Satz 5 ist $\mathscr{A}/R \mid U$ eine kohärente $\mathscr{S}_F$-Garbe.

Für offene $U_1 \subset U_2 \subset Y$ gilt $\Gamma(U_2, \mathscr{A}/R) \mid U_1 \subset \Gamma(U_1, \mathscr{A}/R)$ und $\mathscr{S}_{\Gamma(U_2, \mathscr{A}/R)} \mid U_1 \subset \mathscr{S}_{\Gamma(U_1, \mathscr{A}/R)}$. Deshalb kann U so klein gewählt werden, daß $(U, \mathscr{S}_F)$ Steinsch ist. Wegen $F = \Gamma(U, \mathscr{A}/R) = \Gamma(U, \mathscr{S}_F)$ folgt aus Theorem A, daß $\mathscr{S}_F$ und $\mathscr{A}/R \mid U$ übereinstimmen. Damit ist Corollar 2 bewiesen.

Zum Beweis des Theorems setzen wir zunächst mehr voraus, nämlich daß $Y = X/R$ lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel ist. Zu jedem Punkt $y \in Y$ wählen wir eine geignete Umgebung U, so daß $F := \Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ die Punkte trennt. Die Relation F auf $p^{-1}(U)$, F als Teilmenge von $\Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ betrachtet, ist eigentlich, weil sie dort mit R übereinstimmt. Deshalb ist $(U, \mathscr{S}_F)$ nach Satz 1 ein komplexer Raum mit $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{A}/R \mid U$. Hieraus folgt wegen Corollar 2, daß $\mathscr{A}/R$ eine komplexe Struktur auf X/R ist.

Satz 1**. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $\tilde{F}$ eine Zerlegung der von einer Funktionenmenge $F \subset \Gamma(X, \mathscr{A})$ definierten Äquivalenzrelation. Ist dann $\tilde{F}$ eigentlich, so ist $(X/\tilde{F}, \mathscr{A}/\tilde{F})$ ein komplexer Raum.* –

Der Beweis dieses Satzes folgt aus dem bereits bewiesenen abgeschwächten Theorem, wenn wir zeigen, daß $X/\tilde{F}$ lokal-$\mathscr{A}/\tilde{F}$-separabel ist. Nach Hilfssatz 3 wird eine Faser $q^{-1}(y)$, $y \in X/\tilde{F}$, der Projektion $q: X \to X/\tilde{F}$ durch eine endliche disjunkte Vereinigung $U = \bigcup U_i$ holomorph-konvexer Umgebungen U_i der Zusammenhangskomponenten von $q^{-1}(y)$ überdeckt. Diese Vereinigung ist endlich, weil $\tilde{F}$ eine eigentliche Äquivalenzrelation ist. U kann außerdem q-saturiert gewählt werden, durch eventuelle Verkleinerung: $U = q^{-1}(V)$ für offenes V in $X/\tilde{F}$ mit $y \in V$. $\Gamma(V, \mathscr{A}/\tilde{F})$ trennt die Punkte von V nach Konstruktion: Satz 1** ist bewiesen.

Nun ist der Beweis des Theorems einfach: $Y = X/R$ ist lokal-$\mathscr{A}/R$-ausbreitbar. Deshalb können wir zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U wählen, so daß die von $F := \Gamma(U, \mathscr{A}/R)$ definierte einfache Äquivalenzrelation $\tilde{F}$ auf U trivial ist. $\tilde{F}$ definiert auf $p^{-1}(U)$ eine Zerlegung der Äquivalenzrelation $F \subset \Gamma(p^{-1}(U), \mathscr{A})$ und ist wegen $\tilde{F} = R \mid p^{-1}(U)$ eigentlich. Deshalb ist $\mathscr{A}/R \mid U = \mathscr{A}/\tilde{F}$ eine komplexe Struktur auf U, nach Satz 1**, q.e.d. –

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, daß das Theorem nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen (vgl. etwa Lieb [16, Satz 7] auf semi-eigentliche Äquivalenzrelationen ausgedehnt werden kann:

Beispiel 5. Die Projektion $p: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ auf die erste Koordinate ist eine semi-eigentliche holomorphe Abbildung. Auf $\mathbf{C}^2$ wählen wir die komplexe Struktur $\mathscr{A} := {}_2\mathcal{O} \dot{\oplus} {}_2\mathcal{O}$ im Sinne von Forster [7], s. auch Bemerkung (3) im Anschluß an Satz 6. Ist R die von p auf dem $\mathbf{C}^2$ definierte Äquivalenzrelation, so ist $\mathbf{C}^2/R = \mathbf{C}$ zwar lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel. $\mathscr{A}/R$ ist jedoch keine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$. –

Wie bereits erwähnt wurde, wollen wir auf Quotienten X/R auch Untergarben von $\mathscr{A}/R$ mit speziellen Eigenschaften untersuchen. Der allgemeine Fall kann sofort auf die triviale Äquivalenzrelation auf X zurückgeführt werden, weil gilt:

SATZ 6. *Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein komplexer Raum und $\mathscr{B}$ eine Garbe lokaler Unteralgebren von $\mathscr{A}$. Dann ist $(X, \mathscr{B})$ genau dann ein komplexer Raum, wenn gilt: $\mathscr{B}$ ist abgeschlossen, X ist lokal-$\mathscr{B}$-separabel und lokal-$\mathscr{B}$-regulär.* –

Daß die Eigenschaft lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar statt lokal-$\mathscr{B}$-separabel nicht ausreicht, wurde bereits in § **2**, Beispiel 2, gezeigt.

Bemerkung. Die drei in Satz 6 angegebenen Voraussetzungen sind unabhängig:

(1) Es sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die komplexe Ebene mit der gewöhnlichen Struktur, $\mathscr{I}_x := \{p \in \mathbf{C}[z-x] : p(x)=0\}$ ist ein Primideal im Polynomring $\mathbf{C}[z]=\mathbf{C}[z-x]$. Deshalb ist die Lokalisierung

$$\mathbf{C}[z]_{\mathscr{I}_x} := \left\{\frac{p}{q} \in \text{Quotientenring von } \mathbf{C}[z] : q \notin \mathscr{I}_x\right\}$$

eine *lokale* Unteralgebra von $\mathscr{O}_x = \mathbf{C}[\langle z-x\rangle]$. Für offenes $U \subset \mathbf{C}$ sei $\mathscr{B}(U) := \{f \in \mathscr{O}(U) : f_x \in \mathbf{C}[z]_{\mathscr{I}_x}$ für alle $x \in U\}$.

$\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ ist eine *nicht abgeschlossene* Garbe von lokalen Unteralgebren. Wegen $\mathbf{C}[z] \subset \Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{B}) =: B$ ist X sowohl B-separabel als auch B-regulär, also insbesondere *lokal-$\mathscr{B}$-separabel* und *-regulär*. (Es genügt natürlich, die Garbe $\mathscr{O}$ nur in einem Punkt aus X abzuändern).

(2) In § **0** (Beispiel 1) wurde auf dem $\mathbf{C}^2$ eine *abgeschlossene* Garbe $\mathscr{B} \subset {}_2\mathscr{O}$ von *lokalen* Unteralgebren angegeben, so daß der Raum $(\mathbf{C}^2, \mathscr{B})$ zwar *lokal-$\mathscr{B}$-regulär*, aber *nicht lokal-$\mathscr{B}$-separabel* ist (nicht einmal lokal-$\mathscr{B}$-ausbreitbar).

(3) Ist R eine Algebra und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so wird $R_0 := R \times \mathfrak{a}$ mit komponentenweiser Skalarmultiplikation und Addition sowie der Multiplikation

$$(r, a)\cdot(r_1, a_1) := (r\,r_1,\, r\,a_1 + r_1\,a)$$

ebenfalls eine Algebra, die mit $R \dot{\oplus} \mathfrak{a}$ bezeichnet wird, vgl. etwa [7] und [17]. Ist R eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{r}$, so ist auch $R \dot{\oplus} \mathfrak{r}$ eine lokale Algebra mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{a}$. Es gilt:

$$\mathfrak{r}_0^2 = \mathfrak{r}^2 \oplus \mathfrak{r}\,\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_0/\mathfrak{r}_0^2 = \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \oplus \mathfrak{a}/\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}.$$

Nun sei $(\mathbf{C}, \mathscr{O})$ die komplexe Ebene mit der üblichen Struktur, $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathscr{O}_x$, $x \in \mathbf{C}$. Für offenes $U \subset \mathbf{C}$ sei $\mathscr{I}(U)$ das Ideal aller Schnitte $f \in \mathscr{O}(U)$, deren Keime $f_{1/n}$ in $(\mathfrak{m}_{1/n})^n$ liegen, falls $1/n \in U$, $n \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{I}(U)$ ist abgeschlossen in $\mathscr{O}(U)$. Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt, daß $\mathscr{I}(U)=0$ für alle offenen Umgebungen U von $0 \in \mathbf{C}$. Nach FORSTER [7, Satz 2.3] ist $\mathscr{A} := \mathscr{O} \dot{\oplus} \mathscr{O}$ eine komplexe Struktur auf $\mathbf{C}$. $\mathscr{B} := \mathscr{O} \dot{\oplus} \mathscr{I}$ ist eine *abge-*

schlossene Garbe von *lokalen* Unteralgebren von $\mathscr{A}$. $\mathbf{C}$ ist *lokal-$\mathscr{B}$-separabel* (sogar $\Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{B})$-separabel wegen $\mathcal{O} \cong \mathcal{O} \dot{\oplus} 0 \subset \mathscr{B}$). Allerdings ist $\mathbf{C}$ (im Nullpunkt) *nicht lokal-$\mathscr{B}$-regulär*: Für jede Umgebung U von $0 \in \mathbf{C}$ ist $\mathscr{B}(U) = \mathcal{O}(U) \dot{\oplus} 0$. Deshalb erzeugen die Schnitte aus $\mathscr{B}(U)$ nur den Unterraum $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus 0$ des Tangentialraums $T_x(\mathbf{C}, \mathscr{B}) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \mathscr{I}_x/\mathfrak{m}_x \cdot \mathscr{I}_x$, $x \in U$. Aber es gilt:

$$\mathscr{I}_{1/n}/\mathfrak{m}_{1/n} \cdot \mathscr{I}_{1/n} = (\mathfrak{m}_{1/n})^n/(\mathfrak{m}_{1/n})^{n+1} \neq 0,$$
$$\text{und} \quad 1/n \in U \quad \text{für fast alle} \quad n \in N.$$

Beweis von Satz 6. Die drei Bedingungen sind gewiß notwendig. Ist X lokal-$\mathscr{B}$-separabel, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U, so daß die zu $F := \Gamma(U, \mathscr{B}) \subset \Gamma(U, \mathscr{A})$ gehörende Äquivalenzrelation F die Punkte von U trennt. Also ist $(U, \mathscr{S}_F)$ nach Satz 1 ein komplexer Raum, und da $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ abgeschlossen ist, gilt: $\mathscr{S}_F \subset \mathscr{B} \mid U \subset \mathscr{A} \mid U$. Nach Satz 5 ist $\mathscr{A} \mid U$ eine kohärente $\mathscr{S}_F$-Garbe auf U, und deshalb ist $\mathscr{B}_x$ ein endlicher $\mathscr{S}_{F,x}$-Modul für alle $x \in U$. Hieraus folgt, daß $\mathscr{B}_x$ ein analytischer Ring über $\mathbf{C}$ ist, vgl. NAGATA [17, § 47]; denn es gilt:

Ein lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist genau dann ein analytischer Ring über $K := R/\mathfrak{m}$, wenn R ein endlicher Modul über einem Unterring ist, der ein konvergenter Potenzreihenring in endlich vielen analytisch unabhängigen Elementen über K ist.

Der Beweis folgt aus dem Normalisierungssatz [17, Theorem (45.5)].

Hieraus erhalten wir noch nicht, daß $\mathscr{B}$ eine komplexe Struktur auf X ist. Die Eigenschaft lokal-$\mathscr{B}$-regulär wurde noch nicht verwendet: U wird so klein gewählt, daß $(U, \mathscr{B} \mid U)$ ein F-regulärer lokal-geringter Raum ist, d.h. die kanonische Abbildung $F \to T_x(U, \mathscr{B})$ ist surjektiv für alle $x \in U$. Deshalb induziert die Injektion $\mathscr{S}_{F,x} \subset \mathscr{B}_x$ einen surjektiven Vektorraum-Homomorphismus

$$T_x(U, \mathscr{S}_F) \to T_x(U, \mathscr{B}).$$

Hieraus folgt $\mathscr{B} \mid U = \mathscr{S}_F$, weil nach ANDREOTTI gilt:

LEMMA 2. *Es seien $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ und $(R, \mathfrak{m})$ analytische Ringe, $\phi: R_0 \to R$ ein (lokaler) Homomorphismus, $\tilde{\phi}: \mathfrak{m}_0 \to \mathfrak{m}$ und $\delta\phi: \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die von ϕ induzierten Abbildungen. Dann sind ϕ, $\tilde{\phi}$ und $\delta\phi$ surjektiv, wenn einer dieser Homomorphismen surjektiv ist.* –

Zum Beweis vgl. [1], [10] und [19].

Bemerkung. Es sei $\mathscr{B}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X, \mathscr{A})$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}) = \{x \in X : \mathscr{B}_x \neq \mathscr{A}_x\}$ ist eine analytische Menge.

(b) Ist $(X, \mathscr{A})$ reduziert, so ist $\operatorname{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ niederdimensional.

(c) Ist außerdem $(X, \mathscr{B})$ normal, so ist $\operatorname{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ leer, d.h. $\mathscr{A} = \mathscr{B}$. –

Beweis. (a) $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ und deshalb $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ sind kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garben auf X. Darum ist $\operatorname{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B})$ analytisch, etwa nach GRAUERT [9].

Nun sei $(X, \mathscr{A})$ reduziert. Ist dann $\mathscr{B}_x$ normal, so stimmen $\mathscr{B}_x$ und $\mathscr{A}_x$ überein.

Wir erhalten:

$$\{x \in X : \mathscr{B}_x \text{ singulär}\} \supset \{x \in X : \mathscr{B}_x \text{ nicht normal}\} \supset \mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}).$$

Hieraus folgt (b) und (c).

Die beiden letzten Aussagen werden falsch, wenn nur vorausgesetzt wird, daß $(X, \mathscr{B})$ reduziert ist; denn es gibt nichtreduzierte komplexe Oberstrukturen, etwa $\mathscr{B} \dot{\oplus} \mathscr{M}$ für jede kohärente $\mathscr{B}$-Modul-Garbe $\mathscr{M}$ auf X, vgl. FORSTER [7]. Wir wählen als $\mathscr{A} := \mathscr{B} \dot{\oplus} \mathscr{B}$. Dann ist $\mathrm{Tr}(\mathscr{A}/\mathscr{B}) = X$.

COROLLAR 3. *Es sei R eine beliebige Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$, $p: X \to X/R$ die Projektion und $(X/R, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum für eine Garbe $\mathscr{B} \subset p_0 \mathscr{A}$ von Unteralgebren. Dann sind alle in $\mathscr{B}$ enthaltenen R-Garben komplexe Strukturen auf X/R. Ist R außerdem eigentlich, so ist $(X/R, \mathscr{A}/R)$ ein komplexer Raum, und genau die R-Garben liefern komplexe Unterstrukturen auf $(X/R, \mathscr{A}/R)$.* –

Der Beweis folgt aus dem Theorem und Satz 6.

SATZ 1^+. *Es sei h eine Familie holomorpher Abbildungen auf einem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$. R sei die zugehörige Äquivalenzrelation auf X, $\tilde{R}$ eine Zerlegung von R und $\mathscr{S}_h$ bzw. $\mathscr{S}_{\tilde{h}}$ die Spektralstruktur auf den Quotienten X/R bzw. $X/\tilde{R}$. Ist R bzw. $\tilde{R}$ eigentlich, so ist $(X/R, \mathscr{S}_h)$ bzw. $(X/\tilde{R}, \mathscr{A}/\tilde{R})$ ein komplexer Raum. Jede Abbildung aus h kann über die induzierte holomorphe Abbildung $p: (X, \mathscr{A}) \to (X/R, \mathscr{S}_h)$ faktorisiert werden.* –

Der Beweis folgt für $(X/R, \mathscr{S}_h)$ bzw. $(X/\tilde{R}, \mathscr{A}/\tilde{R})$ aus dem Theorem und Satz 6 mittels:

HILFSSATZ 2^+. *X/R ist lokal-$\mathscr{S}_h$-separabel und -regulär, bzw. $X/\tilde{R}$ ist lokal-$\mathscr{S}_{\tilde{h}}$-ausbreitbar, also lokal-$\mathscr{A}/\tilde{R}$-ausbreitbar.* –

Beweis. Zu jedem Punkt $y_0 \in X/R$ wählen wir eine relativ-kompakte Umgebung $V \subset X/R$. Da auch $U := p^{-1}(V)$ relativ-kompakt ist, gibt es eine *endliche* Familie $f \subset h$ mit der Eigenschaft

$$\text{Bild } \delta f_x = \text{Bild } \delta h_x \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Dabei ist Bild δh_x der von der Vereinigung aller Bild $\delta h_{i,x}$ $(h_i \in h)$ aufgespannte Untervektorraum von $T_x(X, \mathscr{A})$. Die holomorphe Abbildung f kann nach Hilfssatz 2* o.E. so gewählt werden, daß sie auf U die Äquivalenzrelation R definiert. Dann ist

$$\mathscr{S}_f \mid V = \mathscr{S}_{\Gamma(V, \mathscr{S}_f)} \subset \mathscr{S}_h \mid V \subset (\mathscr{A}/R) \mid V,$$

d.h. $(V, \mathscr{S}_f \mid V)$ – wegen Satz 1 – und $(V, \mathscr{A}/R \mid V)$ – wegen Corollar 2 – sind komplexe Räume. Außerdem gilt für die Tangentialräume $T_y(V, \mathscr{S}_h) = T_y(V, \mathscr{S}_f)$ für alle y aus V. Deshalb folgt – wie im Beweis von Satz 6 – $\mathscr{S}_h \mid V = \mathscr{S}_f \mid V$.

Den zweiten Teil von Hilfssatz 2^+ beweist man genauso.

§ 6. Analytische Äquivalenzrelationen

In [13, § 4] hat HOLMANN den Begriff der analytischen Äquivalenzrelation auf reduzierten komplexen Räumen eingeführt. Für den allgemeinen Fall gab B. KAUP [14] die Definition folgendermaßen an: Eine analytische Äquivalenzrelation auf $(X, \mathscr{A})$ ist ein komplexer Unterraum $(R, \mathscr{R}) \subset (X \times X, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A})$, der unter dem Symmetrie-Automorphismus $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ invariant ist, und dessen Träger R der Graph einer mengentheoretischen Äquivalenzrelation auf X ist.

Der lokal-geringte Quotient von $(X, \mathscr{A})$ nach der analytischen Relation $(R, \mathscr{R})$ wird so definiert: R induziert den topologischen Quotienten $Y := X/R$. Das Diagramm (*) in § 5 kann also ohne komplexe Strukturen auf Y, D und $Y \times Y$ betrachtet werden. Auch der Homomorphismus

$$u(\mathscr{R}) = u_1 - u_2 : p_0 \mathscr{A} \to g_0 \mathscr{R}$$

ist definiert. Dann ist Kern $u(\mathscr{R})$ die von HOLMANN und B. KAUP betrachtete lokalgeringte Struktur auf Y, und es folgt; vgl. [14]:

COROLLAR 4. *Ist $(R, \mathscr{R})$ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$, so ist der Quotient $(X/R, \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}))$ genau dann ein komplexer Raum, wenn X/R lokal-*$\operatorname{Kern} u(\mathscr{R})$*-separabel ist.* –

Beweis. Wegen $\mathscr{B} := \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}) \subset \mathscr{A}/R$, vgl. Hilfssatz 1, ist X/R lokal-$\mathscr{A}/R$-separabel. Also ist $\mathscr{A}/R$ nach dem Theorem eine komplexe Struktur auf X/R. Da u stetig ist, ist $\mathscr{B}$ eine abgeschlossene Untergarbe von $\mathscr{A}/\mathscr{R}$, d.h. $\mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})} \subset \mathscr{B} \mid U$ für alle offenen $U \subset X/R$. Für kleines U ist $(U, \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})})$ ein komplexer Raum und Steinsch, $\mathscr{B} \mid U$ ist eine kohärente $\mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})}$-Garbe mit $\Gamma(U, \mathscr{B}) = \Gamma(U, \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})})$, d.h. wegen Theorem A gilt $\mathscr{B} \mid U = \mathscr{S}_{\Gamma(U, \mathscr{B})}$; q.e.d.

Bei fester Relation R sei $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ die von einer (symmetrischen) analytischen Struktur $\mathscr{R}$ auf R induzierten Quotientengarbe auf $Y := X/R : \mathscr{H}(\mathscr{R}) = \operatorname{Kern} u(\mathscr{R})$.

Ist andererseits $(Y, \mathscr{B})$ ein komplexer Raum mit $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}/R$, so sei $\mathscr{R}(\mathscr{B})$ die mittels des Diagramms (*) auf R definierte komplexe Struktur („Faserprodukt“).

Dann gilt wegen $\mathscr{B} \subset \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{B})) \subset \mathscr{A}/R$:

(a) $(Y, \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{B})))$ ist ein komplexer Raum.

(b) $\mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{A}/R)) = \mathscr{A}/R = \mathscr{H}(\mathscr{R}_{\text{red}})$.

Verschiedene analytische Äquivalenzrelationen mit gleichem Träger können durchaus denselben Quotienten induzieren:

BEISPIEL 6. Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein Doppelpunkt, etwa $X = \{0\} \subset \mathbf{C}$ und $\mathscr{A} := \mathscr{O}/\mathfrak{m}^2 = \mathbf{C} \dot{\oplus} \mathbf{C}$. Dabei sei $\mathfrak{m} := {}_1\mathfrak{m}_0$ das maximale Ideal in $\mathscr{O} := {}_1\mathscr{O}_0$. $\mathfrak{m}$ stimmt mit dem von T erzeugten Ideal in $\mathbf{C}[\langle T \rangle]$ überein. Ist R die triviale Relation auf X ($X = X/R$ und

$p = \mathrm{id}_X$), so gilt $\mathscr{A}/R = p_0 \mathscr{A} = \mathscr{A}$. Außerdem erhalten wir:

$$\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A} = \mathbf{C}[\langle T_1, T_2 \rangle]/\tilde{\mathfrak{m}}, \ \tilde{\mathfrak{m}} := (T_1^2, T_2^2) \subsetneqq {}_2\mathfrak{m}^2,$$
$${}_2\mathfrak{m} := (T_1, T_2) \subset \mathbf{C}[\langle T_1, T_2 \rangle] = {}_2\mathcal{O}_0.$$

Auf dem Graphen $R = X \times X = \{(0, 0)\} \subset \mathbf{C}^2$ definieren wir folgende Strukturen:

$$\mathscr{R}_0 := \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A}/0 = \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A},$$
$$\mathscr{R}_1 := \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A}/({}_2\mathfrak{m}^2/\tilde{\mathfrak{m}}) \neq \mathscr{R}_0, \quad \text{da} \quad \tilde{\mathfrak{m}} \neq {}_2\mathfrak{m}^2.$$

Trotzdem gilt: $\mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R}_0) = \mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R}_1)$. Der angegebene Raum liefert aber auch ein Beispiel dafür, daß verschiede Quotientenstrukturen $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ auf X/R auftreten können: Für $\mathscr{R}_{\mathrm{red}} = \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A}/({}_2\mathfrak{m}/\tilde{\mathfrak{m}}) = \mathbf{C}$ gilt $\mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R}_{\mathrm{red}}) = \mathscr{A} \neq \mathbf{C}$.

Übrigens ist für alle eigentlichen analytischen Äquivalenzrelationen $(R, \mathscr{R})$ die Beziehung $\mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R}_{\mathrm{red}}) = \mathscr{A}/R$ richtig, auch wenn $\mathscr{A}/R$ keine komplexe Struktur auf X/R ist.

Um zu beweisen, daß nicht alle komplexen Unterstrukturen auf dem Quotienten $(X/R, \mathscr{A}/R)$ als $\mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R})$ im Sinne von Corollar 4 dargestellt werden können, zeigen wir:

Hilfssatz 5. *Es sei R eine eigentliche Relation auf dem komplexen Raum $(X, \mathscr{A})$ und $\mathscr{B}$ eine komplexe Unterstruktur auf $(X/R, \mathscr{A}/R)$, so daß $\mathscr{B} = \mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R})$ gilt für eine (symmetrische) komplexe Struktur $\mathscr{R}$ auf R $(R, \mathscr{R}) \subset (X \times X, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A})$. Dann gilt auch $\mathscr{B} = \mathrm{Kern}\, u(\mathscr{R}(\mathscr{B}))$.* –

Der Beweis folgt aus der universellen Eigenschaft des Faserprodukts $(X, \mathscr{A}) \times \times_{(X/R, \mathscr{B})} (X, \mathscr{A}) = (R, \mathscr{R}(\mathscr{B}))$, vgl. Grothendieck [12]; denn die Behauptung ist äquivalent mit $\mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{H}(\mathscr{R}))) = \mathscr{H}(\mathscr{R})$ für alle symmetrischen Unterräume $(R, \mathscr{R}) \subset \subset (X \times X, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A})$, die den Graphen von R als Träger besitzen.

Nun kommen wir zum angekündigten

Beispiel 7. Es sei $(\mathbf{C}, \mathcal{O})$ die gewöhnliche komplexe Ebene mit der Koordinate z. Dann ist die Spektralstruktur $\mathscr{S} := \mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]}$ eine komplexe Unterstruktur:

$$\mathscr{S}_0 = \{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \in \mathcal{O}_0 : a_1 = a_2 = a_5 = 0\} \subset \mathcal{O}_0.$$

$(\mathbf{C}^2, {}_2\mathcal{O}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C}, \mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{O})$ habe die Koordinaten x, y. Dann ist $\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathbf{C}[x^3, x^4, y^3, y^4]} \subset {}_2\mathcal{O}$ wieder eine Unterstruktur:

$$(\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})_{(0,0)} = \{ \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \in {}_2\mathcal{O}_{(0,0)} : a_{\nu\mu} = 0 \quad \text{für alle} \quad \nu, \mu = 1, 2, 5\}.$$

Die Diagonalabbildung $(d, d^*) : (\mathbf{C}, \mathscr{S}) \to (\mathbf{C}^2, \mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})$ induziert folgenden Homomorphismus

$$d_0^*: (\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})_{(0,0)} \to \mathscr{S}_0,$$
$$\sum_{\nu,\mu \neq 1,2,5}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \mapsto \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu+\mu=\lambda} a_{\nu\mu} \Big) z^\lambda,$$

d.h. $\operatorname{Kern} d^* = (x^3 - y^3, x^4 - y^4) \subset (\mathscr{S} \hat{\otimes} \mathscr{S})_{(0,0)} \subset {}_2\mathcal{O}_{(0,0)}$.

Nun betrachten wir den Homomorphismus

$$v: \mathcal{O}_0 \to {}_2\mathcal{O}_{(0,0)}, \ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x^\nu - y^\nu).$$

$\mathscr{I}$ sei das von $\operatorname{Kern} d^*$ in ${}_2\mathcal{O}_{(0,0)}$ erzeugte Ideal. Dann ist $\mathscr{R}(\mathscr{S}) := {}_2\mathcal{O}/\mathscr{I}$ die zur Quotientenabbildung

$$(\mathbf{C}, \mathcal{O}) \to (\mathbf{C}, \mathscr{S})$$

gehörende (symmetrische) komplexe Struktur auf $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = R$, und es gilt: $v^{-1}(\mathscr{I}) = \operatorname{Kern} u(\mathscr{R}(\mathscr{S})) =: \mathscr{H}(\mathscr{R}(\mathscr{S}))$. Andererseits gehört das Element $z^5 \in \mathcal{O}_0$ zu $v^{-1}(\mathscr{I})$, denn

$$v(z^5) = x^5 - y^5 = (x+y)(x^4 - y^4) - xy(x^3 - y^3) \in \mathscr{I},$$

Aber $z^5 \notin \mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3, z^4]}$. Wir erhalten:

$$\mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3,z^4]} \subsetneqq \mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3,z^4,z^5]} = \mathscr{H}\big(\mathscr{R}(\mathscr{S}_{\mathbf{C}[z^3,z^4]})\big) \subsetneqq \mathcal{O}.$$

Nach Hilfssatz 5 ist damit die Behauptung bewiesen.

LITERATUR

[1] ANDREOTTI, A. und H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France *90*, 193–259 (1962).
[2] BISHOP, E., *Mappings of Partially Analytic Spaces*, Amer. J. Math. *83*, 209–242 (1961).
[3] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1953), chap. 1–5.
[4] ———, *Topologie générale* (Hermann, Paris 1951), chap. 1–10.
[5] CARTAN, H., *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, in *Coll. sur les fonctions de plusieurs variables* (CBRM, Brussel 1953), pp. 41–55.
[6] ———, *Quotients of Complex Analytic Spaces*, in *Contr. to Function Theory* (Bombay 1960), pp. 1–15.
[7] FORSTER, O., a) *Beiträge zur algebraischen Theorie der holomorph-vollständigen komplexen Räume*, Habilitationschrift (München 1964). b) *Uniqueness of Topology in Stein Spaces*, in *Proc. of Symp. on Function Algebras, at New Orleans 1965* (Scott-Foresman Chicago 1966), pp. 157–163. c) *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*, Math. Z. *97*, 376–405 (1967).
[8] GRAUERT, H., *Charakterisierung der holomorph-vollständigen Räume*, Math. Ann. *129*, 233–259 (1955).
[9] ———, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. I.H.E.S. *5*, 233–292 (1960).
[10] ———, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. *146*, 331–368 (1962).
[11] ———, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*, Math. Z. *91*, 377–391 (1963).

[12] Grothendieck, A., *Techniques de construction en géométrie analytique*, I–X (Séminaire Henri Cartan 1960/61).
[13] Holmann, H., *Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen*, Math. Ann. *150*, 327–360 (1963).
[14] Kaup, B., Dissertation (Fribourg 1967).
[15] Kuhlmann, N., *Über holomorphe Abbildungen komplexer Räume*, Arch. Math. *15*, 81–90 (1964).
[16] Lieb, I., *Über komplexe Räume und komplexe Spektren*, Invent. math. *1*, 45–58 (1966).
[17] Nagata, M., *Local Rings* (Interscience Publ., New York 1962).
[18] Narasimhan, R., *Imbedding of Holomorphically Complete Complex Spaces*. Amer. J. Math. *82*, 917–934 (1960).
[19] ———, *Levi Problem for Complex Spaces*, II. Math. Ann. *146*, 195–216 (1962).
[20] Remmert, R., a) *Sur les espaces analytiques holomorphiquement separables et holomorphiquement convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris *243*, 118–121 (1956). b) Habilitationsschrift (Münster 1957). c) *Reduction of Complex Spaces*, Princeton Seminars on Analytic Functions, vol. *1*, Sem. I (1960).
[21] Schuster, H. W., *Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume*. Dissertation (München 1968).
[22] Serre, J.-P., *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. *61*, 197–278 (1955).
[23] ———, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier *6*, 1–42 (1955/56).
[24] Stein, K., *Analytische Zerlegungen komplexer Räume*, Math. Ann. *132*, 63–93 (1956).
[25] ———, *Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume*, Arch. Math. *7*, 354–361 (1956).
[26] Wiegmann, K.-W., *Einbettungen komplexer Räume in Zahlenräume*, Invent. math. *1*, 229–242 (1966).
[27] ———, *Über Quotienten holomorph-konvexer komplexer Räume*, Math. Z. *97*, 251–258 (1967).

Mathematisches Institut
der Universität München

Eingegangen den 30. Mai 1968