Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen.

Autor(en): **Hess, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33769

Zur Störungstheorie linearer Operatoren: Relative Beschränktheit und relative Kompaktheit von Operatoren in Banachräumen

von PETER HESS (Zürich)

1. S. GOLDBERG zeigt in seinem Buch [2], dass jeder lineare Operator A, der bezüglich eines linearen Operators T kompakt ist, T-beschränkt ist mit T-Schranke null (p. 123, Korollar V.3.8.i). Dabei wird vorausgesetzt, dass der Operator A abgeschlossen – oder jedenfalls abschliessbar – ist, was im Rahmen der Störungstheorie linearer Operatoren eher fremd wirkt. Wird doch meist von einem leicht diskutierbaren Operator T ausgegangen und – für bezüglich T genügend kleine Störoperatoren A – die Abgeschlossenheit von $T+A$ aus derjenigen von T gefolgert, selbst wenn A nicht abschliessbar ist.

In der vorliegenden Arbeit leiten wir das erwähnte Resultat unter Bedingungen her, die der Fragestellung der Störungstheorie besser entsprechen: anstelle der Abschliessbarkeit von A fordern wir diejenige von T.

Zunächst zeigen wir also, dass die T-Beschränktheit mit T-Schranke null eine notwendige Bedingung für die T-Kompaktheit eines Operators ist (Satz 1). Anschliessend untersuchen wir, wann diese Bedingung auch hinreichend ist: Falls die Resolventenmenge $\varrho(T)$ nicht leer ist, folgt aus der T-Beschränktheit mit T-Schranke null die T-Kompaktheit genau dann, wenn T eine kompakte Resolvente besitzt (Satz 3). Dieses Resultat ergibt sich durch Spezialisierung aus einer allgemeineren Aussage (Satz 2).

2. Es seien $(X_1, \| \|_1)$ und $(X_2, \| \|_2)$ zwei Banachräume, d.h. lineare Räume X_1 und X_2 mit den Normen $\| \|_1$ bzw. $\| \|_2$. Ferner bezeichnen T und A lineare Operatoren mit den Definitionsmengen $D(T)$ und $D(A)$ in X_1 und mit Werten in X_2. Der Operator A heisst T-beschränkt, falls $D(A) \supset D(T)$ und Zahlen $a \geqq 0$, $b(a) \geqq 0$ so existieren, dass

$$\|Au\|_2 \leqq a \|Tu\|_2 + b(a) \|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$. Die untere Grenze der möglichen Werte $a \geqq 0$ wird T-Schranke von A genannt.

Für Vektoren $u \in D(T)$ definieren wir die T-Norm von u durch

$$\|u\|_T = \|Tu\|_2 + \|u\|_1 .$$

Der Operator A heisst T-kompakt, wenn $D(A) \supset D(T)$ und A jede beschränkte Menge des normierten Raumes $(D(T), \| \|_T)$ auf eine in $(X_2, \| \|_2)$ relativ kompakte Menge abbildet. Ist T abgeschlossen, so ist $(D(T), \| \|_T)$ ein Banachscher Raum.

Für die schwache Konvergenz einer Vektorfolge $\{u_n\}$ gegen ein Element u des betreffenden Raumes verwenden wir das Symbol $u_n \rightharpoonup u$.

3. Wir beginnen mit einem Lemma, das für Operatoren in Hilberträumen bereits bekannt ist, und dessen Beweis sich leicht auf den Fall von Banachräumen übertragen lässt:

LEMMA 1 ([3], p. 356). *Es sei A ein T-beschränkter Operator. Für jede in $(X_1, \| \ \|_1)$ schwach gegen null konvergierende Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit $Tu_n \rightharpoonup 0$ gilt dann $Au_n \rightharpoonup 0$.*

SATZ 1. *Der Bildraum $(X_2, \| \ \|_2)$ sei reflexiv, und es sei T abgeschlossen. Notwendig für die T-Kompaktheit des Operators A ist dann die T-Beschränktheit von A mit T-Schranke null.*

Beweis. Sei der Operator A T-kompakt. Als kompakter Operator $(D(T), \| \ \|_T) \to (X_2, \| \ \|_2)$ ist A T-beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass die T-Schranke null ist. Nehmen wir an, diese Aussage sei falsch. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $\{u_n\} \subset D(T)$ mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\|Au_n\|_2 > \delta \|Tu_n\|_2 + n \|u_n\|_1 .$$

Sei $v_n = u_n / \|u_n\|_T$. Es gilt

$$\|Av_n\|_2 > \delta \|Tv_n\|_2 + n \|v_n\|_1 . \tag{1}$$

Da A ein T-beschränkter Operator ist und

$$\|v_n\|_T = 1 \tag{2}$$

für alle n, ist die Folge $\{Av_n\}$ beschränkt, und aus der Ungleichung

$$\|v_n\|_1 < \frac{1}{n} \|Av_n\|_2$$

folgt die Konvergenz $v_n \to 0$ in $(X_1, \| \ \|_1)$.

Nach Voraussetzung ist der Raum $(X_2, \| \ \|_2)$ reflexiv, und die Folge $\{Tv_n\}$ ist konstruktionsgemäss beschränkt; folglich existiert eine schwach konvergente Teilfolge $\{Tw_n\}$, $\{w_n\} \subset \{v_n\}$. Aus der schwachen Abgeschlossenheit des Operators T ergibt sich $Tw_n \rightharpoonup 0$ (vgl. [4], p. 165, Problem 5.12). Auf Grund von Lemma 1 gilt also $Aw_n \rightharpoonup 0$.

Wegen der T-Kompaktheit von A und der Beziehung (2) besitzt $\{Aw_n\}$ eine stark konvergente Teilfolge $Aw_{n_k} \to 0$. Aus (1) folgt $Tw_{n_k} \to 0$, was aber im Widerspruch steht zur Relation (2),

w.z.b.w.

4. Wir untersuchen nun, wann die T-Beschränktheit eines Operators mit T-Schranke null hinreichend ist für die T-Kompaktheit. Dazu setzen wir voraus, dass es

einen topologischen Isomorphismus E von $(D(T), \| \ \|_1)$ in $(X_2, \| \ \|_2)$ gibt. (Ein solcher existiert z.B. immer, wenn die Räume $(X_1, \| \ \|_1)$ und $(X_2, \| \ \|_2)$ topologisch äquivalent sind.) Mit E^{-1} bezeichnen wir den auf der Wertemenge von E definierten beschränkten inversen Operator.

SATZ 2. *Dafür, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist, ist notwendig und hinreichend, dass der Isomorphismus E T-kompakt ist*[1]).

Beweis. 1. *Notwendigkeit.* Da E offenbar ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null ist, muss E T-kompakt sein.

2. *Hinlänglichkeit.* Sei A ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke null. Zu beliebigem $\delta > 0$ existiert also eine Zahl $b(\delta)$ derart, dass

$$\|A u\|_2 \leqq \delta \|T u\|_2 + b(\delta) \|u\|_1$$

für alle $u \in D(T)$ gilt. Es sei $\{u_n\}$ eine beschränkte Folge aus $(D(T), \| \ \|_T)$: $\|u_n\|_T \leqq K$ für alle n. Da der Operator E T-kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{v_n\} \subset \{u_n\}$ mit konvergenter Bildfolge $\{E v_n\}$.

Wir zeigen, dass auch die Folge $\{A v_n\}$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen $\delta_1 = \varepsilon/4K$ und wählen die Zahl N so, dass

$$\|E v_m - E v_n\|_2 \leqq \varepsilon / 2 b(\delta_1) \|E^{-1}\|$$

für alle $m, n > N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A v_m - A v_n\|_2 &\leqq \delta_1 \|T(v_m - v_n)\|_2 + b(\delta_1) \|v_m - v_n\|_1 \\ &\leqq \delta_1 (\|T v_m\|_2 + \|T v_n\|_2) + b(\delta_1) \|E^{-1}\| \, \|E v_m - E v_n\|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

für $m, n > N$,

w.z.b.w.

5. Unter der Voraussetzung

$$(X_1, \| \ \|_1) = (X_2, \| \ \|_2) = (X, \| \ \|)$$

können wir eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dass jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist. Das folgende Lemma ist wohlbekannt (vgl. z.B. [1], p. 201):

LEMMA 2. *Sei T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator A ist T-kompakt dann und nur dann, wenn $D(A) \supset D(T)$ und $A(T-\lambda)^{-1}$ ein kompakter Operator des Raumes $(X, \| \ \|)$ ist.*

Der Einheitsoperator 1 ist unter den getroffenen Annahmen ein zulässiger topologischer Isomorphismus E. Aus Satz 2 und Lemma 2 folgt deshalb

---

[1]) Der Operator T braucht hier nicht abschliessbar zu sein.

SATZ 3. *Sei der Operator T abgeschlossen, und sei λ in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Der Operator $(T-\lambda)^{-1}$ ist genau dann kompakt im Raume $(X, \| \ \|)$, wenn jeder T-beschränkte Operator mit T-Schranke null T-kompakt ist.*

6. BEMERKUNG (20. März 1969). Wir haben in Satz 1 vorausgesetzt, dass der Operator T abgeschlossen ist. Der Beweis muss nur unbedeutend modifiziert werden, wenn wir bloss annehmen, dass T abschliessbar ist. Dass man diese Voraussetzung jedoch nicht weglassen kann, zeigt das folgende

Beispiel. Sei X_2 endlich dimensional, und sei der Operator T unbeschränkt. Dann ist T nicht abschliessbar ([4], p. 166, Problem 5.18). Der Operator $A = T$ ist T-kompakt, aber offensichtlich ist die T-Schranke von A nicht null.

LITERATUR

[1] I. C. GOHBERG, und M. G. KREIN, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators.* A. M. S. Translations, Serie 2, Vol. 13, p. 185–264.

[2] S. GOLDBERG, *Unbounded linear operators*, Mac Graw Hill series in higher mathematics (1966).

[3] K. JÖRGENS, *Zur Spektraltheorie der Schrödinger-Operatoren.* Math. Z., *96* (1967), 355–372.

[4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966).

Eingegangen, 31.5.68