Marinescu-Räume.

Autor(en): **Jarchow, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33762

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Marinescu-Räume

von HANS JARCHOW (Zürich)

0. Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht eine Klasse von Limesvektorräumen, die bei der Begründung einer Differentialrechnung für lokalkonvexe Räume eine wichtige Rolle spielt, siehe H. H. KELLER [8], [9]. Diese Räume wurden unter dem Namen „pseudotopologische Vereinigungen lokalkonvexer Räume" bereits von G. MARINESCU [11] eingeführt, wir wollen sie *Marinescu-Räume* nennen.

Im ersten Kapitel skizzieren wir die Theorie der Limesräume nach H. R. FISCHER [5]. Wichtig ist vor allem der Begriff des induktiven Limes von Limesräumen. Das zweite Kapitel behandelt Limesvektorräume. Der Begriff des Marinescu-Raumes wird eingeführt, und das Tensorprodukt von Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) wird projektiv zu einem Limesvektorraum (Marinescu-Raum) gemacht. Im letzten Kapitel werden Räume stetiger linearer und multilinearer Abbildungen zwischen Marinescu-Räumen nach einem aus [8] abgeleiteten Verfahren mit Marinescu-Limitierungen versehen. Wir zeigen, dass alle von H. H. KELLER in [9] gestellten Forderungen erfüllt sind, so dass eine gewisse berechtigte Hoffnung besteht, sogar eine Differentialrechnung für Marinescu-Räume begründen zu können.

1. Limesräume

1.1 *Allgemeine Begriffe*

Dieser Abschnitt enthält Begriffe und Aussagen aus der Theorie der Limesräume, die später benötigt werden. Eine ausführlichere Darstellung findet man bei H. R. FISCHER [5] oder J. WLOKA [12].

Für eine nichtleere Menge M sei $\mathfrak{P}(\mathscr{F}(M))$ die Potenzmenge der Menge $\mathscr{F}(M)$ aller Filter auf M. Eine *Limitierung* λ auf M ist eine Abbildung $\lambda: M \to \mathfrak{P}(\mathscr{F}(M))$, die für jedes $x \in M$ folgende Eigenschaften besitzt:

$$\text{(L 1)} \quad \Phi \in \lambda(x), \quad \psi \in \mathscr{F}(M), \quad \Phi \subset \psi \Rightarrow \psi \in \lambda(x).$$

$$\text{(L 2)} \quad \Phi \in \lambda(x), \quad \psi \in \lambda(x) \Rightarrow \Phi \cap \psi \in \lambda(x).$$

$$\text{(L 3)} \quad \dot{x} \in \lambda(x).$$

$\dot{x}$ ist der von $x \in M$ erzeugte triviale Ultrafilter in M. Das Paar (M, λ) heisst ein *Limesraum*, die Filter aus $\lambda(x)$ heissen *konvergent* gegen $x \in M$. Genügt eine Menge von Filtern in M den Axiomen (L 1) und (L 2), so heisst sie ein *Filterideal*.

Der Limesraum (M, λ) (die Limitierung λ) heisst *separiert*, wenn in M jeder Filter gegen höchstens einen Punkt konvergiert. Das ist genau dann der Fall, wenn für $(x, y) \in M \times M$ aus $x \neq y$ stets folgt: $\lambda(x) \cap \lambda(y) = \emptyset$.

Jeder *topologische Raum* $(X, \mathcal{T})$ ist in natürlicher Weise ein Limesraum (X, λ): Für jedes $x \in X$ besteht das Filterideal $\lambda(x)$ gerade aus allen Oberfiltern des $\mathcal{T}$-Umgebungsfilters von x in X. Wir werden Topologien immer mit den zugehörigen Limitierungen identifizieren.

(M, λ) und (N, μ) seien Limesräume. Eine Abbildung $f: M \to N$ heisst *(λ, μ)-stetig* im Punkte $x \in M$, wenn aus $\Phi \in \lambda(x)$ immer $f(\Phi) \in \mu(f(x))$ folgt. Damit definiert man wie üblich Begriffe wie (λ, μ)-Stetigkeit (global) und (λ, μ)-Homöomorphie. Wir sagen auch, f sei stetig bzw. ein Homöomorphismus, wenn klar ist, um welche Limitierungen es sich handelt. Gilt $M = N$, so schreiben wir $\mu \leqslant \lambda$ oder $\lambda \geqslant \mu$ (*μ gröber* als λ oder *λ feiner* als μ), wenn die Identität von M eine (λ, μ)-stetige Abbildung ist. $\mu \leqslant \lambda$ gilt genau dann, wenn $\lambda(x) \subset \mu(x)$ für jedes $x \in M$.

Gegeben seien nun eine nichtleere Menge M, eine Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen $(A \neq \emptyset)$ und zu jedem $a \in A$ zwei Abbildungen $g_a: M_a \to M$ und $f_a: M \to M_a$. Unter allen Limitierungen auf M, für die jedes g_a stetig ist, gibt es eine feinste λ^0, und unter allen Limitierungen auf M, für die jedes f_a stetig ist, gibt es eine gröbste λ_0. Wir nennen λ^0 die *finale Limitierung* von $(g_a)_{a \in A}$ und λ_0 die *initiale Limitierung* von $(f_a)_{a \in A}$. Für ein $x \in M$ wird das Filterideal $\lambda^0(x)$ erzeugt von $\dot{x}$ und allen Filtern der Form $g_a(\psi_a)$ mit $\psi_a \in \lambda_a(y_a)$ und $y_a \in g_a^{-1}(x)$, $a \in A$. Dagegen konvergiert ein Filter Φ auf M genau dann bezüglich λ_0 gegen ein $x \in M$, wenn $f_a(\Phi) \in \lambda_a(f_a(x))$ für jedes $a \in A$ gilt. Ist (X, ϱ) ein weiterer Limesraum, so ist eine Abbildung $f: M \to X$ genau dann (λ^0, ϱ)-stetig, wenn für jedes $a \in A$ die Komposition $f \circ g_a$ eine (λ_a, ϱ)-stetige Abbildung ist. Eine Abbildung $g: X \to M$ ist hingegen genau dann (ϱ, λ_0)-stetig, wenn für jedes $a \in A$ die Komposition $f_a \circ g$ eine (ϱ, λ_a)-stetige Abbildung ist. Sind alle λ_a Topologien, so ist λ_0 stets eine Topologie. Dies muss für λ^0 nicht wahr sein.

Man erhält hieraus durch Spezialisierung den Begriff der *Quotientenlimitierung* auf dem Quotienten M/R für einen Limesraum (M, λ) und eine Äquivalenzrelation R auf M, ferner den Begriff des *Limesunterraumes* eines gegebenen Limesraumes und schliesslich den Begriff der *Produktlimitierung* $\prod_{a \in A} \lambda_a$ auf dem kartesischen Produkt $\prod_{a \in A} M_a$ einer nichtleeren Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen. Für $x = (x_a)_{a \in A} \in \prod M_a$ wird dabei $(\prod \lambda_a)(x)$ erzeugt von allen Produktfiltern $\prod_{a \in A} \Phi_a$ mit $\Phi_a \in \lambda_a(x_a)$. Es ist $\prod \lambda_a$ genau dann separiert, wenn jede der Limitierungen λ_a separiert ist. Ist (N, μ) Limesunterraum des Limesraumes (M, λ), so nennen wir μ oft auch die von λ auf N *induzierte Limitierung*. Für Einzelheiten und Beweise sei auf H. R. FISCHER [5] verwiesen.

1.2 *Induktiver und projektiver Limes*

(M, λ) und (N, μ) seien Limesräume, M sei Teilmenge von N. Ist die Inklusion

$M \to N$ eine (λ, μ)-stetige Abbildung, so schreiben wir

$$(M, \lambda) \prec (N, \mu).$$

Wir betrachten eine nichtleere Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen, deren Indexmenge A durch eine Ordnungsrelation „$\leqslant$" gerichtet ist und verlangen:

$$\text{(IND)} \quad ((a, a') \in A \times A, \quad a \leqslant a') \Rightarrow (M_a, \lambda_a) \prec (M_{a'}, \lambda_{a'}).$$

Die finale Limitierung λ auf $M := \bigcup_{a \in A} M_a$ der Familie der Einbettungen $M_a \to M$, $a \in A$, heisst der *induktive Limes* von $(\lambda_a)_{a \in A}$ und wird bezeichnet mit

$$\lambda = \operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a .$$

Wenn wir in Zukunft den soeben geschilderten Sachverhalt meinen, werden wir dies immer durch die Schreibweise

$$(M, \lambda) = \operatorname*{ind}_{a \in A} (M_a, \lambda_a)$$

ausdrücken.

Ist speziell $A = \mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und ist (M_n, λ_n) Limesunterraum von (M_{n+1}, λ_{n+1}) für jedes $n \in \mathbf{N}$, so heisst $\lambda = \operatorname*{ind}_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n$ der *strikte induktive Limes* der Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Sind in $(M, \lambda) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ alle λ_a Topologien, so muss deswegen λ noch keine Topologie sein; siehe etwa [8] oder (2.2) dieser Arbeit. Man beachte, dass wir in der Kategorie der Limesräume arbeiten!

In $(M, \lambda) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ bezeichnen wir die Inklusionsabbildungen $M_a \to M$ mit i_a, $a \in A$. Die konvergenten Filter von (M, λ) sind wie folgt charakterisiert (siehe [5]):

1.2.1 Satz: *Ein Filter Φ auf M konvergiert genau dann bezüglich* $\operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a$ *gegen $x \in M$, wenn es ein $a \in A$ und einen Filter Φ_a auf M_a gibt, so dass gilt:*

$$\text{(I)}\ x \in M_a, \quad \text{(II)}\ \Phi_a \in \lambda_a(x), \quad \text{(III)}\ i_a(\Phi_a) = \Phi .$$

Wegen (III) ist Φ_a Basis von Φ in M, mindestens ein Element aus Φ liegt also in M_a! Mit Hilfe dieses Satzes zeigt man (siehe [5]):

1.2.2 Satz: *Der induktive Limes* $\operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a$ *ist genau dann separiert, wenn jede der Limitierungen λ_a separiert ist.*

Wir zeigen weiter, dass die universelle Eigenschaft von $\operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a$ sogar punktweise gilt:

1.2.3 Lemma: *Ist (N, μ) ein Limesraum, so ist eine Abbildung $f: M \to N$ genau dann (λ, μ)-stetig in $x \in M$, wenn die Restriktion f_a von f auf M_a (λ_a, μ)-stetig ist in x für jedes $a \in A$, für welches $x \in M_a$ gilt.*

Beweis: Es sei A' die Menge aller $a \in A$, für welche $x \in M_a$ gilt. f_a sei (λ_a, μ)-stetig in x für jedes $a \in A'$. Zu $\Phi \in \lambda(x)$ gibt es nach (1.2.1) ein $a \in A'$ und einen Filter Φ_a auf M_a mit $\Phi_a \in \lambda_a(x)$, so dass Φ_a Basis von Φ in M ist. Wegen $f(\Phi) = f_a(\Phi_a) \in \mu(f(x))$ ist f stetig in x.

Über die Stetigkeit von Abbildungen mit Werten in induktiven Limites von Limesräumen lässt sich in Verallgemeinerung des entsprechenden Resultats aus [8] folgendes aussagen:

1.2.4 LEMMA: *Gegeben seien* $(M, \lambda) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ *und ein topologischer Raum* (N, τ). *Eine Abbildung* $g: N \to M$ *ist genau dann* (τ, λ)-*stetig in* $x \in N$, *wenn es ein* $a \in A$ *sowie eine Umgebung* U *von* x *in* (N, τ) *gibt, so dass gilt:*

(1) $g(U) \subset M_a$.

(2) *Die durch* g *bestimmte Abbildung* $g_U: U \to M_a$ *ist* (τ_U, λ_a)-*stetig in* $x \in U$; *dabei ist* τ_U *die von* τ *auf* U *induzierte Topologie.*

Beweis: Wenn (1) und (2) erfüllt sind, so ist g (τ, λ)-stetig in x, weil U Umgebung ist von x in (N, τ). Ist umgekehrt g (τ, λ)-stetig in x und $\mathscr{U}_x$ der Umgebungsfilter von x in (N, τ), so gibt es wegen $g(\mathscr{U}_x) \in \lambda(g(x))$ ein $a \in A$ und einen Filter Φ_a auf M_a, so dass $g(x) \in M_a$, $\Phi_a \in \lambda_a(g(x))$ und Φ_a Basis von $g(\mathscr{U}_x)$ in M ist. Für mindestens ein $U \in \mathscr{U}_x$ ist also $g(U) \subset M_a$, und der von $\mathscr{U}_x$ auf U induzierte Filter liefert unter g_U eine Basis von $g(\mathscr{U}_x)$ in M, q.e.d.

In der Kategorie der Limesräume ist die Bildung des induktiven Limes nur vertauschbar mit der Bildung endlicher kartesischer Produkte:

1.2.5 SATZ: $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ *sei eine endliche Familie von Limesräumen, und für jedes* $a \in A$ *sei* $(M_a, \lambda_a) = \operatorname*{ind}_{b_a \in B_a} (M_{b_a}, \lambda_{b_a})$ *ein induktiver Limes. Dann gilt:*

$$\Big(\prod_{a \in A} M_a, \prod_{a \in A} \lambda_a\Big) = \operatorname*{ind}_{b \in B}\Big(\prod_{a \in A} M_{b_a}, \prod_{a \in A} \lambda_{b_a}\Big).$$

Darin ist $B := \prod_{a \in A} B_a$ *und* $b := (b_a)_{a \in A}$.

Beweis: Wir setzen $M := \prod_{a \in A} M_a$, $M_b := \prod_{a \in A} M_{b_a}$, $\lambda := \prod_{a \in A} \lambda_a$ und $\lambda_b := \prod_{a \in A} \lambda_{b_a}$. Auf B definieren wir durch $(b_a) \leqslant (b'_a) :\Leftrightarrow (b_a \leqslant b'_a \; \forall a \in A)$ eine Ordnungsrelation „$\leqslant$". Dann ist $(B, \leqslant)$ gerichtet, und man überlegt sich leicht, dass $\lambda^I := \operatorname*{ind}_{b \in B} \lambda_b$ auf M existiert. Über die universelle Eigenschaft von Produktlimitierungen folgt $\lambda \leqslant \lambda^I$. Man erhält $\lambda^I \leqslant \lambda$, wenn man für beliebiges $x = (x_a) \in M$ einen Produktfilter $\Phi = \prod_{a \in A} \Phi_a \in \lambda(x)$ betrachtet, $\Phi_a \in \lambda_a(x_a) \; \forall a \in A$. Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $b_a \in B_a$ und einen Filter Φ_{b_a} auf M_{b_a}, so dass $x_a \in M_{b_a}$, $\Phi_{b_a} \in \lambda_{b_a}(x_a)$ und Φ_a von Φ_{b_a} erzeugt wird. Es ist $\prod_{a \in A} \Phi_{b_a} \in \lambda_b(x)$ Basis von Φ in M, also $\Phi \in \lambda^I(x)$, weil A endlich vorausgesetzt wurde!

Die Bildung des induktiven Limes ist bei Limesräumen vertauschbar mit der Quotientenbildung:

1.2.6 SATZ: *Gegeben seien* $(M, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ *und eine Äquivalenzrelation* R *in* M. *Für jedes* $a \in A$ *sei* R_a *die von* R *auf* M_a *induzierte Äquivalenzrelation. Sind* μ *bzw.* μ_a *die Quotientenlimitierungen auf* M/R *bzw.* M_a/R_a, *so gilt:*

$$(M/R, \mu) = \operatorname{ind}_{a \in A}(M_a/R_a, \mu_a).$$

Beweis: Die Existenz einer Limitierung $\mu^I = \operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ auf M/R ist trivial. $\mu^I \leqslant \mu$ folgt aus der universellen Eigenschaft von λ, und $\mu \leqslant \mu^I$ folgt aus der universellen Eigenschaft von μ_a für jedes $a \in A$.

Die hier angegebene Definition des induktiven Limes ist nicht die allgemeinste, die möglich ist. Sie reicht für unsere Zwecke jedoch aus. Eine allgemeinere Definition findet man z.B. bei H. R. FISCHER [5].

Wir benötigen noch den Begriff des *projektiven Limes von Limesräumen.* Zu seiner Definition gehen wir wieder aus von einer Familie $((M_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Limesräumen, deren Indexmenge $A(\neq \emptyset)$ durch eine Ordnungsrelation „$\leqslant$" gerichtet ist. Wir verlangen:

(PROJ) *Für jedes* $(a, a') \in A \times A$ *mit* $a \leqslant a'$ *existiert eine* $(\lambda_{a'}, \lambda_a)$*-stetige Abbildung* $h_{aa'}: M_{a'} \to M_a$, *so dass gilt:*
Für $a \leqslant a' \leqslant a''$ *ist* $h_{aa''} = h_{aa'} \circ h_{a'a''}$, $a, a', a'' \in A$. *Für jedes* $a \in A$ *ist* h_{aa} *die Identität von* M_a.

Die Restriktion der natürlichen Projektion $\prod_{a \in A} M_a \to M_a$ auf

$$M := \{(x_a)_{a \in A} \mid x_a \in M_a; \quad x_a = h_{aa'}(x_{a'}) \quad \text{für} \quad a \leqslant a'\}$$

soll h_a heissen. Für $a \leqslant a'$ ist dann $h_a = h_{aa'} \circ h_{a'}$. Die initiale Limitierung λ von $(h_a)_{a \in A}$ auf M heisst der *projektive Limes* von $(\lambda_a)_{a \in A}$, wir wollen ihn mit

$$\lambda = \operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$$

bezeichnen. *In Zukunft soll die Schreibweise*

$$(M, \lambda) = \operatorname{proj}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$$

immer als Abkürzung für den soeben geschilderten Sachverhalt dienen. Wir können zumeist auf eine ausdrückliche Angabe des definierenden Abbildungssystems verzichten. Unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des projektiven Limes ergibt sich:

1.2.7 SATZ: *In* $(M, \lambda) = \operatorname{proj}_{a \in A}(M_a, \lambda_a)$ *ist* λ *identisch mit der von* $(\prod_{a \in A} M_a, \prod_{a \in A} \lambda_a)$ *auf* M *induzierten Limitierung.*

Ist also λ_a separiert für jedes $a \in A$, so ist $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ separiert. Sind alle λ_a Topologien, so ist auch $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ eine Topologie. $\operatorname{proj}_{a \in A} \lambda_a$ ist eine metrisierbare Topologie, wenn A abzählbar ist und alle λ_a metrisierbare Topologien sind.

2. Marinescu-Räume

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung von Begriffen und Aussagen aus der Theorie der Limesvektorräume, die wir später benötigen. Anschliessend betrachten wir induktive und projektive Limites von Limesvektorräumen und führen den Begriff des Marinescu-Raumes ein. Auf dem Tensorprodukt von Limesvektorräumen und speziell von Marinescu-Räumen definieren wir schliesslich projektiv verträgliche Limitierungen und beweisen einige ihrer Eigenschaften.

2.1 *Limesvektorräume*

Unter einem *Vektorraum* (abgekürzt *VR*) soll hier stets ein solcher über dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen verstanden werden. Ein *Limesvektorraum* oder *limitierter Vektorraum* (abgekürzt *LVR*) ist ein Limesraum (E, λ) bestehend aus einem VR E und einer Limitierung λ auf E, so dass die algebraischen Operationen in E stetig sind. Dabei trägt $\mathbf{R}$ seine natürliche Topologie $\tau_{\mathbf{R}}$. Den Nullumgebungsfilter in $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$ bezeichnen wir mit $\mathbf{V}$. Die Limitierung λ des LVR (E, λ) nennen wir *verträglich* oder eine *VR-Limitierung*. λ ist translationsinvariant, durch das Ideal $\lambda(0)$ also bereits bestimmt. *Eine lineare Abbildung von einem LVR in einen anderen ist also genau dann stetig, wenn sie stetig ist im Nullpunkt.*

Die Frage nach der Verträglichkeit von Limitierungen auf Vektorräumen wird durch folgenden Satz beantwortet (s. [5]):

2.1.1 SATZ: *Eine Limitierung λ auf einem VR E ist genau dann eine VR-Limitierung, wenn sie translationsinvariant ist und den folgenden Bedingungen genügt:*

(1) $\lambda(0) + \lambda(0) \subset \lambda(0)$. (2) $r \cdot \lambda(0) \subset \lambda(0) \forall r \in \mathbf{R}$.

(3) $\mathbf{V} \cdot \lambda(0) \subset \lambda(0)$. (4) $\mathbf{V} \cdot x \in \lambda(0) \forall x \in E$.

Insbesondere ist jeder topologische Raum in natürlicher Weise ein LVR. Sind weiter E ein VR, $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ eine LVR-Familie und $(u_a)_{a \in A}$ eine Familie linearer Abbildungen $u_a: E \to E_a$, so ist die initiale Limitierung von $(u_a)_{a \in A}$ auf E eine VR-Limitierung. Das kartesische Produkt einer LVR-Familie ist also ein LVR, jeder lineare Limesunterraum eines LVR ist ein LVR. Ist noch (E, λ) ein LVR und H ein linearer Teilraum von E, so ist auch die Quotientenlimitierung von E/H eine VR-Limitierung. Sie ist sogar eine Topologie, wenn λ eine Topologie ist.

In dieser Arbeit soll für „lokalkonvex“ immer die Abkürzung *lc.* verwendet werden. Ist (E, λ) ein LVR, so gibt es unter allen lc. Topologien auf E, welche gröber sind als λ, eine feinste $\kappa(\lambda)$. Sie heisst die zu λ *assoziierte lokalkonvexe Topologie*. Eine definierende Seminormenfamilie für $\kappa(\lambda)$ bilden z.B. alle für λ stetigen Seminormen von E. Die konvexen Mengen des Filters $\bigcap \{\Phi \in \lambda(0)\}$ bilden eine Nullumgebungsbasis in $(E, \kappa(\lambda))$. Es ist $\kappa(\lambda)$ genau dann separiert, wenn es zu jedem $x \in E$ mit $x \neq 0$ eine konvexe Menge V_x in $\bigcap \{\Phi \in \lambda(0)\}$ gibt, so dass $x \notin V_x$, vgl. auch [6]. Der folgende Satz findet sich in [5]:

2.1.2 SATZ: *Eine lineare Abbildung von einem LVR (E, λ) in einen lc. VR (F, κ_F) ist genau dann (λ, κ_F)-stetig, wenn sie $(\kappa(\lambda), \kappa_F)$-stetig ist.*

Der Operator κ ist vertauschbar mit der Bildung kartesischer Produkte von *endlich* vielen LVR:

2.1.3 SATZ: *Für LVR (E_1, λ_1) und (E_2, λ_2) gilt stets*

$$\kappa(\lambda_1 \times \lambda_2) = \kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2).$$

Beweis: $\kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2) \leqslant \kappa(\lambda_1 \times \lambda_2)$ folgt aus der $(\lambda_1 \times \lambda_2, \lambda_i)$-Stetigkeit der Projektionen $E_1 \times E_2 \to E_i$, $i=1, 2$. Umgekehrt sind die Inklusionsabbildungen $E_i \to E_1 \times E_2$ linear und $(\lambda_i, \lambda_1 \times \lambda_2)$-stetig, also auch $(\kappa(\lambda_i), \kappa(\lambda_1 \times \lambda_2))$-stetig. $\kappa(\lambda_1 \times \lambda_2) \leqslant \kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2)$ ergibt sich, wenn man $(E_1 \times E_2, \kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2))$ identifiziert mit der lc. direkten Summe der $(E_i, \kappa(\lambda_i))$.

Ist (E, λ_E) ein LVR und F ein linearer Teilraum von E, so ist die assoziierte lokalkonvexe Topologie der von λ_E auf F induzierten Limitierung jedenfalls feiner als die von $\kappa(\lambda_E)$ auf F induzierte Topologie. Gleichheit kann aber nicht behauptet werden, vgl. die Bemerkung im Anschluss an (2.2.3). Aus der Separiertheit von $\kappa(\lambda_E)$ folgt aber wenigstens immer die Separiertheit von $\kappa(\lambda_F)$, wobei λ_F die von λ_E induzierte Limitierung ist.

2.2 *Induktiver und projektiver Limes*

Es seien $(A, \leqslant)$ eine gerichtete Halbordnung und $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ eine mit A indizierte LVR-Familie. Für $(a, a') \in A \times A$ und $a \leqslant a'$ sei $(E_a, \lambda_a) \prec (E_{a'}, \lambda_{a'})$. Wir wollen stillschweigend voraussetzen, dass Inklusionen bei Vektorräumen immer linear sein sollen. Dann ist $E := \bigcup_{a \in A} E_a$ in natürlicher Weise ein VR, und $\lambda := \operatorname{ind}_{a \in A} \lambda_a$ ist eine VR-Limitierung von E. Diesen Sachverhalt denken wir uns von nun an immer als gegeben, wenn wir die Schreibweise

$$(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A} (E_a, \lambda_a)$$

für LVR benutzen. – Sind alle λ_a VR-Topologien, so heisst (E, λ) in Anlehnung an G. MARINESCU [11] eine *pseudotopologische Vereinigung* oder kurz ein *PTV-Raum*.

Sind alle λ_a lokalkonvexe Topologien, so nennen wir (E, λ) einen *Marinescu-Raum* und λ eine *Marinescu-Limitierung.*

Nach (1.2.5) ist nur die Bildung des endlichen kartesischen Produktes von LVR vertauschbar mit der Bildung induktiver Limites von LVR. Wir werden aus diesem Grunde in der Kategorie der Marinescu-Räume eine weitere Produktlimitierung einführen. – Nach (1.2.6) ist die Bildung des induktiven Limes von Limesvektorräumen vertauschbar mit der Quotientenbildung nach linearen Unterräumen. Es folgt (vergleiche die Anmerkung im Anschluss an (2.1.1)), dass jeder Quotient eines Marinescu-Raumes (PTV-Raumes) nach einem linearen Teilraum in natürlicher Weise wieder ein Marinescu-Raum (PTV-Raum) ist.

Für einen Marinescu-Raum $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ können wir den *lokalkonvexen induktiven Limes* von $(\kappa_a)_{a \in A}$ auf E bilden, vgl. etwa [3] und [10]. Wir wollen ihn in dieser Arbeit mit

$$\kappa = \operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa_a$$

bezeichnen und für den ganzen Raum entsprechend

$$(E, \kappa) = \operatorname*{cind}_{a \in A} (E_a, \kappa_a)$$

schreiben. Mit Hilfe des Begriffes der assoziierten lokalkonvexen Topologie findet man leicht folgenden Satz (vgl. auch [5], [12]):

2.2.1 Satz: *Ist* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$, *so gilt:*

$$\operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a) = \kappa\big(\operatorname*{ind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a)\big) = \kappa\big(\operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a\big) \leqslant \operatorname*{ind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a) \leqslant \operatorname*{ind}_{a \in A} \lambda_a .$$

Daraus ergibt sich mit (1.2.5) und (2.1.3):

2.2.2 Korollar: *Für* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *und* $(F, \mu) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \mu_b)$ *gilt:*

$$\big(\operatorname*{cind}_{a \in A} \kappa(\lambda_a)\big) \times \big(\operatorname*{cind}_{b \in B} \kappa(\mu_b)\big) = \operatorname*{cind}_{(a,b) \in A \times B} \big(\kappa(\lambda_a) \times \kappa(\mu_b)\big).$$

2.2.3 Satz: *Gegeben seien* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *und ein linearer Teilraum* F *von* E. *Es seien* μ *die von* λ *auf* F *induzierte Limitierung,* μ_a *die von* λ_a *auf* $F_a := F \cap E_a$ *induzierte Limitierung,* $a \in A$. *Dann gilt:*

$$(F, \mu) = \operatorname*{ind}_{a \in A} (F_a, \mu_a).$$

Beweis: Die Existenz von $\operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ und $\mu \leqslant \operatorname{ind}_{a \in A} \mu_a$ sind leicht zu zeigen. Jeder Filter $\Phi \in \mu(0)$ ist Basis eines Filters $\psi \in \lambda(0)$. Zu ψ gibt es ein $a \in A$ und ein ψ_a, Filter auf E_a, welcher Basis von ψ in E ist und $\psi_a \in \lambda_a(0)$ erfüllt. ψ besitzt also eine Basis Φ_a in F_a, und es gilt $\Phi_a \in \mu_a(0)$. Es ist Φ_a Basis von Φ in F.

Dieser Satz gilt offenbar auch, wenn (E, λ) ein induktiver Limes von Limesräumen (E_a, λ_a) ist und man für F eine nichtleere Teilmenge von E nimmt. Dann ist $\mu = \operatorname*{ind}_{a \in A'} \mu_a$, wobei A' die Menge aller $a \in A$ mit $F_a = F \cap E_a \neq \emptyset$ ist.

Für den lc. induktiven Limes ist (2.2.3) nicht mehr richtig. Es gibt Beispiele, bei denen die von $\kappa(\lambda)$ auf F induzierte Topologie echt gröber ist als $\kappa(\mu)$; vgl. G. KOETHE [10], Gegenbeispiel No. 5.

2.2.4 KOROLLAR: *Jeder lineare Limesunterraum eines Marinescu-Raumes (PTV-Raumes) ist ein Marinescu-Raum (PTV-Raum).*

Ist jetzt $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ eine nichtleere Familie von Marinescu-Räumen $(E_a, \lambda_a) = \operatorname*{ind}_{b_a \in B_a}(E_{b_a}, \kappa_{b_a})$ (analog für PTV-Räume), so existiert auf $E := \prod_{a \in A} E_a$ neben der Produktlimitierung $\lambda_L := \prod_{a \in A} \lambda_a$ noch die Marinescu-Limitierung $\lambda_M := \operatorname*{ind}_{b_a \in B} (\prod_{a \in A} \kappa_{b_a})$ mit $B := \prod_{a \in A} B_a$. Trivialerweise gilt $\lambda_L \leq \lambda_M$. Wir beweisen mit (1.2.4):

2.2.5 SATZ: *E, λ_L und λ_M seien wie oben definiert. Ist (G, λ_G) ein Marinescu-Raum, so ist eine lineare Abbildung $u: G \to E$ genau dann (λ_G, λ_L)-stetig, wenn sie (λ_G, λ_M)-stetig ist.*

Beweis: Es genügt, $\lambda_G = \kappa_G$ lokalkonvex vorauszusetzen. Für $a \in A$ sei $\mathrm{pr}_a: E \to E_a$ die kanonische Projektion. Ist u dann (κ_G, λ_L)-stetig, so gibt es nach (1.2.4) zu jedem $a \in A$ ein $b_a \in B_a$, so dass $\mathrm{pr}_a \circ u$ als eine (κ_G, κ_{b_a})-stetige Abbildung $G \to E_{b_a}$ aufgefasst werden kann: Nullumgebungen in topologischen VR sind ja absorbierend. Für ein $(b_a) \in B$ kann also u mit einer $(\kappa_G, \prod_{a \in A} \kappa_{b_a})$-stetigen Abbildung $G \to \prod_{a \in A} E_{b_a}$ identifiziert werden, womit bereits alles gezeigt ist.

Sei jetzt noch A durch eine Ordnungsrelation „$\leq$" gerichtet. Zu jedem $(a, b) \in A \times A$ mit $a \leq b$ sei eine (λ_b, λ_a)-stetige Abbildung h_{ab} von E_b in E_a definiert, so dass $(\tilde{E}, \lambda) = \operatorname*{proj}_{a \in A} (E_a, \lambda_a)$ bezüglich der h_{ab} existiert. $(\tilde{E}, \lambda)$ ist ein LVR, wenn alle h_{ab} linear sind, und das wollen wir immer stillschweigend voraussetzen, wenn wir projektive Limites von LVR bilden. Nach (1.2.7) ist $(\tilde{E}, \lambda)$ linearer Limesunterraum von (E, λ_L). Sei μ die von λ_M auf $\tilde{E}$ induzierte Limitierung. Nach (2.2.4) ist μ eine Marinescu-Limitierung. Sie ist offensichtlich die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen von $\tilde{E}$, welche feiner sind als λ. Aus den allgemeinen Eigenschaften induzierter Limitierungen und (2.2.5) folgt:

2.2.6 KOROLLAR: *Die Kategorie der Marinescu-Räume besitzt projektive Limites.*

Weil wir für Marinescu-Räume stets nur den projektiven Limes in der Kategorie der Marinescu-Räume bilden werden, benutzen wir auch hier die Schreibweise

$$\mu = \operatorname*{proj}_{a \in A} \lambda_a \quad \text{und} \quad (\tilde{E}, \mu) = \operatorname*{proj}_{a \in A} (E_a, \lambda_a).$$

Mit Hilfe von (1.2.4) verallgemeinern wir einige Aussagen aus [8]:

2.2.7 Lemma: *Sind* (E_1, τ_1) *und* (E_2, τ_2) *topologische VR und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \lambda_b)$ *ein induktiver Limes, so ist eine bilineare Abbildung* $u: E_1 \times E_2 \to F$ *genau dann* $(\tau_1 \times \tau_2, \lambda_F)$*-stetig im Nullpunkt, wenn es ein* $b \in B$ *gibt, so dass* $u(E_1 \times E_2) \subset F_b$ *und die von u bestimmte Abbildung* $E_1 \times E_2 \to F_b$ $(\tau_1 \times \tau_2, \lambda_b)$*-stetig ist im Nullpunkt.*

Beweis: Man verwendet (1.2.4) und die Tatsache, dass Nullumgebungen in topologischen VR absorbierend sind.

(2.2.7) gilt natürlich analog auch für lineare Abbildungen. Diese sind aber bereits stetig, wenn sie stetig sind im Nullpunkt. Man erhält folgende Verallgemeinerung des entsprechenden Resultates aus [8]:

2.2.8 Korollar: *Gibt es auf* $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *eine VR-Topologie, welche feiner ist als* λ, *so ist* $E_a = E$ *für mindestens ein* $a \in A$.

Mit (2.2.7) können wir ausserdem beweisen:

2.2.9 Satz: *Eine bilineare Abbildung zwischen Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist genau dann stetig, wenn sie stetig ist im Nullpunkt.*

Beweis: $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \tau_a)$, $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \tau'_b)$ und $(G, \lambda_G) = \operatorname{ind}_{c \in C}(G_c, \tau''_c)$ seien PTV-Räume. Die bilineare Abbildung $u: E \times F \to G$ sei $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig in $(0, 0)$. Dann ist nach (1.2.3) für jedes $(a, b) \in A \times B$ die Restriktion u_{ab} von u auf $E_a \times F_b$ im Nullpunkt $(\tau_a \times \tau'_b, \lambda_G)$-stetig. Für ein gewisses $c \in C$ kann u_{ab} nach (2.2.7) identifiziert werden mit einer im Nullpunkt und damit global $(\tau_a \times \tau'_b, \tau''_c)$-stetigen bilinearen Abbildung $E_a \times F_b \to G_c$. Daraus aber folgt die $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u.

Man kann sogar beweisen, dass bilineare Abbildungen von PTV-Räumen in beliebige LVR genau dann stetig sind, wenn sie im Nullpunkt stetig sind. Ein derartiger Satz wird hier jedoch nich benötigt, weshalb wir auf den Beweis verzichten.

Jeder induktive Limes von Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist ein Marinescu-Raum (PTV-Raum). Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von J. Wloka [12]:

2.2.10 Satz: $(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \lambda_a)$ *sei ein induktiver Limes von PTV-Räumen* $(E_a, \lambda_a) = \operatorname{ind}_{b_a \in B_a}(E_{b_a}, \tau_{b_a})$. *Für jedes* $a \in A$ *sei* $A \cap B_a = \emptyset$, *und für* $a \neq a'$ *sei* $B_a \cap B_{a'} = \emptyset$. *Dann ist auch* (E, λ) *ein PTV-Raum:*

$$(E, \lambda) = \operatorname{ind}_{b \in B}(E_b, \tau_b).$$

Dabei ist $B := \bigcup_{a \in A} B_a$ *durch* $b \leqslant b' :\Leftrightarrow (E_b, \tau_b) \prec (E_{b'}, \tau_{b'})$ *gerichtet.*

Für eine nichtleere LVR-Familie $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ bildet man nach H. R. Fischer [5] folgendermassen eine VR-Limitierung auf der direkten Summe $E := \bigoplus_{a \in A} E_a$: A^* sei die Menge der endlichen Teilmengen von A. Für $A_0 \in A^*$ bilden wir den LVR $(E_{A_0}, \lambda_{A_0}) :=$

$(\prod_{a \in A_0} E_a, \prod_{a \in A_0} \lambda_a)$. Dann ist λ_{A_0} die feinste VR-Limitierung auf E_{A_0}, so dass für jedes $a \in A_0$ die Inklusion $E_a \to E_{A_0}$ stetig ist. Fassen wir die E_{A_0} auf als lineare Teilräume von E, so ist $E = \bigcup_{A_0 \in A^*} E_{A_0}$, und für $A_0, A_1 \in A^*$ folgt $(E_{A_0}, \lambda_{A_0}) \prec (E_{A_1}, \lambda_{A_1})$ aus $A_0 \subset A_1$. Die VR-Limitierung $\lambda = \operatorname{ind}_{A_0 \in A^*} \lambda_{A_0}$ auf E heisst die *direkte Summe* der VR-Limitierungen λ_a und wird mit $\bigoplus_{a \in A} \lambda_a$ bezeichnet.

2.2.11 SATZ: *Eine lineare Abbildung von $(\bigoplus_{a \in A} E_a, \bigoplus_{a \in A} \lambda_a)$ in einen LVR (G, λ_G) ist genau dann $(\oplus\lambda_a, \lambda_G)$-stetig, wenn für jedes $a \in A$ ihre Restriktion auf E_a (λ_a, λ_G)-stetig ist.*

Damit ist λ_a die feinste VR-Limitierung auf $\oplus E_a$, so dass alle Inklusionsabbildungen $E_a \to \oplus E_a$ stetig sind. Für jede LVR-Familie $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ ist also insbesondere die Einbettung $\oplus E_a \to \prod E_a$ eine $(\oplus\lambda_a, \prod \lambda_a)$-stetige Abbildung.

Aus der Konstruktion von $\bigoplus_{a \in A} \lambda_a$ als induktiver Limes ergibt sich eine Reihe von Folgerungen. Zunächst erhält man aus (1.2.2):

2.2.12 KOROLLAR: *$\bigoplus_{a \in A} \lambda_a$ ist genau dann separiert, wenn jede der VR-Limitierungen λ_a separiert ist.*

(2.1.3) und (2.2.1) liefern:

2.2.13 KOROLLAR: *Die lc. Topologie $\kappa(\bigoplus_{a \in A} \lambda_a)$ auf $\bigoplus_{a \in A} E_a$ ist die lc. direkte Summe der lc. Topologien $\kappa(\lambda_a)$.*

Aus (2.2.3) folgt:

2.2.14 KOROLLAR: *In der (nichtleeren) LVR-Familie $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ sei zu jedem $a \in A$ ein linearer Limesunterraum (F_a, μ_a) von (E_a, λ_a) gegeben. $(\oplus F_a, \oplus \mu_a)$ ist linearer Limesunterraum von $(\oplus E_a, \oplus \lambda_a)$.*

Weiter erhalten wir aus (2.2.10):

2.2.15 KOROLLAR: *Für jede (nichtleere) Familie $((E_a, \lambda_a))_{a \in A}$ von Marinescu-Räumen (PTV-Räumen) ist $(\bigoplus_{a \in A} E_a, \bigoplus_{a \in A} \lambda_a)$ ein Marinescu-Raum (PTV-Raum).*

Schliesslich ergibt sich aus (2.2.8):

2.2.16 KOROLLAR: *Gibt es auf $\bigoplus_{a \in A} E_a$ eine VR-Topologie feiner als die Limitierung der direkten Summe $\bigoplus_{a \in A} \lambda_a$, so ist $E_a \neq \{0\}$ nur für höchstens endlich viele $a \in A$ erfüllt.*

Für eine (nichtleere) Familie $((E_a, \tau_a))_{a \in A}$ *topologischer* VR ist also $\bigoplus_{a \in A} \tau_a$ genau dann eine Topologie, wenn $E_a \neq \{0\}$ nur für höchstens endlich viele $a \in A$ erfüllt ist.

Abschliessend beweisen wir:

2.2.17 SATZ: $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a\in A}(E_a, \lambda_a)$ *ist linear homöomorph zu einem limitierten Quotienten der direkten Summe* $(\bigoplus_{a\in A} E_a, \bigoplus_{a\in A} \lambda_a)$ *nach einem linearen Teilraum von* $\bigoplus_{a\in A} E_a$.

Beweis: $i_a: E_a \to E$ und $j_a: E_a \to \oplus E_a$ seien die Inklusionsabbildungen, $a\in A$. Wir definieren $q: \oplus E_a \to E$ durch $q(\sum_{a\in A} j_a(x_a)) := \sum_{a\in A} i_a(x_a)$; dabei sind nur jeweils endlich viele x_a von Null verschieden. q ist linear und surjektiv wegen $E = \bigcup_{a\in A} i_a(E_a)$. Für jedes $a\in A$ ist $q\circ j_a$ (λ_a, λ_E)-stetig, also ist q $(\oplus\lambda_a, \lambda_E)$-stetig. λ_Q sei die Quotientenlimitierung auf $Q := \oplus E_a/q^{-1}(0)$. Zu q gibt es eine wohlbestimmte lineare (λ_Q, λ_E)-stetige Bijektion $r: Q \to E$ mit $q = r\circ p$, wobei $p: \oplus E_a \to Q$ die natürliche Projektion ist. r^{-1} ist (λ_E, λ_Q)-stetig, weil $r^{-1}\circ i_a = p\circ j_a$ für jedes $a\in A$ eine (λ_a, λ_Q)-stetige Abbildung ist.

Nach der Bemerkung am Anfang dieses Abschnittes gilt aber auch die Umkehrung: Jeder Quotient einer direkten Summe von LVR nach einem linearen Teilraum ist unter der Quotientenlimitierung ein induktiver Limes von LVR.

2.3 *Tensorprodukte von Limesvektorräumen und Marinescu-Räumen*

Für Limesvektorräume (E, λ_E) und (F, λ_F) bilden wir auf dem Tensorprodukt $E\otimes F$ die finale Limitierung λ^* der kanonischen bilinearen Abbildung $\varphi: E\times F \to E\otimes F$. Für $z\in\varphi(E\times F)$ wird $\lambda^*(z)$ erzeugt von allen Filtern der Form $\Phi\otimes\psi := \varphi(\Phi\times\psi)$ mit $\Phi\in\lambda_E(x)$, $\psi\in\lambda_F(y)$ und $x\otimes y = z$. Gehört aber $z\in E\otimes F$ nicht zu $\varphi(E\times F)$, so ist $\lambda^*(z) = \{\dot z\}$.

2.3.1 LEMMA: *Das Filterideal* $\lambda^*(0)$ *hat folgende Eigenschaften:*

$$\text{(1)} \quad r\cdot\lambda^*(0) \subset \lambda^*(0)\,\forall\, r\in\mathbf{R}.$$
$$\text{(2)} \quad \mathbf{V}\cdot\lambda^*(0) \subset \lambda^*(0).$$
$$\text{(3)} \quad \mathbf{V}\cdot z\in\lambda^*(0)\,\forall\, z\in\varphi(E\times F).$$

Beweis: Es sei $\Phi^* = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i+\Phi_i)\otimes(y_i+\psi_i)$ mit $\Phi_i\in\lambda_E(0)$, $\psi_i\in\lambda_F(0)$ und $x_i\otimes y_i = 0$, $1\leqslant i\leqslant n$. Für festes i ist dann sicher einer der Vektoren x_i, y_i der Nullvektor. Ist z.B. $x_i = 0$, so ist $r\cdot(\Phi_i\otimes(y_i+\psi_i)) = (r\cdot\Phi_i)\otimes(y_i+\psi_i)\in\lambda^*(0)$, weil $r\cdot\Phi_i\in\lambda_E(0)$, $r\in\mathbf{R}$. Analog ist $\mathbf{V}\cdot(\Phi_i)\otimes(y_i+\psi_i)\in\lambda^*(0)$, weil $\mathbf{V}\cdot\Phi_i\in\lambda_E(0)$. Daraus folgt $r\cdot\Phi^*\in\lambda^*(0)$ für jedes $r\in\mathbf{R}$ und $\mathbf{V}\cdot\Phi^*\in\lambda^*(0)$. Für $z = x\otimes y\in\varphi(E\times F)$ ist schliesslich $\mathbf{V}\cdot z = (\mathbf{V}\cdot x)\otimes y\in\lambda^*(0)$, weil $\mathbf{V}\cdot x\in\lambda_E(0)$.

Wir bilden das System Γ der endlichen Summen von Filtern aus $\lambda^*(0)$ und dann das von Γ erzeugte Filterideal $(\lambda_E\otimes\lambda_F)(0)$ in $E\otimes F$. Dieses enthält den trivialen Ultrafilter $\dot 0$ und erfüllt wieder die Bedingungen (1)–(3) aus (2.3.1). Man kann aber noch (3) ersetzen durch

$$\text{(3')} \qquad \mathbf{V}\cdot z\in(\lambda_E\otimes\lambda_F)(0)\,\forall\, z\in E\otimes F.$$

Es lässt sich ja ein $z \in E \otimes F$ stets schreiben als $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in E$, $y_i \in F$, und es gilt

$$\sum \mathbf{V} \cdot (x_i \otimes y_i) \subset \mathbf{V} \cdot (\sum x_i \otimes y_i) = \mathbf{V} \cdot z .$$

Seien $\Phi = \bigcap_{i=1}^{m} \Phi_i$ und $\psi = \bigcap_{j=1}^{n} \psi_j$ aus $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ mit Φ_i, $\psi_j \in \Gamma$. Dann ist $\Phi_i + \psi_j \in \Gamma$ für jedes Paar (i, j), also

$$\Phi + \psi = \bigcap_{i,j} (\Phi_i + \psi_j) \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0).$$

Definieren wir $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(z) := z + (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ für jedes $z \in E \otimes F$, so erhalten wir nach (2.1.1) eine VR-Limitierung $\lambda_E \otimes \lambda_F$ auf $E \otimes F$. Nach Konstruktion ist $\lambda^*(0) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$; für $z \in E \otimes F$ und $z \notin \varphi(E \times F)$ ist trivialerweise $\lambda^*(z) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$. Sei $z \in \varphi(E \times F)$ und $\Phi \in \lambda^*(z)$ von der Form $\Phi = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + \Phi_i) \otimes (y_i + \psi_i)$ mit $\Phi_i \in \lambda_E(0)$, $\psi_i \in \lambda_F(0)$ und $x_i \otimes y_i = z$. Wir schreiben $\Phi = z + \bigcap_i \Omega_i$ und haben $\Phi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$, weil $\Omega_i := x_i \otimes \psi_i + \Phi_i \otimes y_i + \Phi_i \otimes \psi_i \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$. Daher ist $\lambda^*(z) \subset (\lambda_E \otimes \lambda_F)(z)$ für jedes $z \in E \otimes F$, und wir haben die $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_E \otimes \lambda_F)$-Stetigkeit der Abbildung φ.

Es seien (G, λ_G) ein weiterer LVR, $u: E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung und $\hat{u}: E \otimes F \to G$ ihre assoziierte lineare Abbildung ($\hat{u} \circ \varphi = u$). Ist $\hat{u}$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig, so ist natürlich u $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig. Ist umgekehrt u $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$ und $\Phi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ von der Form $\Phi = \bigcap_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{ij} \otimes \psi_{ij})$ mit $\Phi_{ij} \in \lambda_E(x_{ij})$, $\psi_{ij} \in \lambda_F(y_{ij})$ und $x_{ij} \otimes y_{ij} = 0$, so ist $\hat{u}(\Phi) = \bigcap_i \sum_j u(\Phi_{ij} \times \psi_{ij}) \in \lambda_G(0)$, also ist $\hat{u}$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig.

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

2.3.2 SATZ: *Sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LVR, so gibt es unter allen VR-Limitierungen auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$, für welche die kanonische bilineare Abbildung $\varphi: E \times F \to E \otimes F$ stetig ist, eine feinste. Wir bezeichnen sie mit $\lambda_E \otimes \lambda_F$.*

Das Filterideal $(\lambda_E \otimes \lambda_F)(0)$ wird erzeugt von allen endlichen Summen von Filtern aus $\lambda^*(0)$, wo λ^* die finale Limitierung von φ auf $E \otimes F$ ist.

Ist (G, λ_G) ein beliebiger LVR, so ist eine bilineare Abbildung $u: E \times F \to G$ genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig, wenn ihre assoziierte lineare Abbildung $\hat{u}: E \otimes F \to G$ $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetig ist.

Die Zuordnung $u \mapsto \hat{u}$ vermittelt also einen linearen Isomorphismus des Raumes $\mathscr{L}(E, F; G)$ aller bilinearen $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetigen Abbildungen $E \times F \to G$ auf den Raum $\mathscr{L}(E \otimes F, G)$ aller linearen $(\lambda_E \otimes \lambda_F, \lambda_G)$-stetigen Abbildungen $E \otimes F \to G$.

Es folgt ferner, dass u genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig ist, wenn u diese Eigenschaft in jedem Punkt von $\varphi^{-1}(0)$ besitzt. Ob die globale Stetigkeit von u aber bereits aus der Stetigkeit im Nullpunkt folgt, ist nicht bekannt. Man vergleiche hierzu jedoch (2.2.9) und die daran anschliessende Bemerkung.

In Anlehnung an A. GROTHENDIECK [7] nennen wir $\lambda_E \otimes \lambda_F$ das *projektive Tensorprodukt* der VR-Limitierungen λ_E und λ_F. Folgende Eigenschaften projektiver Tensorprodukte von VR-Limitierungen erhält man unmittelbar aus (2.3.2):

2.3.3 SATZ: *Für LVR $(E, \lambda_E), (F, \lambda_F)$ und (G, λ_G) sind $(E\otimes F, \lambda_E \otimes \lambda_F)$ und $(F\otimes E, \lambda_F\otimes\lambda_E)$ sowie $(E\otimes(F\otimes G), \lambda_E\otimes(\lambda_F\otimes\lambda_G))$ und $((E\otimes F)\otimes G, (\lambda_E\otimes\lambda_F)\otimes\lambda_G)$ in kanonischer Weise linear homöomorph.*

2.3.4 SATZ: *$u_i : E_i \to F_i$ seien lineare (λ_i, μ_i)-stetige Abbildungen zwischen LVR (E_i, λ_i) und (F_i, μ_i), $i=1, 2$. Dann ist ihr Kronecker-Produkt $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ stetig für die projektiven Tensorproduktlimitierungen. $u_1 \otimes u_2$ ist ein linearer Homöomorphismus, wenn dies für u_1 und u_2 gilt.*

2.3.5 SATZ: *Jeder LVR (E, λ_E) ist in kanonischer Weise linear homöomorph zu $(\mathbf{R}\otimes E, \tau_{\mathbf{R}} \otimes \lambda_E)$.*

Beweis: Zu zeigen ist die Homöomorphie des kanonischen Isomorphismus $r\otimes x \mapsto r\cdot x$ von $\mathbf{R}\otimes E$ auf E. Die Stetigkeit ist klar, weil in jedem LVR die Skalarmultiplikation stetig ist. Für $\Phi \in \lambda_E(0)$ ist $\dot{1}\otimes\Phi \in (\tau_{\mathbf{R}}\otimes\lambda_E)(0)$, also ist auch die durch $x \mapsto 1\otimes x$ bestimmte inverse Abbildung von E auf $\mathbf{R}\otimes E$ stetig.

Für LVR (E, λ_E) und (F, λ_F) ist also $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})\otimes\mathscr{L}(F, \mathbf{R})$ auffassbar als linearer Teilraum von $\mathscr{L}(E, F; \mathbf{R})$.

Die Bildung von $\lambda_E\otimes\lambda_F$ ist verträglich mit der Bildung induktiver Limites von Limesvektorräumen:

2.3.6 SATZ: *Für $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a\in A}(E_a, \lambda_a)$ und $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b\in B}(F_b, \lambda'_b)$ existiert $\lambda^{\otimes} = \operatorname{ind}_{(a,b)\in A\times B}(\lambda_a\otimes\lambda'_b)$ auf $E\otimes F$, und es gilt*

$$\lambda^{\otimes} = \lambda_E \otimes \lambda_F .$$

Beweis: Die Existenz von $\lambda^{\otimes}$ folgt aus $E\otimes F = \bigcup_{A\times B}(E_a\otimes F_b)$ und $(E_a\otimes F_b, \lambda_a\otimes\lambda'_b) \prec (E_{a'}\otimes F_{b'}, \lambda_{a'}\otimes\lambda'_{b'})$ für $(a, b)\leqslant(a', b')$. Die Gleichheit $\lambda^{\otimes} = \lambda_E\otimes\lambda_F$ folgt aus der universellen Eigenschaft des induktiven Limes $\lambda^{\otimes}$ einerseits und der universellen Eigenschaft von $\lambda_E\otimes\lambda_F$ andererseits.

Wir zeigen damit, dass die Bildung von $\lambda_E\otimes\lambda_F$ mit der Bildung der direkten Summe bei LVR verträglich ist:

2.3.7 SATZ: *Für beliebige (nichtleere) LVR-Familien $((E_a, \lambda_a))_{a\in A}$ und $((F_b, \mu_b))_{b\in B}$ ist die kanonische Abbildung*

$$\eta : (\bigoplus_A E_a) \otimes (\bigoplus_B F_b) \to \bigoplus_{A\times B} (E_a \otimes F_b)$$

ein linearer $((\oplus\lambda_a)\otimes(\oplus\mu_b), \oplus(\lambda_a\otimes\mu_b))$-Homöomorphismus.

Beweis: Wegen (2.3.6) genügt es, die Behauptung für endliche direkte Summen (endliche kartesische Produkte) zu beweisen. Sei also $A=\{1,\dots,n\}$ und o.B.d.A. $B=\{1\}$. Setze $F:=F_1$ und betrachte die kanonischen Abbildungen $\eta: \prod E_i \otimes F \to \prod (E_i \otimes F)$ und $g: \prod E_i \times F \to \prod (E_i \times F)$. Aus der Stetigkeit von g folgt die Stetigkeit von η. Bezeichnen wir mit $t_i: E_i \to \prod E_i$ die natürlichen Einbettungen, so definiert das System $(t_i \otimes id_F)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ stetiger linearer Abbildungen $E_i \otimes F \to \prod E_i \otimes F$ eindeutig eine stetige lineare Abbildung $\vartheta: \prod (E_i \otimes F) \to \prod E_i \otimes F$. Es ist $\vartheta = \eta^{-1}$.

Für *lokalkonvexe VR* (E, κ_E) und (F, κ_F) hat man auf $E \otimes F$ neben der *projektiven Tensorproduktlimitierung* $\kappa_E \otimes \kappa_F$ noch die von A. Grothendieck in [7] eingeführte *projektive Tensorprodukttopologie*, die wir mit $\kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F$ bezeichnen wollen. Sie ist die feinste lc. Topologie auf $E \otimes F$, so dass $\varphi: E \times F \to E \otimes F$ stetig ist. Für Einzelheiten siehe [7].

Wir wissen nicht, ob $\kappa_E \otimes \kappa_F$ und $\kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F$ identisch sind, vermuten jedoch, dass $\kappa_E \otimes \kappa_F$ i.a. nicht einmal eine Topologie ist. Wir können nur den folgenden Satz beweisen:

2.3.8 Satz: *Für lokalkonvexe VR* (E, κ_E) *und* (F, κ_F) *ist*

$$\kappa(\kappa_E \otimes \kappa_F) = \kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F .$$

Beweis: Aus $\kappa_E \otimes \kappa_F \leqslant \kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F$ folgt $\kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F \leqslant \kappa(\kappa_E \otimes \kappa_F)$. Aus der $(\kappa_E \times \kappa_F, \kappa_E \otimes \kappa_F)$-Stetigkeit von φ folgt die $(\kappa_E \times \kappa_F, \kappa(\kappa_E \otimes \kappa_F))$-Stetigkeit und damit $\kappa(\kappa_E \otimes \kappa_F) \leqslant \kappa_E \underset{c}{\otimes} \kappa_F$.

2.3.9 Satz: *Sind* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ *und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa_b)$ *Marinescu-Räume, so gibt es unter allen Marinescu-Limitierungen auf* $E \otimes F$, *für welche* $\varphi: E \to E \otimes F$ *stetig ist, eine feinste* λ^M.

Für jeden Marinescu-Raum (G, λ_G) *gilt: Eine bilineare Abbildung* $u: E \times F \to G$ *ist genau dann* $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$*-stetig, wenn ihre assoziierte lineare Abbildung* $\hat{u}: E \otimes F \to G$ (λ^M, λ_G)*-stetig ist.*

Beweis: Man zeigt genau wie in (2.3.6), dass $\operatorname{ind}_{A \times B}(\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa'_b)$ auf $E \otimes F$ existiert. Dieser induktive Limes ist gerade unser gesuchtes λ^M, wie aus den universellen Eigenschaften induktiver Limites und projektiver Tensorprodukttopologien sofort folgt.

Für lokalkonvexe VR (G, κ_G) und (H, κ_H) ist die projektive Tensorprodukttopologie $\kappa_G \underset{c}{\otimes} \kappa_H$ nach (2.2.7) sogar die feinste Marinescu-Limitierung auf $G \otimes H$, für welche $G \times H \to G \otimes H$ stetig ist. Wir schreiben aus diesem Grunde für Marinescu-Räume (E, λ_E) und (F, λ_F) für die Limitierung λ^M aus (2.3.9) $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$.

Aus der Konstruktion von $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$ folgt mit (2.2.1) und (2.3.8):

2.3.10 Korollar: *Für Marinescu-Räume* (E, λ_E) *und* (F, λ_F) *besitzen die beiden*

Tensorproduktlimitierungen $\lambda_E \otimes \lambda_F$ *und* $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$ *dieselbe assoziierte lokalkonvexe Topologie.*

Diese ist aber nicht notwendig mit $\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F)$ identisch, siehe unten!

Wenn (E, λ_E) und (F, λ_F) Limesvektorräume mit $E \neq \{0\}$ und $F \neq \{0\}$ sind, so folgt aus der Separiertheit von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ immer die Separiertheit von λ_E und λ_F. Denn ist z.B. λ_E nicht separiert, $\Phi \in \lambda_E(x) \cap \lambda_E(0)$ mit $x \neq 0$ also möglich, so ist $\Phi \otimes \psi \in (\lambda_E \otimes \lambda_F)(0) \cap (\lambda_E \otimes \lambda_F)(x \otimes y)$ für jedes $y \in F$ und jeden Filter $\psi \in \lambda_F(y)$. Also ist auch $\lambda_E \otimes \lambda_F$ nicht separiert. Es ist jedoch eine offene Frage, ob aus der Separiertheit von λ_E und λ_F auch die Separiertheit von $\lambda_E \otimes \lambda_F$ folgt. Allerdings gilt:

2.3.11 SATZ: *Für Marinescu-Räume* (E, λ_E) *und* (F, λ_F) *mit* $E \neq \{0\}$ *und* $F \neq \{0\}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) λ_E *und* λ_F *sind separiert.*

(2) $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F$ *ist separiert.*

(3) $\lambda_E \otimes \lambda_F$ *ist separiert.*

Beweis: (1)$\Leftrightarrow$(2), weil diese Aussagen nach [7] für lc. VR gleichwertig sind und (1.2.2) gilt. (2)$\Rightarrow$(3) folgt wegen $\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F \leqslant \lambda_E \otimes \lambda_F$. Aus der oben gemachten Bemerkung folgt schliesslich: (3)$\Rightarrow$(1).

2.3.12 SATZ: *Es seien* $(E_i, \lambda_i) = \operatorname*{ind}_{a_i \in A_i} (E_{a_i}, \kappa_{a_i})$, $i = 1, 2$, *Marinescu-Räume. Auf* $E_1 \otimes E_2$ *gibt es genau dann eine VR-Topologie feiner als* $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$, *wenn es auf jedem* E_i *eine VR-Topologie feiner als* λ_i *gibt.*

Beweis: Auf $E_1 \otimes E_2$ gibt es genau dann eine VR-Topologie feiner als $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$, wenn $E_{a_1} \otimes E_{a_2} = E_1 \otimes E_2$ für ein $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ erfüllt ist. Das ist jedoch genau dann wahr, wenn $E_{a_1} = E_1$ und $E_{a_2} = E_2$ gilt, wenn es also auf E_1 und E_2 VR-Topologien feiner als λ_1 bzw. λ_2 gibt.

Lässt eine der Marinescu-Limitierungen λ_1, λ_2 also keine feinere VR-Topologie zu, so sind $\lambda_1 \underset{c}{\otimes} \lambda_2$ und $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ keine Topologien.

(E_1, λ_1) und (E_2, λ_2) seien beliebige LVR. Es liegt die Vermutung nahe, dass die zu $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ assoziierte lc. Topologie auf $E_1 \otimes E_2$ gerade $\kappa(\lambda_1) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_2)$ ist. Trivialerweise gilt $\kappa(\lambda_1) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_2) \leqslant \kappa(\lambda_1 \otimes \lambda_2)$, das Gleichheitszeichen ist jedoch schon für Marinescu-Räume falsch. Würde es nämlich gelten, so könnte man folgern, dass für einen lc. VR (F, κ_F) eine bilineare Abbildung $E_1 \times E_2 \to F$ genau dann $(\lambda_1 \times \lambda_2, \kappa_F)$-stetig ist, wenn sie $(\kappa(\lambda_1) \times \kappa(\lambda_2), \kappa_F)$-stetig ist. In (3.2.4) werden wir zeigen, dass diese Aussage für Marinescu-Räume nicht richtig sein muss. In dem dort angegebenen Gegenbeispiel ist übrigens auch $\kappa(\lambda_1 \otimes \lambda_2) \nleqslant \kappa(\lambda_1) \otimes \kappa(\lambda_2)$.

Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen kann man jedoch die Stetigkeit linearer und bilinearer Abbildungen zwischen Marinescu-Räumen vollständig mit Hilfe der assoziierten lc. Topologien zu den vorliegenden Limitierungen ausdrücken. In Anlehnung an die bekannte Terminologie bei lc. Räumen führen wir dazu die folgenden Bezeichnungen ein:

(E, λ_E) sei ein Marinescu-Raum, wobei $\lambda_E = \operatorname{ind}_{n\in\mathbf{N}} \kappa_n$ ein strikter induktiver Limes einer Folge $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von lc. Topologien ist. Sind alle κ_n Fréchet-Topologien oder Normtopologien oder Banach-Topologien, so nennen wir (E, λ_E) einen *LF-Raum*, einen *LN-Raum* oder einen *LB-Raum*. Man beachte aber, dass es sich um Limesvektorräume handelt.

A. GROTHENDIECK beweist in [7], Intr. IV, dass eine lineare Abbildung von einem Fréchet-Raum (E, κ_E) in einen LF-Raum $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{n\in\mathbf{N}}(F_n, \kappa_n)$ genau dann $(\kappa_E, \kappa(\lambda_F))$-stetig ist, wenn es ein $n\in\mathbf{N}$ gibt, so dass $u(E)\subset F_n$ gilt und die durch u bestimmte Abbildung $E\to F_n$ (κ_E, κ_n)-stetig ist. Offenbar genügt es, nur die Metrisierbarkeit der lc. Topologie κ_E zu verlangen. Mit dieser Aussage beweisen wir:

2.3.13 SATZ: *In den Marinescu-Räumen* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a\in A}(E, \kappa_a)$ *und* $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{b\in B}(F_b, \kappa'_b)$ *seien die lc. Topologien* κ_a *und* κ'_b *metrisierbar. Für jeden LF-Raum* $(G, \lambda_G) = \operatorname{ind}_{n\in\mathbf{N}}(G_n, \kappa''_n)$ *gilt:*

Eine bilineare Abbildung $u: E\times F\to G$ *ist genau dann* $(\lambda_E\times\lambda_F, \lambda_G)$*-stetig, wenn sie* $(\lambda_E\times\lambda_F, \kappa(\lambda_G))$*-stetig ist.*

Beweis: Aus der $(\lambda_E\times\lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u folgt natürlich die $(\lambda_E\times\lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit. Für die Umkehrung beachten wir, dass mit κ_a und κ'_b auch $\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa'_b$ metrisierbar ist. Sei also u $(\lambda_E\times\lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-stetig. Dann ist für jedes $(a, b)\in A\times B$ die Restriktion u_{ab} von u auf $E_a\times F_b$ eine $(\kappa_a\times\kappa'_b, \kappa(\lambda_G))$-stetige bilineare Abbildung. Es gibt dann ein $n\in\mathbf{N}$, so dass die zu u_{ab} assoziierte lineare Abbildung $\hat{u}_{ab}$ mit einer $(\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa'_b, \kappa''_n)$-stetigen linearen Abbildung $E_a\otimes F_b\to G_n$ identifiziert werden kann. Daraus folgt die $(\kappa_a\times\kappa'_b, \lambda_G)$-Stetigkeit von u_{ab} für jedes $(a, b)\in A\times B$ und damit die $(\lambda_E\times\lambda_F, \lambda_G)$-Stetigkeit von u.

Speziell gilt (2.3.13) für bilineare Abbildungen zwischen LF-Räumen. Ausserdem gilt sie natürlich analog für lineare Abbildungen. Für solche hat man zusammen mit (2.1.2):

2.3.14 SATZ: *Eine lineare Abbildung von einem Marinescu-Raum* $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a\in A}(E_a, \kappa_a)$ *mit metrisierbaren Topologien* κ_a *in einen LF-Raum* (F, λ_F) *ist genau dann* (λ_E, λ_F)*-stetig, wenn sie* $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$*-stetig ist.*

(2.3.14) gilt insbesondere für lineare Abbildungen zwischen LF-Räumen.

Aus [7] übernehmen wir einen weiteren Satz (§ 1, n° 3, Korollar der Proposition 6):

2.3.15 Satz: *$(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ sei ein Marinescu-Raum, so dass $\kappa(\lambda_E)$ separiert ist. (F, κ_F) sei ein lc. VR. Ist (F, κ_F) normierbar oder A abzählbar und (F, κ_F) ein (DF)-Raum, so gilt:*

$$\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa_F = \operatorname{cind}_{a \in A}(\kappa_a \underset{c}{\otimes} \kappa_F).$$

Die Definition von (DF)-Räumen findet man z.B. in [10]. Wir benötigen hier aber nur, dass für einen LN-Raum (G, λ_G) die assoziierte lokalkonvexe Topologie $\kappa(\lambda_G)$ vom Typ (DF) ist.

2.3.16 Satz: *Für LN-Räume $(E, \lambda_E) = \operatorname{ind}_{i \in \mathbf{N}}(E_i, \kappa_i)$ und $(F, \lambda_F) = \operatorname{ind}_{j \in \mathbf{N}}(F_j, \kappa'_j)$ gilt:*

$$\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F) = \kappa(\lambda_E \otimes \lambda_F).$$

Beweis: Verwendet werden (2.3.15), (2.2.1) und (2.3.10):

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda_E) \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F) &= \operatorname{cind}_{i \in \mathbf{N}}(\kappa_i \underset{c}{\otimes} \kappa(\lambda_F)) = \kappa(\operatorname{ind}_{i \in \mathbf{N}}(\operatorname{cind}_{j \in \mathbf{N}}(\kappa_i \underset{c}{\otimes} \kappa'_j))) = \kappa(\lambda_E \underset{c}{\otimes} \lambda_F) \\ &= \kappa(\lambda_E \otimes \lambda_F).\end{aligned}$$

2.3.17 Korollar: *Sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LN-Räume und (G, κ_G) ein lc. VR, so ist eine bilineare Abbildung $E \times F \to G$ genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa_G)$-stetig, wenn sie $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa_G)$-stetig ist.*

Und zusammen mit (2.3.13) erhalten wir daraus:

2.3.18 Korollar: *Sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LN-Räume und (G, λ_G) ein LF-Raum, so ist eine bilineare Abbildung $E \times F \to G$ genau dann $(\lambda_E \times \lambda_F, \lambda_G)$-stetig, wenn sie $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa(\lambda_G))$-stetig ist.*

(2.3.18) gilt insbesondere für bilineare Abbildungen zwischen LB-Räumen.

Die hier für den Fall von zwei Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) durchgeführte Konstruktion von VR-Limitierungen auf dem Tensorprodukt der vorgelegten Räume kann ohne weiteres auf eine beliebige endliche Familie von Limesvektorräumen (Marinescu-Räumen) übertragen werden. Es gelten dann weiterhin alle Aussagen dieses Abschnittes.

3. Marinescu-Limitierungen auf Räumen stetiger multilinearer Abbildungen

Für separierte lc. VR (E, κ_E) und (F, κ_F) hat H. H. Keller (vgl. [8] und [9]) den Raum $\mathscr{L}^n(E, F)$ aller stetigen n-fach linearen Abbildungen $E^n \to F$ mit einer Marinescu-Limitierung versehen, die gewisse, für die Begründung einer Differentialrechnung wünschenswerte Eigenschaften besitzt. Ohne Schwierigkeiten kann man bei dieser Konstruktion E^n durch ein kartesisches Produkt $\prod_{i=1}^{n} E_i$ beliebiger separierter lc.

VR (E_i, κ_i) ersetzen. Auf dem Raum $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ der stetigen n-fach linearen Abbildungen $\prod E_i \to F$ gibt es stets eine Marinescu-Limitierung mit den gewünschten Eigenschaften.

Sind die E_i nicht normierbar, so ist diese Limitierung keine Topologie, und es gibt auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ auch keine VR-Topologie, welche alle geforderten Eigenschaften hat. Die Begründung einer Differentialrechnung für lc. VR scheint also im Rahmen der lc. VR nicht ohne weiteres möglich zu sein. Die Tatsache, dass man durch ein Ausweichen auf Marinescu-Räume jedoch weiterkommen kann, lässt die Vermutung zu, dass man allgemeiner in der Kategorie der Marinescu-Räume eine Differentialrechnung begründen könnte, wenn es gelänge, für Marinescu-Räume (F, λ_F), (E_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, den Raum $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ der stetigen n-fach linearen Abbildungen $\prod E_i \to F$ mit einer Marinescu-Limitierung zu versehen, welche allen Forderungen aus [9] genügt.

Wir konstruieren diese Limitierung zunächst im Falle $n=1$ und übertragen sie dann mit Hilfe des Tensorproduktes auf Räume stetiger multilinearer Abbildungen.

3.1 *Die Limitierung* Λ^{EF}

Für *beliebige* LVR (E, λ_E) und (F, λ_F) seien $\mathscr{L}(E, F)$ der Raum aller (λ_E, λ_F)-stetigen linearen Abbildungen $E \to F$ und $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ der Raum aller $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$-stetigen linearen Abbildungen $E \to F$. Wegen (2.1.2) ist $\mathscr{L}(E, F)$ immer linearer Teilraum von $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$. Gleichheit hat man z.B. im Falle $E = \mathbf{R}$, weil dann $\mathscr{L}(\mathbf{R}, F)$ aus allen linearen Abbildungen $\mathbf{R} \to F$ besteht. Gilt $\lambda_F = \kappa(\lambda_F)$ oder sind (E, λ_E) und (F, λ_F) LF-Räume, so hat man ebenfalls $\mathscr{L}(E, F) = \hat{\mathscr{L}}(E, F)$, vgl. (2.3.14).

Auf $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ konstruiert man nach [8] wie folgt eine Marinescu-Limitierung, vgl. auch [11]:

Es seien S_E bzw. S_F definierende Seminormenfamilien in $(E, \kappa(\lambda_E))$ bzw. $(F, \kappa(\lambda_F))$, davon S_E gerichtet. Eine lineare Abbildung $u: E \to F$ ist genau dann $(\kappa(\lambda_E), \kappa(\lambda_F))$-stetig, wenn es eine Abbildung $t: S_F \to S_E$ gibt, so dass

$$|u|_{q, t(q)} := \sup \{ |u(x)|_q \mid x \in E, |x|_{t(q)} \leqslant 1 \} < \infty \ \forall q \in S_F .$$

($|x|_{t(q)} := t(q)(x)$, usw.). Mit S_E ist die Menge T aller Abbildungen $S_F \to S_E$ in natürlicher Weise gerichtet. Für jedes $t \in T$ ist

$$\hat{\mathscr{L}}_t(E, F) := \{ u \in \hat{\mathscr{L}}(E, F) \mid |u|_{q, t(q)} < \infty \ \forall q \in S_F \}$$

ein linearer Teilraum von $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$; die $\hat{\mathscr{L}}_t(E, F)$ überdecken $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$. Für $(t, q) \in T \times S_F$ definiert die Zuordnung $u \mapsto |u|_{q, t(q)}$ eine Seminorm s_q in $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$; die Familie $\{ s_q \mid q \in S_F \}$ ist dann definierende Seminormenfamilie für eine lc. Topologie $\mathfrak{k}_t$ von $\hat{\mathscr{L}}_t(E, F)$. Für $t \leqslant t'$ ist noch $(\hat{\mathscr{L}}_t(E, F), \mathfrak{k}_t) \prec (\hat{\mathscr{L}}_{t'}(E, F), \mathfrak{k}_{t'})$, so dass der induktive

Limes

$$\hat{\Lambda}^{EF} := \operatorname*{ind}_{t \in T} \hat{\kappa}_t$$

auf $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ existiert. Die Marinescu-Limitierung $\hat{\Lambda}^{EF}$ ist separiert, wenn $\kappa(\lambda_F)$ separiert ist. Sie wird durch $\kappa(\lambda_E)$ und $\kappa(\lambda_F)$ eindeutig bestimmt und ist nicht etwa abhängig von der speziellen Wahl der definierenden Seminormenfamilien S_E und S_F. Die von $\hat{\Lambda}^{EF}$ auf $\mathscr{L}(E, F)$ induzierte Limitierung bezeichnen wir mit Λ^{EF}. Sie ist nach (2.2.4) ebenfalls eine Marinescu-Limitierung. Aus [8], Satz 9, folgt:

3.1.1 SATZ: *Für LVR (E, λ_E), (F, λ_F) und (G, λ_G) ist die kanonische Abbildung $\pi: \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \to \mathscr{L}(E, G)$ $(\Lambda^{EF} \times \Lambda^{FG}, \Lambda^{EG})$-stetig.*

3.1.2 KOROLLAR: *Es seien (E, λ), (E_1, λ_1) und (E_2, λ_2) LVR, so dass $(E_1, \lambda_1) \prec (E_2, \lambda_2)$. Dann sind die kanonischen Abbildungen $\mathscr{L}(E, E_1) \to \mathscr{L}(E, E_2)$ und $\mathscr{L}(E_2, E) \to \mathscr{L}(E_1, E)$ $(\Lambda^{EE_1}, \Lambda^{EE_2})$-stetig bzw. $(\Lambda^{E_2 E}, \Lambda^{E_1 E})$-stetig.*

Unter einer *Limesalgebra* verstehen wir einen Limesraum (A, λ) bestehend aus einer **R**-Algebra A und einer Limitierung λ auf A, so dass die algebraischen Operationen von A stetig sind.

3.1.3 KOROLLAR: *Für jeden LVR (E, λ_E) ist $(\mathscr{L}(E, E), \Lambda^{EE})$ eine Limesalgebra.*

3.2 *Die Limitierung Δ^{EF}*

In diesem Abschnitt seien $(E, \lambda_E) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$ und $(F, \lambda_F) = \operatorname*{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa'_b)$ Marinescu-Räume. Die Marinescu-Limitierungen $\Lambda^{E_a F_b} (= \hat{\Lambda}^{E_a F_b})$ auf $\mathscr{L}(E_a, F_b)$ $(= \hat{\mathscr{L}}(E_a, F_b))$ bezeichnen wir mit Λ^{ab}. Wir wollen aus den Λ^{ab} in natürlicher Weise eine Marinescu-Limitierung Δ^{EF} auf $\mathscr{L}(E, F)$ konstruieren und zeigen, dass diese nicht mit der Marinescu-Limitierung Λ^{EF} übereinstimmen muss.

Bei festem $a \in A$ ist $\mathscr{L}(E_a, F_b)$ für jedes $b \in B$ identifizierbar mit einem linearen Teilraum von $\mathscr{L}(E_a, F)$. Aus der Bemerkung im Anschluss an (2.2.7) folgt $\mathscr{L}(E_a, F) = \bigcup_{b \in B} \mathscr{L}(E_a, F_b)$. Für $b \leqslant b'$ hat man nach (3.1.2) $(\mathscr{L}(E_a, F_b), \Lambda^{ab}) \prec (\mathscr{L}(E_a, F_{b'}), \Lambda^{ab'})$. Auf $\mathscr{L}(E_a, F)$ gibt es also eine VR-Limitierung Δ^a, so dass

$$(\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a) = \operatorname*{ind}_{b \in B} (\mathscr{L}(E_a, F_b), \Lambda^{ab}).$$

Nach (2.2.10) ist Δ^a eine Marinescu-Limitierung.

Jetzt betrachten wir die Familie $((\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a))_{a \in A}$. Für $a \leqslant a'$ und jedes $b \in B$ hat man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}(E_{a'}, F) & \xrightarrow{\theta_{a a'}} & \mathscr{L}(E_a, F) \\
{\scriptstyle i_b}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j_b} \\
\mathscr{L}(E_{a'}, F_b) & \xrightarrow[\theta^b_{a a'}]{} & \mathscr{L}(E_a, F_b)
\end{array}$$

Darin sind $i_b, j_b, \theta_{aa'}, \theta^b_{aa'}$ die kanonischen Abbildungen. Jedes $\theta^b_{aa'}$ ist $(\Lambda^{a'b}, \Lambda^{ab})$-stetig nach (3.1.2). Aus der universellen Eigenschaft von $\Delta^{a'}$ folgt daher die $(\Delta^{a'}, \Delta^a)$-Stetigkeit von $\theta_{aa'}$. Eine lineare Abbildung $E \to F$ gehört genau dann zu $\mathscr{L}(E, F)$, wenn für jedes $a \in A$ ihre Restriktion auf E_a zu $\mathscr{L}(E_a, F)$ gehört. Für jedes $a \in A$ ist θ_{aa} die Identität von $\mathscr{L}(E_a, F)$, und für $a \leqslant a' \leqslant a''$ gilt stets $\theta_{aa''} = \theta_{aa'} \circ \theta_{a'a''}$. Ausserdem sind alle Abbildungen linear. Auf $\mathscr{L}(E, F)$ existiert also eine VR-Limitierung Δ^{EF}, so dass

$$(\mathscr{L}(E, F), \Delta^{EF}) = \operatorname*{proj}_{a \in A} (\mathscr{L}(E_a, F), \Delta^a)$$

bezüglich der $\theta_{aa'}$ in der Kategorie der Marinescu-Räume gilt, siehe (2.2.6). Sie stimmt mit Λ^{EF} überein, wenn $\lambda_E = \kappa(\lambda_E)$ und $\lambda_F = \kappa(\lambda_F)$ gilt.

3.2.1 SATZ: *Seien (E, κ_E) ein lc. VR und (F, λ_F) ein Marinescu-Raum. Dann gilt für die beiden Marinescu-Limitierungen Λ^{EF} und Δ^{EF} von $\mathscr{L}(E, F)$:*

$$\Lambda^{EF} \leqslant \Delta^{EF}$$

Der Beweis ergibt sich aus (3.1.2) und der universellen Eigenschaft induktiver Limites. Das Gleichheitszeichen muss in (3.2.1) jedoch nicht immer richtig sein:

3.2.2 GEGENBEISPIEL 1: X sei ein lokalkompakter topologischer Raum, nicht kompakt, jedoch abzählbar im Unendlichen. $(Q_n)_{n \in \mathrm{N}}$ sei eine offene Überdeckung von X, so dass $K_n := \bar{Q}_n$ kompakt und echt in Q_{n+1} enthalten ist für jedes $n \in \mathrm{N}$. Der VR aller reellwertigen stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger sei E, der lineare Unterraum aller Funktionen aus E mit Träger in K_n sei E_n. Für jedes $n \in \mathrm{N}$ ist E_n linearer Teilraum von E_{n+1}, ferner ist $E = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} E_n$.

Es ist jedoch $E_n \neq E$ für jedes $n \in \mathrm{N}$. In der Alexandroff'schen Kompaktifizierung X^* von X sind nämlich alle K_n und ${}^cQ_n$ (Komplement von Q_n in X^*) abgeschlossen. Für festes $n \in \mathrm{N}$ sind also insbesondere die disjunkten Mengen $S := K_{n+2} \cap {}^cQ_{n+1}$ und $R := K_n \cup {}^cQ_{n+3}$ abgeschlossen in X^*. Es gibt daher eine stetige Funktion $f^* : X^* \to [0, 1]$, die S und R trennt. Der Träger T^* von f^* liegt in K_{n+3}, ist kompakt und zugleich Träger der Restriktion f von f^* auf X. Es ist also $f \in E$, aber $f \notin E_n$.

κ_u sei die Topologie der uniformen Konvergenz auf E, wir schreiben E_u für (E, κ_u). Die von κ_u auf E_n induzierte Topologie heisse κ_n, $n \in \mathrm{N}$. Den Raum der (κ_u, κ_n)-stetigen linearen Abbildungen $E \to E_n$ nennen wir $\mathscr{L}(E_u, E_n)$, den Raum der (κ_u, λ)-stetigen Endomorphismen von E nennen wir $\mathscr{L}(E_u, E)$. Dabei ist $\lambda := \operatorname*{ind}_{n \in \mathrm{N}} \kappa_n$ keine Topologie auf E. Die Marinescu-Limitierungen $\Lambda^{E_u E}$ bzw. $\Lambda^{E_u E_n}$ auf $\mathscr{L}(E_u, E)$ bzw. $\mathscr{L}(E_u, E_n)$ sind wegen der Normierbarkeit von E_u nach [8] Topologien. Der induktive Limes $\Delta^{E_u E}$ der $\Lambda^{E_u E_n}$ ist aber keine Topologie, denn für jedes $n \in \mathrm{N}$ zeigt man sehr leicht $\mathscr{L}(E_u, E_n) \neq \mathscr{L}(E_u, E)$.

Ein weiteres einfacheres Gegenbeispiel hierzu geben wir im Anschluss an (3.3.8).

3.2.3 SATZ: *Sind* (E, λ_E) *ein Marinescu-Raum und* (F, κ_F) *ein lc. VR, so gilt für die beiden Marinescu-Limitierungen* Λ^{EF} *und* Δ^{EF} *auf* $\mathscr{L}(E, F)$:

$$\Delta^{EF} \leqslant \Lambda^{EF}.$$

Der Beweis ergibt sich diesmal aus der universellen Eigenschaft projektiver Limites und (3.1.2). Aber auch hier ist das Gleichheitszeichen nicht immer richtig. Das folgende Gegenbeispiel zeigt ausserdem, dass man für LVR (E, λ_E), (F, λ_F), (G, λ_G) aus der $(\lambda_E \times \lambda_F, \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit einer bilinearen Abbildung $E \times F \to G$ nicht notwendig auf deren $(\kappa(\lambda_E) \times \kappa(\lambda_F), \kappa(\lambda_G))$-Stetigkeit schliessen kann; vergleiche die Bemerkung im Anschluss an (2.3.12).

3.2.4 GEGENBEISPIEL 2: (E, κ) sei ein separierter lc. VR mit gerichteter definierender Seminormenfamilie S und nicht normierbar. Wir versehen den Raum $E' := \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ mit der Marinescu-Limitierung $\Lambda' := \Lambda^{E\mathbf{R}}$ und können schreiben

$$(E', \Lambda') = \operatorname*{ind}_{s \in S} (E'_s, \kappa'_s),$$

siehe (3.1). Nach [8] ist Λ' keine Topologie, und es gibt auf E' auch keine feinere VR-Topologie. Das Skalarprodukt $w: E \times E' \to \mathbf{R}$ ist eine $(\kappa \times \Lambda', \tau_{\mathbf{R}})$-stetige Bilinearform, und Λ' ist die gröbste unter allen Marinescu-Limitierungen auf E', für welche w stetig ist. Insbesondere ist also w nicht $(\kappa \times \kappa(\Lambda'), \tau_{\mathbf{R}})$-stetig.

Den Raum $E'' := \mathscr{L}(E', \mathbf{R})$ (E' trägt die Limitierung Λ') versehen wir mit den Marinescu-Limitierungen $\Delta := \Delta^{E'\mathbf{R}}$ und $\Lambda'' := \Lambda^{E'\mathbf{R}}$. Um $\Delta \neq \Lambda''$ zu zeigen, konstruieren wir eine lineare Abbildung $E \to E''$, die (κ, Δ)-stetig aber nicht (κ, Λ'')-stetig ist. Wir machen dabei Gebrauch von den Resultaten und der Schreibweise von (3.3). Nach (3.3.9) definiert die Zuordnung $f \mapsto \tilde{f}$ einen linearen Isomorphismus $\mathscr{L}(E, E'') \to \mathscr{L}(E, E'; \mathbf{R})$, dabei trägt E'' die Limitierung Δ, und $\tilde{f}$ ist die aus f entwickelte bilineare Abbildung. Insbesondere gibt es zum $(\kappa \times \Lambda', \tau_{\mathbf{R}})$-stetigen Skalarprodukt w eine (κ, Δ)-stetige lineare Abbildung $v: E \to E''$, so dass $w = \tilde{v}$. Wäre nun $\Delta = \Lambda''$, so wäre v auch (κ, Λ'')-stetig, woraus die $(\kappa \times \kappa(\Lambda'), \tau_{\mathbf{R}})$-Stetigkeit von w nach [8] folgte: Widerspruch!

Ein einfacheres Gegenbeispiel erhält man mit Hilfe der *bornologischen Räume*, vgl. [10]. Es sei $(E, \kappa(\lambda_E))$ ein nicht normierbarer bornologischer Raum, d.h. (E, λ_E) ist darstellbar als induktiver Limes normierbarer Räume: $(E, \lambda_E) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$. Auf $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ ist die Limitierung $\Lambda^{E\mathbf{R}}$ keine Topologie und lässt auch keine feinere VR-Topologie zu. Für jedes $a \in A$ ist jedoch $\Lambda^{E_a\mathbf{R}}$ auf $\mathscr{L}(E_a, \mathbf{R})$ gerade die starke Topologie, wegen (1.2.7) ist also $\Delta^{E\mathbf{R}} = \operatorname*{proj}_{a \in A} \Lambda^{E_a\mathbf{R}}$ eine Topologie auf $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$.

3.2.5 SATZ: *Für Marinescu-Räume* (E, λ_E), (F, λ_F) *und* (G, λ_G) *ist die kanonische Abbildung*

$$\pi: \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \to \mathscr{L}(E, G)$$

$(\Delta^{EF} \times \Delta^{FG}, \Delta^{EG})$*-stetig.*

Beweis: Mit $(E, \lambda_E) = \operatorname*{ind}_{a \in A}(E_a, \kappa_a)$, $(F, \lambda_F) = \operatorname*{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa'_b)$ und $(G, \lambda_G) = \operatorname*{ind}_{c \in C}(G_c, \kappa''_c)$ ergibt sich der Beweis aus (3.1.1) und dem folgenden Diagramm natürlicher Abbildungen, welches für jedes Tripel $(a, b, c) \in A \times B \times C$ kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}(E_a, F_b) \times \mathscr{L}(F_b, G_c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}(E_a, G_c) \arrow[dd] \\
\mathscr{L}(E_a, F_b) \times \mathscr{L}(F_b, G) \arrow[dr] & \\
\mathscr{L}(E_a, F_b) \times \mathscr{L}(F, G) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathscr{L}(E_a, G) \\
\mathscr{L}(E_a, F) \times \mathscr{L}(F, G) \arrow[ur] & \\
\mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{L}(E, G) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

3.2.6 KOROLLAR: *Für jeden Marinescu-Raum (E, λ_E) ist $(\mathscr{L}(E, E), \Delta^{EE})$ eine Limesalgebra.*

3.3 *Evaluation und Limitierung der stetigen Konvergenz*

$(E_i, \lambda_i) = \operatorname*{ind}_{a_i \in A_i}(E_{a_i}, \kappa_{a_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, und $(F, \lambda_F) = \operatorname*{ind}_{b \in B}(F_b, \kappa'_b)$ seien Marinescu-Räume. Die Räume $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ und $\mathscr{L}(\bigotimes_{i=1}^{n} E_i, F)$ sind kanonisch isomorph, wenn man $\otimes E_i$ mit einer der in (2.3) konstruierten VR-Limitierungen $\otimes \lambda_i$ bzw. $\underset{c}{\otimes} \lambda_i$ versieht. *Wir wollen in diesem Abschnitt immer die Marinescu-Limitierung $\underset{c}{\otimes} \lambda_i$ auf $\otimes E_i$ verwenden.*

Für jedes $(a_i) \in \prod A_i$ und jedes $b \in B$ hat man analog die kanonischen Isomorphien $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b) \cong \mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F_b)$ und $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F) \cong \mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F)$, wobei wir $\otimes E_{a_i}$ mit der lc. Topologie $\underset{c}{\otimes} \kappa_{a_i}$ versehen. Die Marinescu-Limitierungen $\Delta^{\otimes E_{a_i} F_b}$, $\Delta^{\otimes E_{a_i} F}$, $\Delta^{\otimes E_i\, F}$ auf $\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F_b)$, $\mathscr{L}(\otimes E_{a_i}, F)$, $\mathscr{L}(\otimes E_i, F)$ bezeichnen wir mit Δ^{ab}, Δ^{a} und Δ. Mit Hilfe der Isomorphismen können wir sie auf $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)$, $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ und $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ übertragen; wir bezeichnen sie dort der Reihe nach wieder mit Δ^{ab}, Δ^{a}, Δ.

Es wäre selbstverständlich möglich, Δ^{ab}, Δ^{a} und Δ auf den Räumen $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F_b)$, $\mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$, $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ nach dem Verfahren von (3.2) direkt zu konstruieren. Man kann dann aber zeigen, dass die oben angegebenen Isomorphismen sogar Homöomorphismen sind. Man vergleiche dazu [8], Satz 8.

Die *Evaluation* von $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ ist die kanonische Abbildung

$$\omega : \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \times \prod_i E_i \to F,$$

$\omega(u, x) := u(x)$. Wir zeigen:

3.3.1 SATZ: *Die Evaluation von* $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *ist* $(\Delta\times\prod_i\lambda_i,\lambda_F)$*-stetig.*

Beweis: ω_a bzw. ω_{ab} seien die Evaluationen von $\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F)$ bzw. $\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F_b)$, $b\in B$, $a=(a_i)\in\prod A_i$. Mit den kanonischen Abbildungen $i_a:\prod E_{a_i}\to\prod E_i$, $i_b:F_b\to F$, $j_b:\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F_b)\to\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n},F)$ und $\theta_a:\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)\to\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F)$ haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)\times\prod E_{a_i} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{L}}\times i_a} & \mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)\times\prod E_i\\
\downarrow{\scriptstyle\theta_a\times\mathrm{id}_\Pi} & & \downarrow{\scriptstyle\omega}\\
\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F)\times\prod E_{a_i} & \xrightarrow{\omega_a} & F\\
\uparrow{\scriptstyle j_b\times\mathrm{id}_\Pi} & & {\scriptstyle i_b}\uparrow\\
\mathscr{L}(E_{a_1},\dots,E_{a_n};F_b)\times\prod E_{a_i} & \xrightarrow{\omega_{ab}} & F_b
\end{array}$$

Nach [8] sind die ω_{ab} $(\Lambda^{ab}\times\prod\kappa_{a_i},\kappa_b')$-stetig. Daraus folgt über die universelle Eigenschaft induktiver Limites und die Stetigkeitseigenschaften projektiver Limites die $(\Delta\times\prod\lambda_i,\lambda_F)$-Stetigkeit von ω.

Mit Hilfe der Evaluation ω von $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ definiert man für eine Menge M und eine Abbildung $f:M\to\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *die aus f entwickelte Abbildung*

$$\tilde{f}:M\times\prod_i E_i\to F$$

durch $\tilde{f}:=\omega\circ(f\times\mathrm{id}_E)$; dabei ist id_E die Identität von $\prod E_i$. Ferner gestattet ω die Einführung der *Limitierung* Λ^c *der stetigen Konvergenz* auf $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ durch folgende Definition (vgl. [4] und [1]):

Für ein $u\in\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *und einen Filter* Φ *auf diesem Raum gilt* $\Phi\in\Lambda^c(u)$ *genau dann, wenn* $\omega(\Phi\times\psi)\in\lambda_F(u(x))$ *für jedes* $x\in\prod E_i$ *und jeden Filter* $\psi\in(\prod\lambda_i)(x)$.

Λ^c *ist die gröbste unter allen Limitierungen* χ *auf* $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$, *für welche die Evaluation* ω $(\chi\times\prod\lambda_i,\lambda_F)$*-stetig ist. Sie ist eine VR-Limitierung und separiert, wenn* λ_F *separiert ist. Ist* (S,λ_S) *ein Limesraum, so ist eine Abbildung* $f:S\to\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *genau dann* (λ_S,Λ^c)*-stetig in* $p\in S$, *wenn für jedes* $x\in\prod E_i$ *gilt:* $\tilde{f}$ *ist* $(\lambda_S\times\prod\lambda_i,\lambda_F)$*-stetig in* (p,x).

Damit lässt sich (3.3.1) jetzt auch so aussprechen:

3.3.2 KOROLLAR: *Auf* $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *ist* Δ *feiner als* Λ^c.

3.3.3 KOROLLAR: *Mit* λ_F *ist auch* Δ *separiert.*

Λ^c und Δ sind jedoch nicht notwendig identisch, wie in [8] für lc. VR gezeigt wurde.

3.3.4 LEMMA: *Es sei* (Z,τ) *ein topologischer VR. Eine lineare Abbildung* $u:Z\to\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ *ist genau dann* (τ,Δ)*-stetig, wenn sie* (τ,Λ^c)*-stetig ist.*

Beweis: Wir setzen $E:=\prod E_i$, $E_a:=\prod E_{a_i}$, $\lambda_E:=\prod\lambda_i$, $\kappa_a:=\prod\kappa_{a_i}$. Wegen $\Lambda^c\leqslant\Delta$ folgt aus der (τ,Δ)-Stetigkeit von u die (τ,Λ^c)-Stetigkeit. Ist umgekehrt u (τ,Λ^c)-

stetig, so ist $\tilde{u}$ $(\tau \times \lambda_E, \lambda_F)$-stetig. Zu jedem $a := (a_i) \in A := \prod A_i$ gibt es daher ein $b \in B$, so dass die Restriktion $(\tilde{u})_a$ von $\tilde{u}$ auf $Z \times E_a$ identifiziert werden kann mit einer $(n+1)$-linearen $(\tau \times \kappa_a, \kappa_b')$-stetigen Abbildung $Z \times E_a \to F_b$. Für (z, x) aus $Z \times E_a$ zeigt man $(\tilde{u})_a\,(z, x) = \omega_a \circ (\theta_a \circ u \times \mathrm{id}_{E_a})\,(z, x)$, dabei ist $\theta_a : \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathscr{L}(E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}; F)$ die kanonische Abbildung. Als Abbildung mit Werten in F_b identifizieren wir $(\theta_a \circ u)$ mit der $(\tau \times \kappa_a, \kappa_b')$-stetigen Abbildung $\omega_{a\,b} \circ (\theta_a \circ u \times \mathrm{id}_{E_a})$. Nach [8], Satz 6 folgt daraus die (τ, Δ^a)-Stetigkeit der $\theta_a \circ u$ und damit die (τ, Δ)-Stetigkeit von u.

Indem wir nun die universelle Eigenschaft induktiver Limites anwenden, erhalten wir aus (3.3.4):

3.3.5 SATZ: *Es sei (Z, λ_Z) ein Marinescu-Raum (PTV-Raum). Für eine lineare Abbildung $u : Z \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *u ist (λ_Z, Δ)-stetig.*

(2) *u ist (λ_Z, Λ^c)-stetig.*

(3) *$\tilde{u} : Z \times \prod E_i \to F$ ist $(\lambda_Z \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$-stetig, $\tilde{u}(z, x) = u(z)\,(x)$.*

3.3.6 KOROLLAR: *Ist eine Marinescu-Limitierung auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ feiner als Λ^c, so ist sie auch feiner als Δ. Unter allen Marinescu-Limitierungen χ auf $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, für welche die Evaluation ω $(\chi \times \prod \lambda_i, \lambda_F)$-stetig ist, ist Δ die gröbste.*

Mit (3.3.5) können wir ausserdem beweisen:

3.3.7 SATZ: *Für jeden Marinescu-Raum (E, λ_E) ist die Abbildung*

$$\gamma : \mathscr{L}(\mathbf{R}, E) \to E,$$

definiert durch $\gamma(u) := u(1)$, ein linearer $(\Delta^{\mathbf{R}E}, \lambda_E)$-Homöomorphismus.

Beweis: γ ist ein Isomorphismus der linearen Strukturen mit $\gamma^{-1}(x)\,(t) = t.x$ für jedes $t \in \mathbf{R}$ und jedes $x \in E$. Wir identifizieren γ mit der Restriktion der Evaluation von $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E) \times \{1\}$ und haben die $(\Delta^{\mathbf{R}E}, \lambda_E)$-Stetigkeit von γ. Die aus γ^{-1} entwickelte Abbildung $\widetilde{\gamma^{-1}} : E \times \mathbf{R} \to E$ liefert gerade die Skalarmultiplikation in E, ist also $(\lambda_E \times \tau_{\mathbf{R}}, \lambda_E)$-stetig. Aus (3.3.5) folgt daher die $(\lambda_E, \Delta^{\mathbf{R}E})$-Stetigkeit von γ^{-1}.

3.3.8 KOROLLAR: *Für einen Marinescu-Raum (E, λ_E) sind die Limitierungen $\Delta^{\mathbf{R}E}$ und $\Lambda^{\mathbf{R}E}$ auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ dann und nur dann gleich, wenn $\lambda_E = \kappa(\lambda_E)$ gilt.*

(3.3.8) enthält das im Anschluss an (3.2.2) angekündigte Gegenbeispiel: Ist der Marinescu-Raum (E, λ_E) nicht lokalkonvex, so gilt auf $\mathscr{L}(\mathbf{R}, E)$ stets $\Lambda^{\mathbf{R}E} < \Delta^{\mathbf{R}E}$.

Es seien jetzt (E, λ_E), (F, λ_F) und (E_i, λ_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, Marinescu-Räume. Wir schreiben anstelle von $(\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F), \Delta)$ kurz $\mathscr{L}_\Delta(E_1, \ldots, E_n; F)$ usw.. Für (λ_E, Δ)-stetige lineare Abbildungen $u : E \to \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ vermittelt dann die Zuordnung $u \mapsto \tilde{u}$ den linearen Isomorphismus

$$\alpha : \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\Delta(E_1, \ldots, E_n; F)) \to \mathscr{L}(E, E_1, \ldots, E_n; F).$$

Nach (3.3.5) ist noch $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\Delta(E_1, \dots, E_n; F)) = \mathscr{L}(E, \mathscr{L}_{\Lambda^c}(E_1, \dots, E_n; F))$. Damit können wir beweisen:

3.3.9 SATZ: *Der kanonische Isomorphismus* α *ist ein* (Δ, Δ)*-Homöomorphismus von* $\mathscr{L}(E, \mathscr{L}_\Delta(E_1, \dots, E_n; F))$ *auf* $\mathscr{L}(E, E_1, \dots, E_n; F)$.

Beweis: Nach [1] ist α ein linearer (Λ^c, Λ^c)-Homöomorphismus. Wegen $\Lambda^c \leqslant \Delta$ ist dann α auch (Δ, Λ^c)-stetig, also (Δ, Δ)-stetig nach (3.3.5). Analog beweist man die (Δ, Δ)-Stetigkeit von α^{-1}.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. BINZ, und H. H. KELLER, *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Ac. Sci. Fennicae, AI, *383* (1966).
[2] N. BOURBAKI, *Topologie générale* (Hermann, Paris 1961 [Act. Sci. Ind., 1142]), ch. I & II.
[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1966 [Act. Sci. Ind., 1189]), ch. I & II.
[4] C. H. COOK, and H. R. FISCHER, *On equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann. *159* (1965), 94–104.
[5] H. R. FISCHER, *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959), 269–301.
[6] A. FRÖHLICHER, and W. BUCHER, *Calculus in vector spaces without norm*, Lecture Notes in Math. *30* (1966).
[7] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Am. Math. Soc. *16* (1955).
[8] H. H. KELLER, *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Ann. *159*, 259–270 (1965).
[9] H. H. KELLER, *Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten*, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1966).
[10] G. KOETHE, *Topologische lineare Räume I*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1966 [Grundlehren der math. Wiss., *107*]).
[11] G. MARINESCU, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions* (VEB, Deutscher Verl. der Wiss., Berlin 1963).
[12] J. WLOKA, *Limesräume und Distributionen*. Math. Ann. *152*, (1963), 351–409.

Eingegangen den 29. Januar 1968