Über fast-uniforme Untergruppen komplexer Liegruppen und auflösbare komplexe Mannigfaltigkeiten.

Autor(en): **Barth, Wolf / Otte, Michael**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33771

Über fast-uniforme Untergruppen komplexer Liegruppen und auflösbare komplexe Mannigfaltigkeiten

Von Wolf Barth und Michael Otte

Einleitung

Bekanntlich zeigten S. Bochner und D. Montgomery, daß die Gruppe der komplex-analytischen Automorphismen $\mathrm{Aut}(X)$ einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X eine komplexe Liegruppe ist.

Ist X homogen und $G := \mathrm{Aut}^0(X)$ auflösbar, so nennt man X auflösbar. Jede auflösbare Mannigfaltigkeit in diesem Sinne ist komplex-parallelisierbar, d.h., das holomorphe Tangentialbündel ist trivial. Umgekehrt lassen sich die auflösbaren Mannigfaltigkeiten charakterisieren als kompakte komplex-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten mit auflösbarer Fundamentalgruppe (vergl. Satz 3.1) oder auf andere Weise: als homogene Torustürme (vergl. 4., insbesondere auch zur Begriffsbildung).

Diesen Ergebnissen geht die folgende allgemeinere Fragestellung voraus:

Ist H ein zusammenhängender komplexer Normalteiler in G, so sind die Bahnen aller Punkte $x \in X$ unter H homöomorph, und man fragt, ob die („typische") Bahn Hx wieder kompakt, und somit eine auflösbare Mannigfaltigkeit ist (oder äquivalent dazu, ob $\Gamma \cdot H$ eine abgeschlossene komplexe Untergruppe in G ist, wobei Γ die Isotropiegruppe eines beliebigen Punktes $x \in X$ darstellt). Es zeigt sich, daß dies für „ziemlich viele" Normalteiler in G richtig ist, z.B. für alle Glieder der Normalreihe von G, für das Nilradikal N oder, falls $G = N$, auch für die Glieder der absteigenden Zentralreihe.

Für den Beweis dieser Aussagen werden in Abschn. 1 zunächst Eigenschaften fast-uniformer (bzw. uniformer) Untergruppen komplexer Liegruppen zusammengestellt. Das sind Untergruppen $F \subset G$ derart, daß G/F nur konstante holomorphe Funktionen trägt (bzw. sogar kompakt ist).

Da beispielsweise jede arithmetische Untergruppe einer komplexen halbeinfachen einfachzusammenhängenden Liegruppe, etwa $SL(n, \mathbf{Z})$ in $SL(n, \mathbf{C})$, eine fast-uniforme Untergruppe ist, könnten diese Untergruppen möglicherweise auch von selbstständigem Interesse sein.

Ein Teil unserer Ergebnisse findet sich bereits in der Literatur (vgl. [7], [8]), jedoch stellt sich heraus, daß die Beweise bei Beschränkung auf den komplexen Fall durchgängig wesentlich einfacher werden. Vor allem sind sie „analytischer": an algebraischen Tatsachen wird nicht viel mehr als der Liesche Fahnensatz benötigt, während andererseits der Remmertsche Abbildungssatz, der besagt, daß das Bild einer analytischen Menge unter einer eigentlichen holomorphen Abbildung wieder eine analytische Menge ist, eine wichtige Rolle spielt.

0. Vorbereitungen

Die *Kommutatorgruppe* (G_1, G_2) zweier komplexer Untergruppen einer komplexen Liegruppe G ist die von allen Kommutatoren $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, $\sigma\in G_1$, $\tau\in G_2$, erzeugte komplexe Untergruppe von G. Die *Normalreihe* von G ist

$$G=:G^0\supset G':=(G,G)\supset G^{(2)}\supset\cdots\supset G^{(n)}:=(G^{(n-1)},G^{(n-1)})\ldots,$$

die *Zentralreihe*

$$G=:G^0\supset G'\supset\cdots\supset G^n:=(G,G^{n-1})\ldots.$$

G heißt *auflösbar* (bzw. *nilpotent*), falls für ein n gilt: $G^{(n+1)}=1$ (bzw. $G^{n+1}=1$). Das erste n mit dieser Eigenschaft heißt Länge der Normal-(bzw. Zentral-) Reihe. Das *Zentrum* von G bezeichnen wir mit Z_G, das *Nilradikal*, d.h. den maximalen zusammenhängenden nilpotenten Normalteiler, mit N_G. Der *Normalisator* einer Untergruppe $H\subset G$ sei $\mathcal{N}_G(H)$, der *Zentralisator* $\mathcal{Z}_G(H)$.

Jedem $\gamma\in G$ ordnen wir folgende holomorphe Abbildungen von G in sich zu:

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma&: G\ni\sigma\mapsto\sigma\gamma\sigma^{-1}\in G,\\ \mathrm{int}_\gamma&: G\ni\sigma\mapsto\gamma\sigma\gamma^{-1}\in G,\\ \mathrm{ad}_\gamma&: G\ni\sigma\mapsto\sigma\gamma\sigma^{-1}\gamma^{-1}\in G,\end{aligned}$$

Die Liealgebra einer Gruppe wird mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet. G^0 ist die Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe G. Der Homomorphismus

$$G\ni\gamma\mapsto(d\,\mathrm{int}_\gamma)_1\in GL(n,\mathbf{C}),\ n:=\dim_{\mathbf{C}}G$$

heißt *adjungierte Darstellung* von G. Sein Kern ist der Zentralisator von G^0. Da $GL(n,\mathbf{C})$ holomorph vollständig ist, ist die adjungierte Darstellung auf jeder kompakten zusammenhängenden analytischen Menge $K\subset G$ konstant. Insbesondere liegt jede kompakte komplexe zusammenhängende Untergruppe von G in Z_G.

Ist $F\subset G$ eine beliebige Untergruppe, so nennen wir eine holomorphe Funktion f auf G eine *F-invariante* (genauer: F-rechts-invariante) *Funktion*, falls

$$f(\sigma\tau)=f(\sigma)\quad\text{für alle}\quad\tau\in F.$$

$\mathcal{H}(G\bmod F)$ sei die $\mathbf{C}$-Algebra dieser Funktionen. Setzt man für ein holomorphes f und für $\varrho\in G$

$${}_\varrho f(\sigma):=f(\varrho\sigma),\qquad\sigma\in G,$$

so gehört mit f auch immer ${}_\varrho f$ zu $\mathcal{H}(G\bmod F)$. Daraus ergibt sich sofort die

FOLGERUNG: *Die Menge*

$$G^F := \{\sigma \in G : f(\sigma) = f(1) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathscr{H}(G \bmod F)\}$$

ist eine abgeschlossene komplexe Untergruppe von G mit $F \subset G^F$.

G heißt *holomorph separabel*, falls $G^{\{1\}} = \{1\}$. ($G^{\{1\}}$ ist stets ein zentraler und zusammenhängender Normalteiler in G [13].*)

Wir nennen F *fast-uniform* in G, falls $G^F = G$. (Dies impliziert den Zusammenhang von G/F.) Jede abgeschlossene Untergruppe F mit kompaktem zusammenhängendem G/F ist fast-uniform. Ein derartiges F heißt üblicherweise *uniform*. Ist eine abgeschlossene Untergruppe $F \subset G$ vorgegeben, so nennen wir eine abgeschlossene komplexe Untergruppe (bzw. einen Normalteiler) $H \subset G$ eine *F-Untergruppe* (bzw. einen *F-Normalteiler*), falls die drei folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt sind:

a) $F \cdot H$ ist abgeschlossen in G,

b) $H/(H \cap F)$ ist abgeschlossen in G/F,

c) $F/(F \cap H)$ ist abgeschlossen in G/H.

Falls H zusammenhängend und F uniform in G ist, hat man noch Äquivalenz mit

d) $H \cap F$ ist uniform in H.

Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset G$ nennen wir *Gitter*. Eine abelsche Gruppe C^n/Γ heißt *toroid*, falls $\mathscr{H}(\mathbf{C}^n \bmod \Gamma) \simeq \mathbf{C}$, d.h. Γ fast-uniform ist. (Γ wird hier durch eine Periodenmatrix P gegeben, und es gilt: Γ ist fast-uniform genau dann, wenn $P = (E, T)$, wo E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist und es zu T kein $\mathfrak{z} \in \mathbf{Z}^n$ gibt, derart daß $\mathfrak{z} \cdot T$ ganz ist; vergl. [10]).

1. Einige Dichte-Eigenschaften fast-uniformer und uniformer Untergruppen

Der bekannte Fahnensatz von S. LIE lautet: Es sei G eine auflösbare zusammenhängende komplexe Liegruppe und h: $G \to GL(n, \mathbf{C})$ ein holomorpher Homomorphismus. Dann gibt es ein $\sigma \in GL(n, \mathbf{C})$ so, daß alle Elemente aus $\sigma \cdot h(G) \cdot \sigma^{-1}$ Dreiecksmatrizen sind. Ähnlich wie in [4, Hilfssatz 3] folgern wir hieraus:

SATZ 1.1: *F sei fast-uniform in der auflösbaren komplexen Liegruppe G. Ist* $H \subset G$ *eine zusammenhängende komplexe Untergruppe mit*

$$F \subset \mathscr{N}_G(H),$$

so gilt:

$$\mathscr{N}_G(H) = G.$$

Beweis: Von der adjungierten Darstellung wird eine holomorphe Abbildung

$$a: G \to \mathrm{Graß}(m, n), \quad m := \dim H, \quad n := \dim G,$$

$$a(\sigma) := (d\,\mathrm{int}_\sigma)_1\, \mathfrak{h}$$

*) Bekanntlich ist ja jede holomorph separable Gruppe holomorph vollständig.

induziert. Weiter gibt es eine Einbettung b: $\text{Graß}(m, n) \hookrightarrow P^N(\mathbf{C})$ und einen Homomorphismus c: $G \to PGL(N, \mathbf{C})$ mit

$$b\,a(\tau\sigma) = c(\tau)\, b(a(\sigma)),\ \sigma, \tau \in G.$$

Da sich $b\,a$ über $G \to G/F$ faktorisieren läßt, wird jede auf $A := ba(G)$ holomorphe Funktion f zu einer F-invarianten holomorphen Funktion $f \circ ba$ auf G geliftet. Nach Voraussetzung ist also jedes auf A holomorphe f konstant. Insbesondere trifft A jede Hyperebene $E \subset P^N(\mathbf{C})$. Der Liesche Fahnensatz, angewendet auf die auflösbare Gruppe $c(G)$ liefert uns eine Fahne

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_N \subset P^N(\mathbf{C}), \quad \operatorname{codim} E_\nu = \nu,$$

die unter $c(G)$ invariant ist. Da $c(G)$ auf A transitiv operiert, folgt induktiv

$$A \subset E_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

d.h., A ist einpunktig.

Satz 1.1 besagt insbesondere, daß jede auflösbare Mannigfaltigkeit X Quotient von $\operatorname{Aut}(X)^0$ nach einer diskreten Untergruppe ist. Nach WANG [15] ist dies äquivalent damit, daß X parallelisierbar ist.

KOROLLAR 1.2: *$F \subset G$ sei wie in* 1.1. *Zusätzlich sei G einfachzusammenhängend und $H \subset G$ eine abgeschlossene komplexe Untergruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die F umfaßt. Dann gilt schon*

$$H = G.$$

Beweis: Wegen $H^0 \cap F \subset \mathcal{N}_G(H^0)$ ist H^0 nach Lemma 1.2 normal in G, denn $H^0 \cap F$ ist ebenfalls fast-uniform in G. Der Quotient G/H^0 ist eine komplexe Liegruppe ohne nichtkonstante holomorphe Funktionen, also toroid. Falls $\dim G/H^0 > 0$, ergäbe die exakte Homotopiesequenz

$$\cdots \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H^0) \to 1$$

einen Widerspruch zu $\pi_1(G/H^0) \neq 1$.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß für uniformes und diskretes F in 1.1 und 1.2 die Voraussetzung: „G ist auflösbar" fallengelassen werden kann.

Beweis: Sei also $F \subset H \subset G$, G einfachzusammenhängend und H zusammenhängend, dann gilt $H = G$. In der Tat: Wegen des Zassenhaus-Lemmas (vgl. [1, Proposition 2]) und 1.2 oben genügt es, die Aussage für halbeinfaches G zu beweisen. Wie im Beweis zu Satz 1.1 läßt sich die aus der adjungierten Darstellung resultierende Operation von G auf $\text{Graß}(n, h)$ ($h := \dim H$) über G/H faktorisieren, und da G/H kompakt ist, ergibt sich wie dort, daß jede (maximale) auflösbare Untergruppe $B \subset G$ einen Fixpunkt besitzt; das heißt aber, daß der Normalisator $\mathcal{N}_G(H^*)$ einer konjugierten H^* von H parabolisch ist (d.h. eine maximale auflösbare Untergruppe von G umfaßt).

$\mathcal{N}_G(H^*)$ ist jedoch unimodular, da es ein uniformes Gitter enthält. Daher folgt aus [14, 2.4.] $\mathcal{N}_G(H^*)=G$, d.h., H^* und damit auch H ist Normalteiler in G. G/H ist als kompakte Gruppe ein Torus und, da G halbeinfach war, folgt also $G=H$.

SATZ 1.3, a: *F sei fast-uniform in der holomorph-separablen komplexen Liegruppe G. (G ist genau dann holomorph-separabel, wenn $Z_G^0 \simeq (\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$ ist.) Dann gilt:*

$$\mathscr{Z}_G(F) = Z_G.$$

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathscr{Z}_G(F)$, $\tau \in F$ und $\sigma \in G$ gilt

$$\varphi_\gamma(\sigma\tau) = \sigma\tau\gamma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\gamma\sigma^{-1} = \varphi_\gamma(\sigma),$$

d.h., jedes auf G holomorphe f wird durch φ_γ zu einer F-invarianten holomorphen Funktion $f \circ \varphi_\gamma$ auf G geliftet. Da diese konstant ist, muß schon $f \mid \varphi_\gamma(G)$ konstant sein. Wegen der Holomorph-Separabilität von G ist $\varphi_\gamma(G)$ einpunktig, d.h.,

$$\varphi_\gamma(G) = \varphi_\gamma(1) = \{\gamma\},$$

und $\gamma \in Z_G$, w.z.b.w.

Obige Aussage läßt sich für uniforme Untergruppen wie folgt verschärfen:

SATZ 1.3, b: *F sei eine uniforme komplexe Untergruppe der zusammenhängenden komplexen Liegruppe G. Dann gilt entweder*

i) $\mathscr{Z}_G(F)=Z_G$

oder

ii) *Z_G enthält einen kompakten Normalteiler positiver Dimension.*

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathscr{Z}_G(F)$, $\tau \in F$ und $\sigma \in G$ gilt wie oben

$$\varphi_\gamma(\sigma\tau) = \sigma\tau\gamma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\gamma\sigma = \varphi_\gamma(\sigma),$$

d.h., die Abbildung φ_γ, $\gamma \in \mathscr{Z}_G(F)$, kann man über die Quotientenabbildung $\pi: G \to G/F$ faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & G \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\varrho} & \\ & G/F & \end{array}$$

Da π lokale Schnitte besitzt, ist mit φ_γ auch ϱ holomorph. Aus der Kompaktheit von G/F und dem Remmertschen Abbildungssatz [9] folgt, daß die kompakte Menge

$$\varphi_\gamma(G) = \varrho(G/F)$$

analytisch in G ist. Wenn G höchstens diskrete kompakte Untergruppen besitzt, ist $\varphi_\gamma(G)$ wegen des folgenden Lemmas 1.4 einpunktig, d.h.

$$\varphi_\gamma(G) = \varphi_\gamma(1) = \{\gamma\},$$

und $\gamma \in Z_G$, w.z.b.w.

LEMMA 1.4: *K sei eine irreduzible kompakte analytische Menge in der komplexen Liegruppe G mit $1 \in K$. Dann ist die von K erzeugte Untergruppe ein kompakter komplexer Normalteiler im Zentrum von G.*

Beweis: Wir definieren induktiv

$$\begin{aligned} K^1 &:= K \\ K^{2n} &:= K^{2n-1} K^{2n-1} := \{\sigma\tau : \sigma, \tau \in K^{2n-1}\} \\ K^{2n+1} &:= K^{2n}(K^{2n})^{-1} := \{\sigma\tau^{-1} : \sigma, \tau \in K^{2n}\} \end{aligned}$$

für $n \geqslant 1$. Nach dem Remmertschen Abbildungssatz sind diese Mengen analytisch in G. Außerdem sind sie irreduzibel, da K es ist, und bilden wegen $1 \in K$ eine aufsteigende Kette

$$K^1 \subset K^2 \subset \cdots \subset G.$$

Aus Dimensionsgründen bricht diese Kette ab, es gibt also eine K umfassende, von K erzeugte kompakte analytische Menge $H \subset G$ mit $HH = HH^{-1} = H$. D.h., H ist eine kompakte Untergruppe und deswegen zentral, w.z.b.w.

Das algebraische Analogon zu Lemma 1.4 findet sich in [6]. Zu 1.2 und 1.3 vgl. [3, Cor. 4.3 und Cor. 4.4, p. 187].

Anwendung von Satz 1.3, a: Jede halbeinfache komplexe Gruppe G hat ein endliches Zentrum. Deswegen ist auch das Zentrum jeder fast-uniformen Untergruppe von G endlich!

2. Nilpotente Gruppen

SATZ 2.1: *Eine zusammenhängende komplexe Liegruppe G, die eine fast-uniforme Untergruppe F enthält, ist genau dann nilpotent, wenn F es ist.*

Beweis durch vollständige Induktion nach $\dim G$: Wir zeigen, daß Z_G positive Dimension besitzt, falls F nilpotent. Denn dann ist $F/(F \cap Z_G)$ nilpotent und fast-uniform in G/Z_G, und diese Gruppe ist nilpotent nach Induktionsannahme. Also ist auch G als zentrale Erweiterung von G/Z_G nilpotent.

Sei deshalb Z_G diskret. Dann muß G insbesondere holomorph-separabel sein [13]. Aus Satz 1.3, a ergibt sich

$$1 \neq Z_F \subset \mathscr{Z}_G(F) \subset Z_G,$$

und Z_F ist ebenfalls diskret. $\phi: G \to G^* := G/Z_F$ sei der natürliche Epimorphismus. $F^* := F/Z_F$ ist nilpotent und fast-uniform in G^*. Falls G^* holomorph separabel wäre, wäre (wieder nach 1.3, a)

$$Z_{F^*} \subset Z_{G^*}.$$

Z_{F^*} müßte diskret sein, denn sonst hätte Z_{G^*} und damit Z_G positive Dimension! Folglich wäre $\phi^{-1}(Z_{F^*})$ diskret und normal, also zentral in G. Man hätte den Widerspruch, daß $\phi^{-1}(Z_{F^*})$ zentral in F wäre und (wegen $Z_{F^*} \neq 1$) Z_F echt enthielte. Also kann G^*

nicht holomorph separabel sein. Dann ist Z_{G^*} und damit Z_G positiv-dimensional, Widerspruch!

Bemerkung: Sei F insbesondere uniform, dann lassen sich im Reellen leicht Gegenbeispiele zur Aussage des obigen Satzes angeben. (Im Reellen ist eben eine kompakte Untergruppe nicht notwendig zentral!)

In einer nilpotenten einfachzusammenhängenden zusammenhängenden Liegruppe G ist die Exponentialabbildung biholomorph. Daher ist der Durchschnitt zweier zusammenhängender Untergruppen von G ebenfalls eine zusammenhängende Untergruppe von G. Zu jeder Teilmenge $M \subset G$ existiert somit die kleinste abgeschlossene zusammenhängende M umfassende Untergruppe $\langle M \rangle_G$ von G.

LEMMA 2.2: *Es gelte* $\langle M \rangle_G = G$. $\mathrm{Aut}^M(G)$ *sei die Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(G)$, *die* M *auf sich abbildet, und* $\mathrm{Aut}(M)$ *die Gruppe aller Selbstabbildungen von* M *auf sich. Dann ist der natürliche Homomorphismus*

$$h: \mathrm{Aut}^M(G) \to \mathrm{Aut}(M)$$

injektiv.

Beweis: Ist $\alpha \in \ker h$, so induziert $(d\alpha)_1$ auf allen Vektorräumen $\mathbf{C} \cdot \exp^{-1}(m)$, $m \in M$, die Identität. Es folgt $(d\alpha)_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ und $\alpha = \mathrm{id}_G$.

FOLGERUNG 2.3: *Für jedes Gitter* Γ *in* G *ist* $\mathrm{Aut}^\Gamma(\langle \Gamma \rangle_G)$ *eine diskrete Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(\langle \Gamma \rangle_G)$.

Beweis: $A := \mathrm{Aut}^\Gamma(\langle \Gamma \rangle_G)$ ist analytisch in $\mathrm{Aut}(\langle \Gamma \rangle_G)$. Liegen α und $\alpha' \in A$ in der gleichen Zusammenhangskomponente von A, so ist

$$\alpha \mid \Gamma = \alpha' \mid \Gamma$$

da Γ diskret vorausgesetzt. Aus 2.2 folgt $\alpha = \alpha'$. Da alle Zusammenhangskomponenten von A einpunktig sind, ist A diskret.

SATZ 2.4: *Für jedes fast-uniforme Gitter* Γ *in einer zusammenhängenden, einfachzusammenhängenden, nilpotenten komplexen Liegruppe* G *ist* Z_G *ein* Γ*-Normalteiler.*

Beweis: Wegen 1.2 ist $\langle \Gamma \rangle_G = G$. $\mathrm{Aut}^\Gamma(G)$ ist also diskret in $\mathrm{Aut}(G)$. Der Kern der Abbildung

$$\mathrm{int}: G \ni \sigma \mapsto \mathrm{int}_\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$$

ist gerade Z_G und das Bild $\mathrm{int}(\Gamma)$ als Teilmenge von $\mathrm{Aut}^\Gamma(G)$ abgeschlossen in $\mathrm{Aut}(G)$. Dann ist auch

$$Z_G \cdot \Gamma = \mathrm{int}^{-1}(\mathrm{int}\, \Gamma)$$

abgeschlossen in G.

Wir benötigen vor allem diese Folgerung aus Satz 2.4: Unter den Voraussetzungen von 2.4 besitzt G eine aufsteigende Kette

$$\{1\} = L_0 \Subset L_1 \Subset \cdots \Subset L_m \Subset L_{m+1} = G$$

von Γ-Normalteilern mit $L_{\mu+1}/L_\mu \subset Z_{G/L_\mu}$, $0 \leqslant \mu \leqslant m$. Diese Aussage liefert uns den Induktionsschluß für

SATZ 2.5 (s. auch MALCEV [7]): *Γ sei uniform und diskret in der nilpotenten zusammenhängenden komplexen Gruppe G. Dann ist G' ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: O.B.d.A. nehmen wir G einfachzusammenhängend an. Die Behauptung zeigen wir durch Induktion nach $\dim G$:

a) Zunächst setzen wir $G^2 = (G, G') = 1$ voraus. Wegen $\Gamma' \subset G' \subset Z_G$ ist dann Γ' ein Normalteiler. Γ/Γ' ist abelsch und uniform in G/Γ'. Nach 1.3, b ist dann entweder G/Γ' (und damit G) auch abelsch, oder G/Γ' enthält einen kompakten Normalteiler K positiver Dimension. Dessen Urbild in G sei L. Da $L^0/L^0 \cap \Gamma'$ kompakt ist, muß $L^0 \cap \Gamma'$ uniform in L^0 sein. Da $G' \cap L^0$ zusammenhängt, folgt aus 1.2

$$L^0 \subset G'.$$

Die Induktionsannahme für G/L^0 ergibt dann die Behauptung.

b) Im Allgemeinfall liefert uns 2.4 einen zusammenhängenden Γ-Normalteiler $L \Subset G$ mit $G' \subset L$. Nach Induktionsannahme für L ist L' ein Γ-Normalteiler. Auf G/L' ist dann a) anwendbar und ergibt die Behauptung.

3. Auflösbare Gruppen

Das Analogon zu Satz 2.1 gilt für auflösbare Untergruppen F (selbst für uniforme) i.a. nicht: Borelsche Untergruppen halbeinfacher Gruppen sind uniform und auflösbar. Man muß F zusätzlich diskret voraussetzen.

SATZ 3.1: *Γ sei ein uniformes Gitter in der zusammenhängenden komplexen Liegruppe G. Dann ist G genau dann auflösbar, wenn Γ es ist.*

Beweis: O.B.d.A. kann man G einfachzusammenhängend annehmen: $\pi: \tilde{G} \to G$ sei die universelle Überlagerung. Da $\ker \pi = \pi_1(G)$ abelsch ist, muß $\pi^{-1}(\Gamma)$ auflösbar sein. Wir ersetzen dann G durch $\tilde{G}$.

Ist die Gruppe G einfachzusammenhängend, so auch ihr Radikal R (der größte zusammenhängende auflösbare Normalteiler von G). $\varrho: G \to G/R$ sei die Projektion auf die halbeinfache Gruppe G/R. Nach dem ZASSENHAUS–Lemma [1] ist $\varrho\Gamma \subset G/R$ ein uniformes Gitter. Da G/R algebraisch ist, existiert die kleinste algebraische Untergruppe $H \subset G/R$, welche $\varrho\Gamma$ umfaßt. H ist ebenfalls auflösbar. Da H nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt, kann man die Bemerkung nach 1.2 auf H^0 anwenden und erhält $H^0 = G/R$, d.h. $G = R$.

ABSPALTUNGSSATZ 3.2: *Die komplexe Gruppe G sei zusammenhängend, einfachzusammenhängend und auflösbar. $F \subset G$ sei eine abgeschlossene komplexe fast-uniforme Untergruppe. Dann gilt entweder*

i) *G ist nilpotent,*

oder

ii) *G besitzt einen echten abgeschlossenen komplexen F-Normalteiler L positiver Dimension.*

Beweis: Wegen Satz 1.1 ist F^0 ein F-Normalteiler in G. Wir können also o.B.d.A. $F=\Gamma$ diskret annehmen. Nach Satz 1.1 ist $S=\langle\Gamma'\rangle_{G'}$ Normalteiler in G. Der Homomorphismus

$$\alpha: G\ni\sigma\mapsto \mathrm{int}_\sigma \,\big|\, S\in \mathrm{Aut}(S)$$

bildet Γ in die nach 2.3 diskrete Untergruppe $\mathrm{Aut}^{\Gamma'}(S)$ von $\mathrm{Aut}(S)$ ab. Da $\alpha(\Gamma)$ abgeschlossen, ist $L:=K^0$, $K:=\ker\alpha$, ein Γ-Normalteiler in G. Wegen

$$\dim Z_{G'} > 0$$

ist L positiv-dimensional. Falls $L=G$, läge Γ' in Z_G und Γ wäre nilpotent. Nach 2.1 müßte dann auch G nilpotent sein.

Für den Rest des Paragraphen werde die komplexe Gruppe G zusammenhängend, einfachzusammenhängend und auflösbar vorausgesetzt. $\Gamma\subset G$ sei ein uniformes Gitter. Wir zeigen, daß dann alle Glieder der Normalreihe und der Zentralreihe von G wieder Γ-Normalteiler sind. Voraus schicken wir eine Reihe von Hilfssätzen:

Lemma 3.3: *$A\subset G$ sei ein zusammenhängender abgeschlossener abelscher komplexer Γ-Normalteiler. Dann ist auch $\langle(\Gamma,\Gamma\cap A)\rangle_A$ ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: A ist ein $\mathbf{C}$-Vektorraum und $\langle(\Gamma,\Gamma\cap A)\rangle_A=\mathbf{C}\cdot(\Gamma,\Gamma\cap A)$ ein $\mathbf{C}$-Untervektorraum. Für jedes $\gamma\in G$ ist $\mathrm{int}_\gamma \,|\, A$ und dann auch

$$\mathrm{ad}_\gamma \mid A = \mathrm{int}_\gamma \mid A - \mathrm{id}_A$$

eine $\mathbf{C}$-lineare Selbstabbildung von A. Da $\Gamma\cap A$ uniform in A ist, gilt

$$A=\mathbf{R}\cdot(\Gamma\cap A),$$

und es folgt für alle $\gamma\in\Gamma$

$$i\cdot \mathrm{ad}_\gamma(\Gamma\cap A)=\mathrm{ad}_\gamma(i\cdot(\Gamma\cap A))\subset \mathrm{ad}_\gamma(\mathbf{R}(\Gamma\cap A))=\mathbf{R}\cdot\mathrm{ad}_\gamma(\Gamma\cap A).$$

Deswegen ist $\mathbf{C}\cdot(\Gamma,\Gamma\cap A)=\mathbf{R}\cdot(\Gamma,\Gamma\cap A)$ eine Γ-Untergruppe von G. Weil $(\Gamma,\Gamma\cap A)$ Normalteiler in Γ ist, muß auch $\mathbf{C}\cdot(\Gamma,\Gamma\cap A)$ nach Lemma 1.1 ein Normalteiler in G sein.

Lemma 3.4: *A und $\Gamma\subset G$ seien wie in* 3.3. *Dann gilt*

$$(G,A)=\mathbf{C}(\Gamma,\Gamma\cap A).$$

Beweis: Die Inklusion $W:=\mathbf{C}\cdot(\Gamma,\Gamma\cap A)\subset(G,A)$ ist trivial. – Wir bezeichnen die Restklassenabbildung $G\to G/W$ mit w. Zunächst ist $(\Gamma,A)\subset W$, denn $\Gamma\cap A$ erzeugt A und $\mathrm{ad}_\gamma \,|\, A$ ist für alle $\gamma\in\Gamma$ eine komplex lineare Abbildung. Dann folgt aber $(G, A) \subset W$. In der Tat: Für alle $\gamma \in \Gamma$, $\sigma \in G$ und $\tau \in A$ ist mit

$$\beta := \gamma\tau\gamma^{-1}\tau^{-1} \in (\Gamma, A) \subset W$$
$$w\,\mathrm{ad}_\tau(\sigma\gamma) = w(\sigma\gamma\tau\gamma^{-1}\sigma^{-1}\tau^{-1}) = w(\sigma\beta\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) =$$
$$= w((\sigma\beta\sigma^{-1})(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})) = w\,\mathrm{ad}_\tau(\sigma).$$

$w\,\mathrm{ad}_\tau : G \to A/W$ ist also über G/Γ faktorisierbar und deswegen konstant. Es folgt $\mathrm{ad}_\tau(\sigma) \in W$ für alle $\sigma \in G$, w.z.b.w.

LEMMA 3.5: *G sei eine zusammenhängende, einfachzusammenhängende, auflösbare, komplexe Liegruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete uniforme Untergruppe. Für jeden zusammenhängenden abgeschlossenen Γ-Normalteiler $H \subset G$, dessen Kommutatorgruppe H' wieder ein Γ-Normalteiler ist, ist dann auch (G, H) ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: Der natürliche Epimorphismus $G \to G/H'$ bildet H auf einen abelschen Normalteiler $H^* \subset G^* := G/H'$ ab. Nach 3.4 und 3.3 ist (G^*, H^*) ein $\Gamma/\Gamma \cap H'$-Normalteiler in G. Dessen Urbild ist ein Γ-Normalteiler in G und stimmt mit (G, H) überein, da $H' \subset (G, H)$.

LEMMA 3.6: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann gilt*

i) *$G^\infty := \bigcap G^n$ ist Γ-Normalteiler.*

ii) *G' ist Γ-Normalteiler.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß für G auch ii) erfüllt ist, falls i) für G gilt. Dazu setzen wir $G^* = G/G^\infty$ und $\Gamma^* := \Gamma/\Gamma \cap G^\infty$. Da G^* nilpotent ist, ist $(G^*)'$ wegen 2.5 ein Γ^*-Normalteiler in G^*. Aus $G^\infty \subset G'$ folgt, daß dann auch G' ein Γ-Normalteiler ist.

Wir zeigen nun i) durch Induktion nach $\dim_{\mathbf{C}} G$. Der Induktionsanfang ($\dim_{\mathbf{C}} G = 1$) ist trivial. Als Induktionsannahme sei ii) erfüllt für alle auflösbaren komplexen Gruppen kleinerer Dimension als G. Nach dem Abspaltungssatz 3.2 findet man einen abgeschlossenen Γ-Normalteiler L mit

$$G' \subset L.$$

Nach Induktionsannahme ist L' ein $\Gamma \cap L$-Normalteiler in L und deswegen auch Γ-Normalteiler in G. Ebenso sind nach 3.5 alle Gruppen

$$(G, (G, (\,..(G, L).)))$$

Γ-Normalteiler in G. Wegen $G' \subset L$ läßt sich auch G^∞ in dieser Form darstellen, w.z.b.w.

Lemma 3.5 und 3.6 zusammen ergeben schließlich den angestrebten Verträglichkeitssatz.

SATZ 3.7: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann ist mit $H \subset G$ auch (G, H) ein Γ-Normalteiler in G.*

SATZ 3.8: *$\Gamma \subset G$ sei wie oben. Dann ist das Nilradikal N_G ein Γ-Normalteiler.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst für abelsches G^∞. Dazu betrachten wir den Homomorphismus

$$a: G \ni \sigma \mapsto \mathrm{int}_\sigma \mid G^\infty .$$

Mit G ist auch aG auflösbar und nach LIE besitzt der $\mathbf{C}$-Vektorraum G^∞ also eine Basis, bezüglich der alle Transformationen $a(\sigma)$ obere Dreiecksgestalt haben. Die Gruppe aller Transformationen aus $\mathrm{Aut}(G^\infty)$, welche bezüglich dieser Basis obere Dreiecksgestalt haben, sei D. $D' \subset D$ ist die Gruppe der Matrizen, welche nur den Eigenwert 1 haben. Dann gilt

$$N_G = a^{-1}(D').$$

Ist $C \subset D$ die Gruppe der Diagonalmatrizen, so schreibt sich D als halbdirektes Produkt

$$D = C \circ D'.$$

Definiert man kanonisch

$$b: D \to D/D' = C,$$

so gilt

$$b(D \cap \mathrm{Aut}^{\Gamma \cap G^\infty}(G^\infty)) \subset \mathrm{Aut}^{\Gamma \cap G^\infty}(G^\infty),$$

denn $b(\sigma)$, $\sigma \in D$, ist ein Polynom in der Matrix σ (s. etwa [5, § 5]). Nach 2.3 ist also $ba(\Gamma)$ diskret in C. Weil

$$N_G = \ker b\,a,$$

ist diese Untergruppe ein Γ-Normalteiler.

Die allgemeine Aussage beweisen wir durch Induktion nach $\dim_{\mathbf{C}} G$: Wegen 3.6 ist $\Gamma^* := \Gamma/\Gamma \cap (G^\infty)'$ uniform und diskret in $G^* := G/(G^\infty)'$. Wir wissen bereits, daß N_{G^*} ein Γ^*-Normalteiler in G^* ist. Das Urbild H von N_{G^*} in G ist auch ein Γ-Normalteiler und von G verschieden, falls $G^\infty \neq 1$, was wir o.B.d.A. ja annehmen können. Wegen $N_G \subset H$ gilt

$$N_G = N_H,$$

und die Induktionsannahme liefert die Behauptung.

4. Homogene Torustürme

Wir geben zunächst die

DEFINITION: Ein *Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge* 1 ist ein komplexer Periodentorus. Ein *Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge $n > 1$* ist ein holomorphes Torus–(Prinzipal-) Bündel über einem Torus- (Prinzipal-) Turm der Länge $n-1$.

SATZ 4.1: *Für eine kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeit X sind* *äquivalent:*

i) $\mathrm{Aut}(X)^0$ *ist auflösbar (bzw. nilpotent).*

ii) X *ist Torusturm (bzw. Torusprinzipalturm).*

Beweis durch vollständige Induktion nach $\dim X$:

i) $\succ$ ii) Nach 1.1 ist $X=G/\Gamma$ mit $G=\mathrm{Aut}(X)^0$ und einem uniformen Gitter $\Gamma\subset G$. Nun sei

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} = 1$$

die Normalreihe (bzw. Zentralreihe von G). Nach 3.6 ist G_n ein Γ-Normalteiler in G. Wegen [12, p. 30] ist $X=G/\Gamma$ ein holomorphes Faserbündel über $X':=G/\Gamma G_n$ mit Faser $G_n/\Gamma\cap G_n$ und Strukturgruppe ΓG_n, die auf $G_n/\Gamma\cap G_n=\Gamma G_n/\Gamma$ durch Linkstranslation operiert. Da die Faser ein Torus ist, und die Basis

$$X' = G/G_n \Big/ \Gamma/\Gamma \cap G_n$$

nach Induktionsvoraussetzung ein Torusturm, so ist auch X ein Torusturm. (Für nilpotentes G ist Γ Normalteiler in ΓG_n und X daher ein Prinzipalbündel über dem Torusturm X', der nach Induktionsvoraussetzung ein Prinzipalturm ist.)

ii) $\succ$ i) Nach Definition gibt es eine holomorphe Faserung

$$\pi : X \to X^*,\ \dim X^* < \dim X\,,$$

mit komplexen Tori als Fasern. Nach [11] hat man eine exakte Gruppensequenz

$$0 \to H \to G \to G^*$$

wo $G:=\mathrm{Aut}(X)^0$, $G^*:=\mathrm{Aut}(X^*)^0$ und H der Durchschnitt der Isotropiegruppen aller π-Fasern.

Ist $R\subset G$ das Radikal von G (d.h. der maximale auflösbare zusammenhängende Normalteiler), so gibt es nach Levi eine halbeinfache komplexe Untergruppe $S\subset G$ mit $S\cdot R=G$. Da G^* nach Induktionsannahme auflösbar ist, gilt

$$S \subset H\,.$$

Ist A_x die Translationsgruppe einer π-Faser $F_x:=\pi^{-1}(\pi x)$, $x\in X$, so liegt S^0 sogar im Kern der kanonischen Abbildung

$$H^0 \to A_x\,.$$

Da dies für alle $x\in X$ gilt, folgt $S^0=\{1\}$, d.h. $G=R$ ist auflösbar.

(Falls π ein Prinzipalbündel ist, sind die Translationen der Fasern mit den Übergangsfunktionen des Bündels vertauschbar. Also ist H kompakt und in Z_G enthalten. Mit dem nach Induktionsannahme nilpotenten G^* ist dann auch G nilpotent.)

LITERATUR

[1] L. AUSLANDER, *On radicals of discrete subgroups of Lie groups*, Am. Journal of Math. *85* (1963), 145–150.
[2] S. BOCHNER and D. MONTGOMERY, *Groups on analytic manifolds*, Ann. Math. *48* (1947), 659–669.
[3] A. BOREL, *Density properties for certain subgroups of semi-simple Groups without compact components*, Ann. of Math. *72* (1960), 179–188.
[4] A. BOREL und R. REMMERT, *Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. *145* (1962), 429–439.
[5] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. VII.
[6] Seminaire Chevalley, Volume 1.
[7] A. J. MALCEV, *On a class of homogeneous spaces*, AMS Transl. Series 1, vol. *9*.
[8] G. D. MOSTOW, *Factor spaces of solvable groups*, Ann. of Math. *60* (1954).
[9] R. REMMERT, *Projektionen analytischer Mengen*, Math. Ann. *130* (1956), 410–441.
[10] R. REMMERT, *Abelsche komplexe Liegruppen*, unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript.
[11] R. REMMERT und T. VAN DE VEN, *Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten*, Topology *2* (1963), 137–157.
[12] N. STEENROD, *Topology of Fibre Bundles* (Princeton 1951).
[13] K. STEIN, *Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume*, Archiv. d. Math. *7* (1956), 354–361.
[14] J. TITS, *Espaces homogenes complexes compacts*, Commentarii Math. Helv. *37* (1962), 111–120.
[15] H. C. WANG, *Complex parallelisable manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. *5* (1954), 771–776.

Eingegangen den 12. Juli 1968