Über eine Klasse von Polyederfunktionalen.

Über eine Klasse von Polyederfunktionalen

PETER SCHERK

Ein *konvexes Polyeder* im k-dimensionalen euklidischen Raume E^k ist die konvexe Hülle einer endlichen nicht leeren Punktmenge. Ein *Polyeder* ist die Vereinigungsmenge von endlich vielen konvexen Polyedern gleicher Dimension in E^k. Diese Dimension heißt die Dimension des Polyeders. Bezeichne

$$\Pi^k = \{A, B, \ldots\}$$

die Menge der Polyeder in E^k.

Ein *Polyederfunktional* φ ordnet jedem $A \in \Pi^k$ eine reelle Zahl $\varphi(A)$ zu. Wir nennen φ *bewegungsinvariant*, wenn $\varphi(A) = \varphi(B)$, falls A und B kongruent sind. Gilt

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle A, B in Π^k mit

$$\dim A = \dim B = 1 + \dim(A \cap B),$$

so nennen wir φ *additiv*; vgl. jedoch **(1**, S. 36**)**. Schließlich nennen wir φ *homogen* vom Grade m, wenn

$$\varphi(\lambda A) = \lambda^m \varphi(A) \qquad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } A \in \Pi^k.$$

Hier entsteht λA aus A durch eine Streckung am Ursprung im Verhältnis $1:\lambda$.

Die Polyederfunktionale in Π^k, die bewegungsinvariant, additiv und homogen vom Grade m sind, bilden einen Vektorraum Φ_m^k, dessen Nullvektor das Funktional 0 ist, welches jedes Polyeder auf die Zahl 0 abbildet. Bezeichne $\Phi_{m\,h}^k$ den Unterraum aller $\varphi \in \Phi_m^k$, für die $\varphi(A) = 0$, wenn $\dim A < h$. Wir beweisen

SATZ I:

$$\dim \Phi_m^k = \begin{cases} 0 & m \notin \{0, 1, \ldots, k\} \\ 1 \quad \textit{für} & m \in \{0, k-1, k\}; \quad \text{vgl. } (\mathbf{1}, \text{S. } 79) \\ \infty & m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}; \quad \text{vgl. } (\mathbf{1}, \text{S. } 50). \end{cases}$$

In der obersten Zeile braucht m nicht ganz zu sein.

Wegen Satz I können wir die Untersuchung der Vektorräume Φ_m^k auf die Fälle

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\} \tag{1}$$

beschränken. Aus ihm folgt

$$\{0\} = \Phi_{m,\,k+1}^k \subset \Phi_{m\,k}^k \subset \cdots \subset \Phi_{m,\,m+1}^k \subset \Phi_{m\,m}^k = \Phi_m^k. \tag{2}$$

Hadwiger bewies **(1**.66**)**, – und wir werden einen zweiten Beweis dieses Satzes vorschlagen, –

SATZ II: $\Phi^k_{m\,k} = \{0\}$ *für* $m \equiv k-1 \pmod 2,\ 1 \leqslant m \leqslant k-2$.

Wegen Satz II kann man (2) leicht verschärfen zu

$$\Phi^k_m \supset \Phi^k_{m,m+1} = \Phi^k_{m,m+2} \supset \Phi^k_{m,m+3} = \Phi^k_{m,m+4} \supset \cdots, \tag{3}$$

wo jedes zweite Mal das Gleichheitszeichen steht. Es erhebt sich somit die Frage nach der Struktur des Diagramms

$$\begin{array}{rcccccccccl}
 & & & & & & \Phi^{m+2}_{m,m+2} & = & \Phi^{m+2}_{m,m+1} & \vdots & \subset \Phi^{m+2}_{m\,m} \\
 & & & & \{0\} & = & \Phi^{m+3}_{m,m+3} \subset \Phi^{m+3}_{m,m+2} & = & \Phi^{m+3}_{m,m+1} & \vdots & \subset \Phi^{m+3}_{m\,m} \\
 & & \Phi^{m+4}_{m,m+4} & = & \Phi^{m+4}_{m,m+3} & \subset & \Phi^{m+4}_{m,m+2} & = & \Phi^{m+4}_{m,m+1} & \vdots & \subset \Phi^{m+4}_{m\,m} \\
\{0\} = \Phi^{m+5}_{m,m+5} & \subset & \Phi^{m+5}_{m,m+4} & = & \Phi^{m+5}_{m,m+3} & \subset & \Phi^{m+5}_{m,m+2} & = & \Phi^{m+5}_{m,m+1} & \vdots & \subset \Phi^{m+5}_{m\,m}
\end{array}$$

Man zeigt leicht

SATZ III: $$\dim(\Phi^k_m/\Phi^k_{m,m+1}) = 1 \quad \textit{für } k > m+1.$$

Wir ordnen jetzt jedem Polyederfunktional φ *in* E^k *das Funktional*

$$L\varphi = \varphi|_{E^{k-1}}$$

zu. Dann zeigt man

SATZ IV: *Sei* $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gilt*

(i) $$\Phi^k_{m,k-h} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-h} \qquad \textit{für } k \equiv m+1 \pmod 2$$

(ii) $$\Phi^k_{m,k-h}/\Phi^k_{mk} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-h} \qquad \textit{für } k \equiv m \quad \pmod 2.$$

KOROLLAR V: *Sei h gerade;* $2 \leqslant h \leqslant k-m-2$. *Dann ist*

$$\Phi^k_{m,m+h}/\Phi^k_{m,m+h+2} \simeq \Phi^{m+h}_{m,m+h}. \tag{4}$$

Insbesondere hat der Quotientenraum (4) *unendliche Dimension.*

1. Zylinder in E^k

Der Beweis von Satz I benutzt im wesentlichen Ideen, die bereits in **(1)** dargestellt sind. Wir skizzieren daher nur die Schritte.

Hier und im folgenden bezeichne I^h den h-dimensionalen Einheitswürfel; $h = 1, 2, \ldots, k$. Überdies sei I^0 ein Punkt. Man bestätigt leicht

LEMMA 1.1: *Sei* φ *ein additives bewegungsinvariantes Funktional. Sei r eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\varphi(rI^h) = r^h\varphi(I^h) - \binom{h}{1}(r-1)\,r^{h-1}\varphi(I^{h-1})$$
$$+\binom{h}{2}(r-1)^2\,r^{h-2}\varphi(I^{h-2}) \mp \cdots + (-1)^h(r-1)^h\varphi(I^0).$$

Aus Lemma 1.1 folgt unmittelbar

KOROLLAR 1.2: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Sei* $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ *oder* $\varphi(I^k) = 0$. *Dann gilt*

$$\varphi(I^h) = 0 \quad \textit{für } h = 0, 1, \ldots, k.$$

Mit Hilfe dieses Korollars und unter Benutzung der Additivität von φ beweist man

LEMMA 1.3: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes rechtwinklige Parallelotop* A.

Schließlich folgt aus Lemma 1.3 mittels einer Routinekonstruktion

LEMMA 1.4: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes Parallelotop* A.

Die Definition der h-Zylinder findet sich in (**1**; S. 19). Bezeichne Z_h^k die Klasse der h-Zylinder in E^k, also

$$Z_k^k \subset Z_{k-1}^k \subset \cdots \subset Z_2^k \subset Z_1^k = \Pi^k,$$

Da jedes Dreieck sich durch ein kongruentes zu einem Parallelogramm ergänzen läßt, folgt aus Lemma 1.4 sofort

LEMMA 1.5: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(Z_{k-1}^k) = 0$.

Mittels der Hadwigerschen Simplotope (**1**; 17) zeigt man

LEMMA 1.6: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Gilt*

$$\varphi(Z_{h-1}^{k-1}) = \varphi(Z_{h+1}^k) = 0$$

und ist $h \neq m$, *so gilt* $\varphi(Z_h^k) = 0$. [*für* $h = 1$ *setzen wir* $Z_0^{k-1} = \Pi^{k-1}$].

BEMERKUNG 1.7: Aus den beiden letzten Lemmas folgt, daß $\varphi(\Pi^k) = 0$, wenn $\varphi \in \Phi_m^k$ und entweder (i) $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ oder (ii) $m \in \{0, k-1, k\}$ und $\varphi(I^k) = 0$. Hieraus und aus der Existenz von Volumen und Oberfläche ergeben sich sofort die beiden ersten Teile von Satz I. Die Fälle $m = k-1$ und $m = k$ finden sich bereits in (**1**, S. 79). Für $m = k$ setzt Hadwiger statt der Bewegungsinvarianz sogar nur die Translationsinvarianz voraus.

Für den Rest dieser Arbeit dürfen wir voraussetzen, daß

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}.$$

2. Abschluß des Beweises von Satz I

LEMMA 2.1: $\dim \Phi_{mk}^k = \infty$ *für* $m \equiv k \pmod 2$.

Beweis: (**1**, S. 50).

Wir benutzen hier und später die folgende *Konvention*: Ist $A \in \Pi^k$, so durchläuft A_i^h die h-dimensionalen Seiten von A.

LEMMA 2.2: $\dim \Phi_{m,k-1}^k = \infty$ *für* $m \equiv k+1 \pmod 2$.

Der Beweis benutzt ein Argument, das wir später verallgemeinern werden. Jedem

$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-1}$ ordnen wir mittels

$$\varphi(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum \psi(A_i^{k-1}) & \text{für} \quad \dim A = k \\ \psi_{(A)} & \phantom{\text{für}} \quad \dim A < k \end{cases}$$

ein Funktional φ in Π^k zu. Offensichtlich ist φ bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Da $\psi(A)=0$ für $\dim A<k-1$, gilt das gleiche für φ. Hieraus folgt leicht die Additivität von φ. Somit ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Da die Abbildung $\psi \to \varphi$ eineindeutig ist, ergibt sich hieraus unsere Behauptung.

Mit den Lemmas 2.1 und 2.2 ist Satz I bewiesen.

3. Über einen zweiten Beweis von Satz II

Die Ortsvektoren $a_1, \ldots, a_k$ seien linear unabhängig. Sei

$$B_t = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \mid \sum \lambda_i \leqslant t; \quad 0 \leqslant \lambda_h \leqslant 1 \text{ für alle } h \right\}; \qquad t = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.1}$$

Dann ist also

$$B_1 = S^k = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \mid \sum \lambda_i \leqslant 1; \quad \lambda_h \geqslant 0 \text{ für alle } h \right\} \tag{3.2}$$

ein k-Simplex, und B_k ist ein Parallelotop. Man bestätigt sofort, daß

$$B_t \cup \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) = B_k$$

und

$$\dim \left[B_t \cap \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) \right] \leqslant k - 1 .$$

Nehmen wir also das von Satz II unabhängige Lemma 4.5 vorweg, so folgt aus Lemma 1.4

LEMMA 3.1: *Sei $\varphi \in \Phi^k_{mk}$. Dann gilt*

$$\varphi(B_t) + \varphi(B_{k-t}) = \varphi(B_k) = 0; \qquad t = 1, 2, \ldots, k-1 .$$

Man bestätigt unschwer

LEMMA 3.2: *Sei $1 \leqslant t \leqslant k$. Dann ist*

$$t S^k = \bigcup_{h=0}^{t-1} \bigcup_{\Sigma p_i = h} \left(\sum_1^k p_i a_i + B_{t-h} \right),$$

wo die p_i die nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen.

Aus Lemma 3.2 folgt unmittelbar

KOROLLAR 3.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{mk}$. Dann gilt

$$t^m \varphi(S^k) = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \varphi(B_{t-h}); \qquad t = 1, 2, \dots, k.$$

Wir geben an ohne Beweis

LEMMA 3.4: *Sei* $k \geq m+3, k \equiv m+1$ (mod 2). *Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem*

$$\left.\begin{aligned} t^m \xi_1 &= \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \xi_{t-h}; \qquad && t = 2, 3, \dots, k \\ \xi_t + \xi_{k-t} &= 0; && t = 1, 2, \dots, \left[\frac{k}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

nur die triviale Lösung.

BEMERKUNG: Aus Lemmas 2.1. und 3.3 folgt, daß (3.3) nichttriviale Lösungen hat, wenn $k \geq m+3$, $k \equiv m$ (mod 2).

Sei jetzt $\varphi \in \Phi^k_{m,k}$, $m \equiv k-1$ (mod 2), $k > m+1$. Dann folgt aus Lemma 3.1, Korollar 3.3 und Lemma 3.4, daß $\varphi(S^k) = 0$; vgl. (3.2). Da S^k ein beliebiger k-dimensionaler Simplex sein kann, ist $\varphi(A) = 0$ für beliebige konvexe Polyeder A der Dimension k, somit auch für alle Polyeder. Hiermit ist Satz II auf Lemma 3.4 zurückgeführt.

KOROLLAR 3.5: *Formel* (3) *der Einleitung.*

Beweis: Sei h ungerade, $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$; $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$. *Wenden wir Satz* I *für* $h = 1 =$ *und Satz* II *für* $h > 1$ *an, so erhalten wir*

$$\varphi|_{E^{m+h}} \in \Phi^{m+h}_{m,m+h} = \{0\}.$$

Somit ist

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h+1}.$$

4. Eine Kennzeichnung der Vektorräume Φ^k_{mh}

Offensichtlich gilt

LEMMA 4.1: *Sei* φ *additiv und bewegungsinvariant,* $\varphi(Z^k_h) = 0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{k-1}_{h-1}) = 0$.

KOROLLAR 4.2: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leqslant k-m$ *gelte* $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{m+h}_m) = 0$.

LEMMA 4.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leqslant m$ *sei* $\varphi(Z^k_h) = 0$. *Dann ist* $\varphi = 0$.

Der Beweis benutzt doppelte Induktion nach k und h. Nach Lemma 4.1 ist $\varphi(Z^{k-1}_{h-1}) = 0$. Aus der Induktionsannahme für k bzw. aus Bemerkung 1.7 folgt daher, daß $\varphi(\Pi^{k-1}) = 0$. Jetzt leistet Lemma 1.6 den Induktionsschritt von $h-1$ nach h.

Aus Korollar 4.2 und Lemma 4.3 erhalten wir

LEMMA 4.4: *Sei* $h \leqslant k-m$. *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$, $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. *Dann ist* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h+1}$.

Wir besprechen jetzt eine Umkehrung von Lemma 4.4. Zunächst der Fall $h = 1$.

LEMMA 4.5: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+1}$. *Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-1})=0$.

Beweis: Voraussetzungsgemäß ist $\varphi(I^h)=0$ für $h=0, 1, \ldots, m$. Aus Lemma 1.1 folgt, daß $\varphi(I^h)$ auch für $h=m+1, \ldots, k$ verschwindet. Lemma 1.5 ergibt dann die Behauptung.

LEMMA 4.6: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$, *wo* $h \leqslant k-m$ *und ungerade. Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-h})=0$.

Beweis: Nach Lemma 4.5 ist diese Behauptung richtig für $h=1$. Sie sei bis $h-2$ bewiesen. Sei h jetzt fest. Ist $k=m+h$, so folgt die Behauptung aus Satz II. Die Induktion nach k wird durch zweimalige Anwendung von Lemma 1.6 ausgeführt.

Wir fassen Lemmas 4.4. und 4.6 zusammen.

SATZ 4.7: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Sei* $h \leqslant k-m$ *und ungerade; vgl.* (3). *Dann gilt*

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h} \Leftrightarrow \varphi(Z^k_{k-h}) = 0.$$

KOROLLAR 4.8: $\Phi^k_{m,m+1} = \{\varphi \in \Phi^k_m \mid \varphi(I^k)=0\}$.

Beweis: vgl. Lemma 1.5.

5. Der Kern von L

Sei $0<h<k-m$. Wir definierten den Homomorphismus

$$\mathrm{L}: \Phi^k_{m,m+h} \to \Phi^{k-1}_{m,m+h},$$

indem wir jedem $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$ das Funktional

$$\mathrm{L}\varphi = \varphi|_{E^{k-1}} \in \Phi^{k-1}_{m,m+h}$$

zuordneten. Wir bestätigen zunächst einen Sonderfall von Satz IV.

LEMMA 5.1: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k>m+1$. *Dann gilt*

$$\Phi^k_{m,k-1} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-1}.$$

Beweis: Für jedes $\psi \in \Phi^k_{m,k-1}$ definieren wir $L^{-1}\psi$ mittels

$$(L^{-1}\psi)(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum \psi(A^{k-1}_i) \\ \psi(A) \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \dim A = k; \\ \dim A < k. \end{matrix} \tag{5.1}$$

Dann folgt aus dem Beweis von Lemma 2.2, daß L^{-1} ein Monomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ in $\Phi^k_{m,k-1}$ ist. Offensichtlich ist $LL^{-1}\psi=\psi$.

Ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$, so ist durch

$$\chi(A) = \begin{cases} \varphi(A) - \frac{1}{2}\sum \varphi(A^{k-1}_i) \\ 0 \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \dim A = k \\ \dim A < k \end{matrix}$$

ein Funktional $\chi \in \Phi^k_{m,k}$ definiert. Nach Satz II ist $\chi=0$. Somit ist $\varphi = L^{-1}L\varphi$, und L^{-1} ist ein Isomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ auf $\Phi^k_{m,k-1}$ mit der Inversen L.

Korollar 5.2: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k>m+1$, $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. *Dann gilt*

$$\varphi(A) = \tfrac{1}{2} \sum \varphi(A_i^{k-1}) \quad \textit{für} \dim A = k\,.$$

Lemma 5.3: *Sei* $k>m+1$. *Dann gilt*

$$\ker L = \begin{cases} 0 & \\ \Phi^k_{m\,k} & \end{cases} \textit{für} \quad \begin{matrix} k \equiv m+1 \pmod 2 \\ k \equiv m \quad\quad \pmod 2\,. \end{matrix}$$

Beweis: Sei

$$\varphi \in \Phi^k_{m,\,m+h}\,, \qquad L\varphi = 0\,.$$

Dann ist insbesondere $\varphi(Z_m^{k-1})=0$.

Ist h ungerade, so ist nach Satz 4.7 $\varphi(Z^k_{k-h})=0$. Ist h gerade, so folgt aus (3) und Satz 4.7, daß wenigstens $\varphi(Z^k_{k-h+1})=0$. In beiden Fällen erhalten wir mittels wiederholter Anwendung von Lemma 1.6, daß

$$0 = \varphi(Z^k_{k-h+1}) = \varphi(Z^k_{k-h}) = \cdots = \varphi(Z^k_{m+1})\,.$$

Nach Satz 4.7 ist daher $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Unsere Behauptung ergibt sich somit für $k \equiv m+1 \pmod 2$ aus Lemma 5.1 und für $k \equiv m \pmod 2$ aus Satz II mit $k-1$ statt k und aus (3).

6. Die Quermassintegrale

Bezeichne Π'^k die Menge der konvexen Polyeder in E^k. Ferner bezeichne Φ'^k_m bzw. $\Phi'^k_{m\,h}$ den Vektorraum der auf Π'^k definierten additiven bewegungsinvarianten Funktionale, die homogen vom Grade m sind, [und die für jedes $A \in \Pi'^k$ mit $\dim A < h$ verschwinden].

Lemma 6.1: *Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_m$ [*Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_{m\,h}$], *so gibt es ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_m$ [*ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_{m\,h}$], *so daß* $\varphi/_{\Pi'^k} = \varphi'$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus einer Konstruktion von Volland; vgl. **(2)**.

Beweis von Satz III. Liegen φ und ψ in $\Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,\,m+1}$, so sind $\varphi(I^k)$ und $\psi(I^k)$ von 0 verschieden. Ferner ist

$$\chi = \psi(I^k)\cdot\varphi - \varphi(I^k)\cdot\psi \in \Phi^k_m\,.$$

Wegen $\chi(I^k)=0$ ist $\chi \in \Phi^k_{m,\,m+1}$; vgl. Korollar 4.8. Somit ist

$$\dim(\Phi^k_m / \Phi^k_{m,\,m+1}) \leqslant 1\,.$$

Das $(k-m)$-te Quermassintegral φ'^k_m liegt in Φ'^k_m. Nach Lemma 6.1 läßt es sich auf genau eine Weise zu einem Funktional $\varphi^k_m \in \Phi^k_m$ erweitern. Wegen

$$\varphi^k_m(I^k) = \varphi'^k_m(I^k) \neq 0$$

ist

$$\varphi^k_m \in \Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,\,m+1}\,.$$

Hiermit ist Satz III bewiesen.

Definitionsgemäß ist $\varphi^h_h(A^h_i)$ das h-dimensionale Volumen von A^h_i.

Sei $A \in \Pi'^k$; $\dim A > h$. Wir legen durch einen relativ inneren Punkt p von A_i^h das $(k-h)$-flach E^{k-h} senkrecht zu A_i^h; also $E^{k-h} \cap A \in \Pi'^{k-h}$. Die Strahlen von p nach den Punkten von $(E^{k-h} \cap A) \setminus \{p\}$ bilden einen konvexen Kegel. Wir konstruieren den in E^{k-h} zu diesem polaren Kegel und schneiden letzteren mit dem Einheitsball um p. Bezeichne $\lambda_{hi}^k(A)$ das Volumen dieses $(k-h)$-dimensionalen Durchschnittes. Indem wir φ_h^k umnormieren, nämlich mit $\binom{k}{h}$ multiplizieren, können wir dann wegen der Steinerschen Formel (**1**; S. 214) setzen

$$\varphi_h^k(A) = \sum_i \lambda_{hi}^k(A) \cdot \varphi_h^h(A_i^h); \qquad h = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6.1}$$

Wir beachten, daß

$$\lambda_{k-1,i}^k(A) = 1 \qquad \text{für } \dim A = k. \tag{6.2}$$

Im folgenden bezeichne ω_h das Volumen des h-dimensionalen Einheitsballes. Man bestätigt leicht

LEMMA 6.2: *Sei $A \in \Pi'^{k-1}$; $1 \leqslant h \leqslant \dim A$. Dann gilt*

$$\lambda_{hi}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \lambda_{hi}^{k-1}(A).$$

Ist $\dim A = h+1$, *so folgt wegen* $\omega_1 = 2$ *aus Lemma* 6.2 *und Formel* (6.2), *daß*

$$\lambda_{hi}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \frac{\omega_{k-h-1}}{\omega_{k-h-2}} \cdots \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \lambda_{hi}^{h+1}(A) = \tfrac{1}{2}\,\omega_{k-h}. \tag{6.3}$$

Lemma 6.3: *Sei $m < h < k$, sei $\psi \in \Phi_{mh}^h$. Für alle $A \in \Pi'^k$ setzen wir*

$$\varphi'(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{k-h}} \displaystyle\sum_i \lambda_{hi}^k(A)\, \psi(A_i^h) & \text{für } \dim A > h \\ \psi(A) & \text{für } \dim A \leqslant h. \end{cases} \tag{6.4}$$

Dann ist durch (6.4) *gemäß Lemma* 6.1 *ein Funktional $\varphi \in \Phi_{mh}^h$ definiert.*

Beweis: Mit ψ ist φ' bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Es bleibt die Additivität von φ' nachzuprüfen.

Sei

$$\{A, B, C\} \subset \Pi'^k,\ A \cup B = C,\ A \cap B = D,$$
$$\dim A = \dim B = 1 + \dim D.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\varphi'(A) + \varphi'(B) - \varphi'(C) - \varphi'(D) = 0. \tag{6.5}$$

Für $\dim A \leqslant h$ ist die Additivität von φ' trivial. Sei zunächst $\dim A > h+1$.

(i) Kommt eine Seite C_i^h etwa nur als Seite von A vor, so haben C_i^h und das entsprechende A_i^h den gleichen Koeffizienten λ_{hi}^k.

(ii) Sei $C_i^h = A_i^h \cup B_i^h$, $\dim(C_i^h \cap D) < h$. Dann ist wegen $\psi|_{E^{h-1}} = 0$

$$\psi(C_i^h) = \psi(A_i^h) + \psi(B_i^h).$$

Ferner ist dann

$$\lambda_{h\,i}^k(C) = \lambda_{h\,i}^k(A) = \lambda_{h\,i}^k(B).$$

(iii) Jedes D_i^h ist auch ein A_i^h und ein B_i^h. Tritt D_i^h nicht als h-dimensionale Seite von C auf, so definieren wir $\lambda_{h\,i}^k(C) = 0$. Dann folgt aus der Definition der $\lambda_{h\,i}^k$, daß stets

$$\lambda_{h\,i}^k(A) + \lambda_{h\,i}^k(B) = \lambda_{h\,i}^k(C) + \lambda_{h\,i}^k(D).$$

In allen drei Fällen ist der Beitrag der entsprechenden h-dimensionalen Seiten zur linken Seite von (6.5) gleich null.

Es bleibt der Fall, daß $\dim A = h+1$, also $\dim D = h$. Dann wird etwa $D = A_j^h = B_j^h$, jedoch ist D nicht Seite von C. Da (i) und (ii) gültig bleiben, folgt aus (6.3), daß die linke Seite von (6.5) gleich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\psi(A_i^h) + \psi(B_i^h) - \psi(C_i^h)) + (\tfrac{1}{2} \cdot 2\psi(D) - \varphi'(D)) = \tfrac{1}{2} \sum 0 + 0 = 0$$

ist.

7. Beweis von Satz IV

Ist $1 \leqslant h < \dim A < k$, so ist nach Lemma 6.2

$$\mu_{h\,i}(A) = \frac{1}{\omega_{k-h}} \lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{1}{\omega_{k-h-1}} \lambda_{h\,i}^{k-1}(A) = \cdots \tag{7.1}$$

unabhängig von k. Nach (6.2) ist

$$\mu_{k-1,\,i}(A) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } \dim A = k. \tag{7.2}$$

Sei jetzt $m < h \leqslant k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$, $A \in \Pi'^k$. Ist $\dim A \leqslant h$, so interpretieren wir den zunächst sinnlosen Ausdruck

$$\sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h)$$

als $\psi(A)$. Dann können wir Lemma 6.3 folgendermaßen umschreiben:

Lemma 7.1: *Sei $m < h < k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$. Dann ist durch*

$$\varphi'(A) = \sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h) \qquad \textit{fur alle } A \in \Pi'^k$$

ein Funktional $\varphi \in \Phi_{m\,h}^h$ definiert. [Für den Fall $h = k-1$ vgl. (7.2) und (5.1)].

Wegen Lemma 5.3 folgt Satz IV unmittelbar aus

Lemma 7.2: *Sei $1 \leqslant h \leqslant k - m - 1$. Dann ist*

$$L: \Phi_{m,\,k-h}^k \to \Phi_{m,\,k-h}^{k-1}$$

ein Epimorphismus.

Wir beweisen Lemma 7.2 mittels Induktion nach h gleichzeitig mit

SATZ 7.3: *Sei* $h \equiv k-m \pmod 2$, $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gibt es zu jedem* $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$ *eine eindeutig bestimmte Folge von Funktionalen*

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h}{2}\right],$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) &= \sum_i \mu_{k-h,i}(A)\,\varphi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant h/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A)\cdot\chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

für alle $A \in \Pi'^k$.

Für $h=1$ erhalten wir Lemma 7.2 aus Satz II für $k \equiv m \pmod 2$ und aus Lemma 5.1 für $k \equiv m+1 \pmod 2$. Satz 7.3 mit $h=1$ folgt aus Korollar 5.2 und (7.2). Unsere Behauptungen seien bis $h-1$ bewiesen.

Zu Lemma 7.2: Sei

$$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,(k-1)-(h-1)}.$$

Ist $h \equiv k-m+1 \pmod 2$, so ist nach (3)

$$\Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,k-h+1} \quad \text{und} \quad \Phi^k_{m,k-h} = \Phi^k_{m,k-h+1}.$$

In diesem Falle ergibt sich der Induktionschritt unmittelbar aus der Induktionsannahme für Lemma 7.2.

Sei jetzt $h \equiv k-m \pmod 2$. Dann gibt es nach Induktionsannahme für Satz 7.3 eindeutig bestimmte Funktionale

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h-1}{2}\right],$$

so daß das durch

$$\left.\begin{aligned} \chi(A) &= \sum_i \mu_{k-h,i}(A)\,\psi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant (h-1)/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A)\cdot\chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

zunächst in Π'^k definierte Funktional χ in Π'^{k-1} mit ψ übereinstimmt. Nach Lemma 7.1 ist $\chi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wegen $L\chi = \psi$ ist hiermit Lemma 7.2, also Satz IV für h bewiesen.

Zu Satz 7.3: Sei $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wählen wir in (7.4) $\psi = L\varphi$, so erhalten wir

$$L(\varphi - \chi) = 0. \tag{7.5}$$

Ist h ungerade, also $k \equiv m+1 \pmod 2$, so folgt aus (7.5) und Satz IV (i), daß $\varphi = \chi$.

Sei h gerade, also $k \equiv m \pmod 2$. Nach Satz IV (ii) gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $\chi_{h/2} \in \Phi^k_{mk}$, so daß $\varphi = \chi + \chi_{h/2}$. In beiden Fällen erhalten wir eine eindeutige Darstellung (7.3).

Beweis von Korollar V. Aus Satz IV folgt, daß

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{k-1}_{m,\,m+h}/\Phi^{k-1}_{m,\,m+h+1}$$

für $1 \leqslant h \leqslant k-m-2$. Ersetzen wir in dieser Formel k der Reihe nach durch $k-1$, $k-2, \dots, m+h+2$, so erhalten wir

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h}/\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1}\,. \tag{7.6}$$

Da $h \geqslant 2$ und gerade ist, ist $\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1} = \{0\}$ nach Satz II. Nach Lemma 5.1 ist

$$\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h} \simeq \Phi^{m+h}_{m,\,m+h}\,.$$

Somit ist die rechte Seite von (7.6) isomorph zu $\Phi^{m+h}_{m,\,m+h}$.

LITERATUR

[1] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Berlin, 1957).
[2] W. Volland, *Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum*, Arch. d. Math. *8* (1957), 144–149.

Eingegangen den 6. Mai 1968