Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Über eine Klasse von Polyederfunktionalen.
Autor: Scherk, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33764

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine Klasse von Polyederfunktionalen

PETER SCHERK

Ein *konvexes Polyeder* im k-dimensionalen euklidischen Raume E^k ist die konvexe Hülle einer endlichen nicht leeren Punktmenge. Ein *Polyeder* ist die Vereinigungsmenge von endlich vielen konvexen Polyedern gleicher Dimension in E^k. Diese Dimension heißt die Dimension des Polyeders. Bezeichne

$$\Pi^k = \{A, B, \ldots\}$$

die Menge der Polyeder in E^k.

Ein *Polyederfunktional* φ ordnet jedem $A \in \Pi^k$ eine reelle Zahl $\varphi(A)$ zu. Wir nennen φ *bewegungsinvariant*, wenn $\varphi(A) = \varphi(B)$, falls A und B kongruent sind. Gilt

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle A, B in Π^k mit

$$\dim A = \dim B = 1 + \dim(A \cap B),$$

so nennen wir φ *additiv*; vgl. jedoch (**1**, S. 36). Schließlich nennen wir φ *homogen* vom Grade m, wenn

$$\varphi(\lambda A) = \lambda^m \varphi(A) \qquad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und alle } A \in \Pi^k.$$

Hier entsteht λA aus A durch eine Streckung am Ursprung im Verhältnis $1:\lambda$.

Die Polyederfunktionale in Π^k, die bewegungsinvariant, additiv und homogen vom Grade m sind, bilden einen Vektorraum Φ^k_m, dessen Nullvektor das Funktional 0 ist, welches jedes Polyeder auf die Zahl 0 abbildet. Bezeichne $\Phi^k_{m\,h}$ den Unterraum aller $\varphi \in \Phi^k_m$, für die $\varphi(A) = 0$, wenn $\dim A < h$. Wir beweisen

SATZ I:

$$\dim \Phi^k_m = \begin{cases} 0 & & m \notin \{0, 1, \ldots, k\} & \\ 1 & \textit{für} & m \in \{0, k-1, k\}; & \text{vgl. } (\mathbf{1}, \text{S. } 79) \\ \infty & & m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}; & \text{vgl. } (\mathbf{1}, \text{S. } 50). \end{cases}$$

In der obersten Zeile braucht m nicht ganz zu sein.

Wegen Satz I können wir die Untersuchung der Vektorräume Φ^k_m auf die Fälle

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\} \tag{1}$$

beschränken. Aus ihm folgt

$$\{0\} = \Phi^k_{m,k+1} \subset \Phi^k_{m\,k} \subset \cdots \subset \Phi^k_{m,m+1} \subset \Phi^k_{m\,m} = \Phi^k_m. \tag{2}$$

Hadwiger bewies (**1**.66), – und wir werden einen zweiten Beweis dieses Satzes vorschlagen, –

SATZ II: $\Phi^k_{mk} = \{0\}$ *für* $m \equiv k-1 \pmod 2$, $1 \leqslant m \leqslant k-2$.

Wegen Satz II kann man (2) leicht verschärfen zu

$$\Phi^k_m \supset \Phi^k_{m,m+1} = \Phi^k_{m,m+2} \supset \Phi^k_{m,m+3} = \Phi^k_{m,m+4} \supset \cdots, \tag{3}$$

wo jedes zweite Mal das Gleichheitszeichen steht. Es erhebt sich somit die Frage nach der Struktur des Diagramms

$$\begin{array}{rcl|l}
 & & \Phi^{m+2}_{m,m+2} = \Phi^{m+2}_{m,m+1} & \subset \Phi^{m+2}_{mm} \\
\{0\} = \Phi^{m+3}_{m,m+3} & \subset & \Phi^{m+3}_{m,m+2} = \Phi^{m+3}_{m,m+1} & \subset \Phi^{m+3}_{mm} \\
\Phi^{m+4}_{m,m+4} = \Phi^{m+4}_{m,m+3} & \subset & \Phi^{m+4}_{m,m+2} = \Phi^{m+4}_{m,m+1} & \subset \Phi^{m+4}_{mm} \\
\{0\} = \Phi^{m+5}_{m,m+5} \subset \Phi^{m+5}_{m,m+4} = \Phi^{m+5}_{m,m+3} & \subset & \Phi^{m+5}_{m,m+2} = \Phi^{m+5}_{m,m+1} & \subset \Phi^{m+5}_{mm}
\end{array}$$

Man zeigt leicht

SATZ III: $\dim(\Phi^k_m/\Phi^k_{m,m+1}) = 1$ *für* $k > m+1$.

Wir ordnen jetzt jedem Polyederfunktional φ *in* E^k *das Funktional*

$$L\varphi = \varphi|_{E^{k-1}}$$

zu. Dann zeigt man

SATZ IV: *Sei* $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gilt*

(i) $\Phi^k_{m,k-h} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-h}$ *für* $k \equiv m+1 \pmod 2$

(ii) $\Phi^k_{m,k-h}/\Phi^k_{mk} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-h}$ *für* $k \equiv m \pmod 2$.

KOROLLAR V: *Sei h gerade;* $2 \leqslant h \leqslant k-m-2$. *Dann ist*

$$\Phi^k_{m,m+h}/\Phi^k_{m,m+h+2} \simeq \Phi^{m+h}_{m,m+h}. \tag{4}$$

Insbesondere hat der Quotientenraum (4) *unendliche Dimension.*

1. Zylinder in E^k

Der Beweis von Satz I benutzt im wesentlichen Ideen, die bereits in **(1)** dargestellt sind. Wir skizzieren daher nur die Schritte.

Hier und im folgenden bezeichne I^h den h-dimensionalen Einheitswürfel; $h = 1, 2, \ldots, k$. Überdies sei I^0 ein Punkt. Man bestätigt leicht

LEMMA 1.1: *Sei* φ *ein additives bewegungsinvariantes Funktional. Sei r eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\varphi(rI^h) = r^h\varphi(I^h) - \binom{h}{1}(r-1)\,r^{h-1}\varphi(I^{h-1})$$
$$+ \binom{h}{2}(r-1)^2\,r^{h-2}\varphi(I^{h-2}) \mp \cdots + (-1)^h(r-1)^h\varphi(I^0).$$

Aus Lemma 1.1 folgt unmittelbar

KOROLLAR 1.2: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Sei* $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ *oder* $\varphi(I^k) = 0$. *Dann gilt*

$$\varphi(I^h) = 0 \quad \textit{für } h = 0, 1, \ldots, k.$$

Mit Hilfe dieses Korollars und unter Benutzung der Additivität von φ beweist man

LEMMA 1.3: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes rechtwinklige Parallelotop* A.

Schließlich folgt aus Lemma 1.3 mittels einer Routinekonstruktion

LEMMA 1.4: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(A) = 0$ *für jedes Parallelotop* A.

Die Definition der h-Zylinder findet sich in (**1**; S. 19). Bezeichne Z_h^k die Klasse der h-Zylinder in E^k, also

$$Z_k^k \subset Z_{k-1}^k \subset \cdots \subset Z_2^k \subset Z_1^k = \Pi^k,$$

Da jedes Dreieck sich durch ein kongruentes zu einem Parallelogramm ergänzen läßt, folgt aus Lemma 1.4 sofort

LEMMA 1.5: *Unter den Voraussetzungen von Korollar* 1.2 *ist* $\varphi(Z_{k-1}^k) = 0$.

Mittels der Hadwigerschen Simplotope (**1**; 17) zeigt man

LEMMA 1.6: *Sei* $\varphi \in \Phi_m^k$. *Gilt*

$$\varphi(Z_{h-1}^{k-1}) = \varphi(Z_{h+1}^k) = 0$$

und ist $h \neq m$, *so gilt* $\varphi(Z_h^k) = 0$. [*für* $h = 1$ *setzen wir* $Z_0^{k-1} = \Pi^{k-1}$].

BEMERKUNG 1.7: Aus den beiden letzten Lemmas folgt, daß $\varphi(\Pi^k) = 0$, wenn $\varphi \in \Phi_m^k$ und entweder (i) $m \notin \{0, 1, \ldots, k\}$ oder (ii) $m \in \{0, k-1, k\}$ und $\varphi(I^k) = 0$. Hieraus und aus der Existenz von Volumen und Oberfläche ergeben sich sofort die beiden ersten Teile von Satz I. Die Fälle $m = k-1$ und $m = k$ finden sich bereits in (**1**, S. 79). Für $m = k$ setzt Hadwiger statt der Bewegungsinvarianz sogar nur die Translationsinvarianz voraus.

Für den Rest dieser Arbeit dürfen wir voraussetzen, daß

$$m \in \{1, 2, \ldots, k-2\}.$$

2. Abschluß des Beweises von Satz I

LEMMA 2.1: $\dim \Phi_{m\,k}^k = \infty$ *für* $m \equiv k \pmod 2$.

Beweis: (**1**, S. 50).

Wir benutzen hier und später die folgende *Konvention*: Ist $A \in \Pi^k$, so durchläuft A_i^h die h-dimensionalen Seiten von A.

LEMMA 2.2: $\dim \Phi_{m,k-1}^k = \infty$ *für* $m \equiv k+1 \pmod 2$.

Der Beweis benutzt ein Argument, das wir später verallgemeinern werden. Jedem

$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-1}$ ordnen wir mittels

$$\varphi(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum \psi(A_i^{k-1}) & \text{für} \quad \dim A = k \\ \psi_{(A)} & \phantom{\text{für}} \quad \dim A < k \end{cases}$$

ein Funktional φ in Π^k zu. Offensichtlich ist φ bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Da $\psi(A)=0$ für $\dim A<k-1$, gilt das gleiche für φ. Hieraus folgt leicht die Additivität von φ. Somit ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Da die Abbildung $\psi \to \varphi$ eineindeutig ist, ergibt sich hieraus unsere Behauptung.

Mit den Lemmas 2.1 und 2.2 ist Satz I bewiesen.

3. Über einen zweiten Beweis von Satz II

Die Ortsvektoren $a_1, \ldots, a_k$ seien linear unabhängig. Sei

$$B_t = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \,\middle|\, \sum \lambda_i \leqslant t; \quad 0 \leqslant \lambda_h \leqslant 1 \text{ für alle } h \right\}; \tag{3.1}$$
$$t = 1, 2, \ldots, k.$$

Dann ist also

$$B_1 = S^k = \left\{ \sum_1^k \lambda_i a_i \,\middle|\, \sum \lambda_i \leqslant 1; \quad \lambda_h \geqslant 0 \text{ für alle } h \right\} \tag{3.2}$$

ein k-Simplex, und B_k ist ein Parallelotop. Man bestätigt sofort, daß

$$B_t \cup \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) = B_k$$

und

$$\dim \left[B_t \cap \left(\sum_1^k a_i - B_{k-t} \right) \right] \leqslant k - 1.$$

Nehmen wir also das von Satz II unabhängige Lemma 4.5 vorweg, so folgt aus Lemma 1.4

LEMMA 3.1: *Sei $\varphi \in \Phi^k_{mk}$. Dann gilt*

$$\varphi(B_t) + \varphi(B_{k-t}) = \varphi(B_k) = 0; \qquad t = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Man bestätigt unschwer

LEMMA 3.2: *Sei $1 \leqslant t \leqslant k$. Dann ist*

$$t S^k = \bigcup_{h=0}^{t-1} \bigcup_{\Sigma p_i = h} \left(\sum_1^k p_i a_i + B_{t-h} \right),$$

wo die p_i die nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen.

Aus Lemma 3.2 folgt unmittelbar

KOROLLAR 3.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m\,k}$. Dann gilt

$$t^m \varphi(S^k) = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \varphi(B_{t-h}); \qquad t = 1, 2, \ldots, k.$$

Wir geben an ohne Beweis

LEMMA 3.4: *Sei* $k \geq m+3$, $k \equiv m+1 \pmod 2$. *Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem*

$$\left.\begin{aligned} t^m \xi_1 &= \sum_{h=0}^{t-1} \binom{k+h-1}{h} \xi_{t-h}; \qquad && t = 2, 3, \ldots, k \\ \xi_t + \xi_{k-t} &= 0; && t = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

nur die triviale Lösung.

BEMERKUNG: Aus Lemmas 2.1. und 3.3 folgt, daß (3.3) nichttriviale Lösungen hat, wenn $k \geq m+3$, $k \equiv m \pmod 2$.

Sei jetzt $\varphi \in \Phi^k_{m,k}$, $m \equiv k-1 \pmod 2$, $k > m+1$. Dann folgt aus Lemma 3.1, Korollar 3.3 und Lemma 3.4, daß $\varphi(S^k) = 0$; vgl. (3.2). Da S^k ein beliebiger k-dimensionaler Simplex sein kann, ist $\varphi(A) = 0$ für beliebige konvexe Polyeder A der Dimension k, somit auch für alle Polyeder. Hiermit ist Satz II auf Lemma 3.4 zurückgeführt.

KOROLLAR 3.5: *Formel* (3) *der Einleitung.*

Beweis: Sei h ungerade, $1 \leq h \leq k-m-1$; $\varphi \in \Phi^k_{m,\,m+h}$. *Wenden wir Satz* I *für* $h = 1 =$ *und Satz* II *für* $h > 1$ *an, so erhalten wir*

$$\varphi|_{E^{m+h}} \in \Phi^{m+h}_{m,\,m+h} = \{0\}.$$

Somit ist

$$\varphi \in \Phi^k_{m,\,m+h+1}.$$

4. Eine Kennzeichnung der Vektorräume Φ^k_{mh}

Offensichtlich gilt

LEMMA 4.1: *Sei* φ *additiv und bewegungsinvariant,* $\varphi(Z^k_h) = 0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{k-1}_{h-1}) = 0$.

KOROLLAR 4.2: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leq k-m$ *gelte* $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. *Dann ist* $\varphi(Z^{m+h}_m) = 0$.

LEMMA 4.3: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Für ein* $h \leq m$ *sei* $\varphi(Z^k_h) = 0$. *Dann ist* $\varphi = 0$.

Der Beweis benutzt doppelte Induktion nach k und h. Nach Lemma 4.1 ist $\varphi(Z^{k-1}_{h-1}) = 0$. Aus der Induktionsannahme für k bzw. aus Bemerkung 1.7 folgt daher, daß $\varphi(\Pi^{k-1}) = 0$. Jetzt leistet Lemma 1.6 den Induktionsschritt von $h-1$ nach h.

Aus Korollar 4.2 und Lemma 4.3 erhalten wir

LEMMA 4.4: *Sei* $h \leq k-m$. *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$, $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. *Dann ist* $\varphi \in \Phi^k_{m,\,m+h+1}$.

Wir besprechen jetzt eine Umkehrung von Lemma 4.4. Zunächst der Fall $h = 1$.

LEMMA 4.5: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+1}$. *Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-1})=0$.

Beweis: Voraussetzungsgemäß ist $\varphi(I^h)=0$ für $h=0, 1, \ldots, m$. Aus Lemma 1.1 folgt, daß $\varphi(I^h)$ auch für $h=m+1, \ldots, k$ verschwindet. Lemma 1.5 ergibt dann die Behauptung.

LEMMA 4.6: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$, *wo* $h \leqslant k-m$ *und ungerade. Dann ist* $\varphi(Z^k_{k-h})=0$.

Beweis: Nach Lemma 4.5 ist diese Behauptung richtig für $h=1$. Sie sei bis $h-2$ bewiesen. Sei h jetzt fest. Ist $k=m+h$, so folgt die Behauptung aus Satz II. Die Induktion nach k wird durch zweimalige Anwendung von Lemma 1.6 ausgeführt.

Wir fassen Lemmas 4.4. und 4.6 zusammen.

SATZ 4.7: *Sei* $\varphi \in \Phi^k_m$. *Sei* $h \leqslant k-m$ *und ungerade; vgl.* (3). *Dann gilt*

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h} \Leftrightarrow \varphi(Z^k_{k-h}) = 0.$$

KOROLLAR 4.8: $\Phi^k_{m,m+1} = \{\varphi \in \Phi^k_m \mid \varphi(I^k)=0\}$.

Beweis: vgl. Lemma 1.5.

5. Der Kern von L

Sei $0<h<k-m$. Wir definierten den Homomorphismus

$$\mathrm{L}: \Phi^k_{m,m+h} \to \Phi^{k-1}_{m,m+h},$$

indem wir jedem $\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}$ das Funktional

$$\mathrm{L}\varphi = \varphi|_{E^{k-1}} \in \Phi^{k-1}_{m,m+h}$$

zuordneten. Wir bestätigen zunächst einen Sonderfall von Satz IV.

LEMMA 5.1: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k>m+1$. *Dann gilt*

$$\Phi^k_{m,k-1} \overset{L}{\simeq} \Phi^{k-1}_{m,k-1}.$$

Beweis: Für jedes $\psi \in \Phi^k_{m,k-1}$ definieren wir $L^{-1}\psi$ mittels

$$(L^{-1}\psi)(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum \psi(A_i^{k-1}) & \text{für} \quad \dim A = k; \\ \psi(A) & \phantom{\text{für}} \quad \dim A < k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Dann folgt aus dem Beweis von Lemma 2.2, daß L^{-1} ein Monomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ in $\Phi^k_{m,k-1}$ ist. Offensichtlich ist $LL^{-1}\psi=\psi$.

Ist $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$, so ist durch

$$\chi(A) = \begin{cases} \varphi(A) - \frac{1}{2}\sum \varphi(A_i^{k-1}) & \text{für} \quad \dim A = k \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \dim A < k \end{cases}$$

ein Funktional $\chi \in \Phi^k_{m,k}$ definiert. Nach Satz II ist $\chi=0$. Somit ist $\varphi = L^{-1}L\varphi$, und L^{-1} ist ein Isomorphismus von $\Phi^{k-1}_{m,k-1}$ auf $\Phi^k_{m,k-1}$ mit der Inversen L.

KOROLLAR 5.2: *Sei* $k \equiv m+1 \pmod 2$, $k > m+1$, $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. *Dann gilt*

$$\varphi(A) = \tfrac{1}{2} \sum \varphi(A_i^{k-1}) \quad \textit{für } \dim A = k.$$

LEMMA 5.3: *Sei* $k > m+1$. *Dann gilt*

$$\ker L = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad k \equiv m+1 \pmod 2 \\ \Phi^k_{mk} & \phantom{\textit{für}} \quad k \equiv m \pmod 2. \end{cases}$$

Beweis: Sei

$$\varphi \in \Phi^k_{m,m+h}, \qquad L\varphi = 0.$$

Dann ist insbesondere $\varphi(Z_m^{k-1}) = 0$.

Ist h ungerade, so ist nach Satz 4.7 $\varphi(Z^k_{k-h}) = 0$. Ist h gerade, so folgt aus (3) und Satz 4.7, daß wenigstens $\varphi(Z^k_{k-h+1}) = 0$. In beiden Fällen erhalten wir mittels wiederholter Anwendung von Lemma 1.6, daß

$$0 = \varphi(Z^k_{k-h+1}) = \varphi(Z^k_{k-h}) = \cdots = \varphi(Z^k_{m+1}).$$

Nach Satz 4.7 ist daher $\varphi \in \Phi^k_{m,k-1}$. Unsere Behauptung ergibt sich somit für $k \equiv m+1 \pmod 2$ aus Lemma 5.1 und für $k \equiv m \pmod 2$ aus Satz II mit $k-1$ statt k und aus (3).

6. Die Quermassintegrale

Bezeichne Π'^k die Menge der konvexen Polyeder in E^k. Ferner bezeichne Φ'^k_m bzw. Φ'^k_{mh} den Vektorraum der auf Π'^k definierten additiven bewegungsinvarianten Funktionale, die homogen vom Grade m sind, [und die für jedes $A \in \Pi'^k$ mit $\dim A < h$ verschwinden].

LEMMA 6.1: *Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_m$ [*Ist* $\varphi' \in \Phi'^k_{mh}$], *so gibt es ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_m$ [*ein und nur ein* $\varphi \in \Phi^k_{mh}$], *so daß* $\varphi|_{\Pi'^k} = \varphi'$.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus einer Konstruktion von VOLLAND; vgl. **(2)**.

Beweis von Satz III. Liegen φ und ψ in $\Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,m+1}$, so sind $\varphi(I^k)$ und $\psi(I^k)$ von 0 verschieden. Ferner ist

$$\chi = \psi(I^k) \cdot \varphi - \varphi(I^k) \cdot \psi \in \Phi^k_m.$$

Wegen $\chi(I^k) = 0$ ist $\chi \in \Phi^k_{m,m+1}$; vgl. Korollar 4.8. Somit ist

$$\dim(\Phi^k_m / \Phi^k_{m,m+1}) \leqslant 1.$$

Das $(k-m)$-te Quermassintegral φ'^k_m liegt in Φ'^k_m. Nach Lemma 6.1 läßt es sich auf genau eine Weise zu einem Funktional $\varphi^k_m \in \Phi^k_m$ erweitern. Wegen

$$\varphi^k_m(I^k) = \varphi'^k_m(I^k) \neq 0$$

ist

$$\varphi^k_m \in \Phi^k_m \backslash \Phi^k_{m,m+1}.$$

Hiermit ist Satz III bewiesen.

Definitionsgemäß ist $\varphi^h_h(A^h_i)$ das h-dimensionale Volumen von A^h_i.

Sei $A \in \Pi'^k$; $\dim A > h$. Wir legen durch einen relativ inneren Punkt p von A_i^h das $(k-h)$-flach E^{k-h} senkrecht zu A_i^h; also $E^{k-h} \cap A \in \Pi'^{k-h}$. Die Strahlen von p nach den Punkten von $(E^{k-h} \cap A) \setminus \{p\}$ bilden einen konvexen Kegel. Wir konstruieren den in E^{k-h} zu diesem polaren Kegel und schneiden letzteren mit dem Einheitsball um p. Bezeichne $\lambda_{h\,i}^k(A)$ das Volumen dieses $(k-h)$-dimensionalen Durchschnittes. Indem wir φ_h^k umnormieren, nämlich mit $\binom{k}{h}$ multiplizieren, können wir dann wegen der Steinerschen Formel (**1**; S. 214) setzen

$$\varphi_h^k(A) = \sum_i \lambda_{h\,i}^k(A) \cdot \varphi_h^h(A_i^h); \qquad h = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6.1}$$

Wir beachten, daß

$$\lambda_{k-1,\,i}^k(A) = 1 \qquad \text{für } \dim A = k. \tag{6.2}$$

Im folgenden bezeichne ω_h das Volumen des h-dimensionalen Einheitsballes. Man bestätigt leicht

LEMMA 6.2: *Sei $A \in \Pi'^{k-1}$; $1 \leqslant h \leqslant \dim A$. Dann gilt*

$$\lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \lambda_{h\,i}^{k-1}(A).$$

Ist $\dim A = h+1$, *so folgt wegen* $\omega_1 = 2$ *aus Lemma* 6.2 *und Formel* (6.2), *daß*

$$\lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{\omega_{k-h}}{\omega_{k-h-1}} \cdot \frac{\omega_{k-h-1}}{\omega_{k-h-2}} \cdots \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \lambda_{h\,i}^{h+1}(A) = \tfrac{1}{2}\,\omega_{k-h}. \tag{6.3}$$

Lemma 6.3: *Sei $m < h < k$, sei $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$. Für alle $A \in \Pi'^k$ setzen wir*

$$\varphi'(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_{k-h}} \displaystyle\sum_i \lambda_{h\,i}^k(A)\,\psi(A_i^h) & \text{für } \dim A > h \\ \psi(A) & \phantom{\text{für }} \dim A \leqslant h. \end{cases} \tag{6.4}$$

Dann ist durch (6.4) *gemäß Lemma* 6.1 *ein Funktional $\varphi \in \Phi_{m\,h}^h$ definiert.*

Beweis: Mit ψ ist φ' bewegungsinvariant und homogen vom Grade m. Es bleibt die Additivität von φ' nachzuprüfen.

Sei

$$\{A, B, C\} \subset \Pi'^k,\ A \cup B = C,\ A \cap B = D,$$
$$\dim A = \dim B = 1 + \dim D.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\varphi'(A) + \varphi'(B) - \varphi'(C) - \varphi'(D) = 0. \tag{6.5}$$

Für $\dim A \leqslant h$ ist die Additivität von φ' trivial. Sei zunächst $\dim A > h+1$.

(i) Kommt eine Seite C_i^h etwa nur als Seite von A vor, so haben C_i^h und das entsprechende A_i^h den gleichen Koeffizienten $\lambda_{h\,i}^k$.

(ii) Sei $C_i^h = A_i^h \cup B_i^h$, $\dim(C_i^h \cap D) < h$. Dann ist wegen $\psi|_{E^{h-1}} = 0$

$$\psi(C_i^h) = \psi(A_i^h) + \psi(B_i^h).$$

Ferner ist dann

$$\lambda_{h\,i}^k(C) = \lambda_{h\,i}^k(A) = \lambda_{h\,i}^k(B).$$

(iii) Jedes D_i^h ist auch ein A_i^h und ein B_i^h. Tritt D_i^h nicht als h-dimensionale Seite von C auf, so definieren wir $\lambda_{h\,i}^k(C) = 0$. Dann folgt aus der Definition der $\lambda_{h\,i}^k$, daß stets

$$\lambda_{h\,i}^k(A) + \lambda_{h\,i}^k(B) = \lambda_{h\,i}^k(C) + \lambda_{h\,i}^k(D).$$

In allen drei Fällen ist der Beitrag der entsprechenden h-dimensionalen Seiten zur linken Seite von (6.5) gleich null.

Es bleibt der Fall, daß $\dim A = h+1$, also $\dim D = h$. Dann wird etwa $D = A_j^h = B_j^h$, jedoch ist D nicht Seite von C. Da (i) und (ii) gültig bleiben, folgt aus (6.3), daß die linke Seite von (6.5) gleich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\psi(A_i^h) + \psi(B_i^h) - \psi(C_i^h)) + (\tfrac{1}{2} \cdot 2\psi(D) - \varphi'(D)) = \tfrac{1}{2} \sum 0 + 0 = 0$$

ist.

7. Beweis von Satz IV

Ist $1 \leqslant h < \dim A < k$, so ist nach Lemma 6.2

$$\mu_{h\,i}(A) = \frac{1}{\omega_{k-h}} \lambda_{h\,i}^k(A) = \frac{1}{\omega_{k-h-1}} \lambda_{h\,i}^{k-1}(A) = \cdots \tag{7.1}$$

unabhängig von k. Nach (6.2) ist

$$\mu_{k-1,\,i}(A) = \tfrac{1}{2} \quad \text{für } \dim A = k. \tag{7.2}$$

Sei jetzt $m < h \leqslant k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$, $A \in \Pi'^k$. Ist $\dim A \leqslant h$, so interpretieren wir den zunächst sinnlosen Ausdruck

$$\sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h)$$

als $\psi(A)$. Dann können wir Lemma 6.3 folgendermaßen umschreiben:

LEMMA 7.1: *Sei $m < h < k$, $\psi \in \Phi_{m\,h}^h$. Dann ist durch*

$$\varphi'(A) = \sum_i \mu_{h\,i}(A)\, \psi(A_i^h) \quad \textit{fur alle } A \in \Pi'^k$$

ein Funktional $\varphi \in \Phi_{m\,h}^h$ definiert. [Für den Fall $h = k-1$ vgl. (7.2) *und* (5.1)].

Wegen Lemma 5.3 folgt Satz IV unmittelbar aus

LEMMA 7.2: *Sei $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. Dann ist*

$$L: \Phi_{m,\,k-h}^k \to \Phi_{m,\,k-h}^{k-1}$$

ein Epimorphismus.

Wir beweisen Lemma 7.2 mittels Induktion nach h gleichzeitig mit

SATZ 7.3: *Sei* $h \equiv k-m \pmod 2$, $1 \leqslant h \leqslant k-m-1$. *Dann gibt es zu jedem* $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$ *eine eindeutig bestimmte Folge von Funktionalen*

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h}{2}\right],$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} \varphi(A) = &\sum_i \mu_{k-h,i}(A)\, \varphi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant h/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A) \cdot \chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

für alle $A \in \Pi'^k$.

Für $h=1$ erhalten wir Lemma 7.2 aus Satz II für $k \equiv m \pmod 2$ und aus Lemma 5.1 für $k \equiv m+1 \pmod 2$. Satz 7.3 mit $h=1$ folgt aus Korollar 5.2 und (7.2). Unsere Behauptungen seien bis $h-1$ bewiesen.

Zu Lemma 7.2: Sei

$$\psi \in \Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,(k-1)-(h-1)}.$$

Ist $h \equiv k-m+1 \pmod 2$, so ist nach (3)

$$\Phi^{k-1}_{m,k-h} = \Phi^{k-1}_{m,k-h+1} \quad \text{und} \quad \Phi^k_{m,k-h} = \Phi^k_{m,k-h+1}.$$

In diesem Falle ergibt sich der Induktionschritt unmittelbar aus der Induktionsannahme für Lemma 7.2.

Sei jetzt $h \equiv k-m \pmod 2$. Dann gibt es nach Induktionsannahme für Satz 7.3 eindeutig bestimmte Funktionale

$$\chi_r \in \Phi^{k-h+2r}_{m,k-h+2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{h-1}{2}\right],$$

so daß das durch

$$\left.\begin{aligned} \chi(A) = &\sum_i \mu_{k-h,i}(A)\, \psi(A_i^{k-h}) \\ &+ \sum_{1 \leqslant r \leqslant (h-1)/2} \sum_i \mu_{k-h+2r,i}(A) \cdot \chi_r(A_i^{k-h+2r}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

zunächst in Π'^k definierte Funktional χ in Π'^{k-1} mit ψ übereinstimmt. Nach Lemma 7.1 ist $\chi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wegen $L\chi = \psi$ ist hiermit Lemma 7.2, also Satz IV für h bewiesen.

Zu Satz 7.3: Sei $\varphi \in \Phi^k_{m,k-h}$. Wählen wir in (7.4) $\psi = L\varphi$, so erhalten wir

$$L(\varphi - \chi) = 0. \tag{7.5}$$

Ist h ungerade, also $k \equiv m+1 \pmod 2$, so folgt aus (7.5) und Satz IV (i), daß $\varphi = \chi$.

Sei h gerade, also $k \equiv m \pmod 2$. Nach Satz IV (ii) gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $\chi_{h/2} \in \Phi^k_{mk}$, so daß $\varphi = \chi + \chi_{h/2}$. In beiden Fällen erhalten wir eine eindeutige Darstellung (7.3).

Beweis von Korollar V. Aus Satz IV folgt, daß

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{k-1}_{m,\,m+h}/\Phi^{k-1}_{m,\,m+h+1}$$

für $1 \leqslant h \leqslant k-m-2$. Ersetzen wir in dieser Formel k der Reihe nach durch $k-1$, $k-2, \ldots, m+h+2$, so erhalten wir

$$\Phi^k_{m,\,m+h}/\Phi^k_{m,\,m+h+1} \simeq \Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h}/\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1}\,. \tag{7.6}$$

Da $h \geqslant 2$ und gerade ist, ist $\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h+1} = \{0\}$ nach Satz II. Nach Lemma 5.1 ist

$$\Phi^{m+h+1}_{m,\,m+h} \simeq \Phi^{m+h}_{m,\,m+h}\,.$$

Somit ist die rechte Seite von (7.6) isomorph zu $\Phi^{m+h}_{m,\,m+h}$.

LITERATUR

[1] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Berlin, 1957).
[2] W. Volland, *Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum*, Arch. d. Math. *8* (1957), 144–149.

Eingegangen den 6. Mai 1968