Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum

H. M. REIMANN (Zürich)

Einleitung

Für den 3-dim. euklidschen Raum E^3 wurde eine Theorie der quasikonformen Abbildungen entwickelt (siehe z.B. GEHRING [4], VÄISÄLÄ [10]), die viele Merkmale der Theorie für die Ebene beibehält. Die Definition der quasikonformen Abbildungen im Raum stützt sich auf den Begriff der konformen Kapazität von Ringen. Ein Ring R in E^3 ist das homömorphe Bild von $\{x \mid 0<a<|x|<b\}$. Betrachtet man alle stetig differenzierbaren Funktionen u mit dem Randwert 0 auf der einen Randkomponente und dem Randwert 1 auf der anderen, so heisst die Grösse $M_3=\inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^3 \, dx$ „konforme Kapazität" von R (nach LOEWNER). Eine quasikonforme Abbildung im Raum ist dann ein Homöomorphismus von einem Gebiet G in E^3 auf ein Gebiet G' mit der Eigenschaft, dass für eine gewisse Konstante K und für alle Ringe R mit $\bar{R} \subset G$ und Bild R' die Ungleichung $M_3(R) \leqslant K M_3(R')$ besteht. Die vorliegende Studie befasst sich mit den Abbildungen, die man erhält, wenn die konforme Kapazität in dieser Definition durch die harmonische $M_2(R)=\inf_u \int_R |\operatorname{grad} u|^2 \, dx$ ersetzt wird. Die harmonische Kapazität eines Ringes ist gleich dem Wert des Dirichletintegrals derjenigen harmonischen Funktion in R, welche das verallgemeinerte Dirichlet-Randwertproblem mit den Werten 0 und 1 auf den beiden Randkomponenten löst. Der Kapazitätsbegriff wird im folgenden durch den allgemeineren Begriff des Moduls ersetzt. Diese beiden Begriffe fallen für Ringe zusammen (vgl. (1.7)).

Die Methoden, welche die Untersuchung derartiger Abbildungen gestatten, stammen grösstenteils aus der Theorie der quasikonformen Abbildungen. Handelt es sich im ersten Abschnitt noch um Diffeomorphismen, so werden im zweiten und dritten die gewonnenen Resultate auf Homöomorphismen ohne a priori Regularitätsvoraussetzungen übertragen. Das Schwergewicht liegt hier demzufolge bei der Abklärung von Regularitätseigenschaften. Der letzte Abschnitt dient der Herleitung einer Normalfamilien-Eigenschaft. Die Resultate, die sich wesentlich von der Theorie der quasikonformen Abbildungen abheben, sind in den Sätzen 1 und 3 enthalten.

Herrn Prof. A. PFLUGER möchte ich an dieser Stelle für die mannigfachen Anregungen und für das rege Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, meinen ganz besonderen Dank aussprechen.

I. Ein Äquivalenz-Satz

In diesem Abschnitt werden Diffeomorphismen mit gewissen speziellen Eigenschaften studiert. Die Abbildung h, die ein Gebiet $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$ abbildet, ist im Punkte $x^* \in G$ differenzierbar, wenn es eine lineare Transformation H gibt, für welche die Beziehung

$$h(x) = h(x^*) + H(x - x^*) + o(|x - x^*|)$$

besteht. Wird die Abbildung mit Hilfe kartesischer Koordinaten beschrieben, so ist $H = H(x^*)$ die Funktionalmatrix im Punkte x^*. h ist eine in G stetig differenzierbare Abbildung, falls $H(x)$ in G definiert ist und stetig ist. h ist ein Diffeomorphismus, falls die inverse Abbildung h^{-1} existiert und falls h und h^{-1} stetig differenzierbar sind. Ist h ein Diffeomorphismus von G auf G', so ist H als Matrix in allen Punkten von G regulär. Es werden nur Abbildungen in E^3 (3-dim. euklidscher Raum) betrachtet, obwohl sich gewisse Resultate ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen lassen. Alle betrachteten Gebiete G, G' liegen also in E^3.

Den Ausgangspunkt bilden Diffeomorphismen, für welche die relative Änderung des Dirichletintegrals beschränkt ist.

Wir sagen, der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ habe die Eigenschaft (D), falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für alle in G stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen u mit $u' = u \circ h^{-1}$ die Ungleichung

$$\int_G \operatorname{grad}^2 u \, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \tag{D}$$

gilt. (Mit m wird das 3-dim. Lebesgue-Mass bezeichnet, das Volumenelement entsprechend mit dm. Zur Kennzeichnung der Variablen wird dafür auch dx geschrieben.)

Zuerst soll gezeigt werden, dass (D) mit einer lokalen Eigenschaft (L) gleichwertig ist. Ist H^* die Transponierte der Funktionalmatrix H, so besitzt HH^* nach einem Satz der linearen Algebra drei reelle positive Eigenwerte $\lambda_1^2 \geqslant \lambda_2^2 \geqslant \lambda_3^2 > 0$ Diese Eigenwerte sind stetige Funktionen von x und es gilt

$$\lambda_1 = \max_{|x|=1} |Hx|, \qquad |\det H| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich eine Eigenschaft (L) formulieren:

Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ besitzt die Eigenschaft (L), falls eine Zahl K existiert mit

$$\lambda_1 / \lambda_2 \lambda_3 \leqslant K \qquad \text{für alle } x \text{ in } G \tag{L}$$

Bemerkungen

1) Zusammen mit der Konvention $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ ist die Bedingung $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K$ mit den drei Ungleichungen $\lambda_i \lambda_j / \lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von (1, 2, 3) aequivalent. Ist nämlich $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, so gilt $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \geqslant \lambda_2/\lambda_1\lambda_3 \geqslant \lambda_3/\lambda_1\lambda_2$.

2) Der Ausdruck $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3$ ist invariant gegenüber der Zusammensetzung von h mit einer Translation oder einer Rotation.
3) Aus $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ folgt $\lambda_i \geqslant K^{-1}$ $i=1, 2, 3$ aber nicht umgekehrt, wie das Beispiel $h(x)=(ax_1, K^{-1}x_2, K^{-1}x_3)$ mit $a>K^{-1}$ zeigt. Aus der Bedingung $\lambda_i \geqslant K^{-1}$ folgt, dass der inverse Diffeomorphismus h^{-1} in jedem konvexen Teilgebiet von G' einer Lipschitzbedingung der Form
$$|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leqslant K|x-y| \quad \text{genügt.}$$

Dass aus der Eigenschaft (L) die Eigenschaft (D) folgt sieht man leicht:

$$\begin{aligned}\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm &= \int_{G'} (H \operatorname{grad} u')^2\, |\det H|^{-1}\, dm \\ &\leqslant \int_{G'} \max_{|x|=1} |Hx|^2 \operatorname{grad}^2 u' \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\, dm \\ &= \int_{G'} \frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} \operatorname{grad}^2 u'\, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm\end{aligned}$$

für alle in G stetig differenzierbaren Funktionen u.

Die Umkehrung ist der Inhalt von

LEMMA 1. *Erfüllt ein Diffeomorphismus* $h: G \to G'$ *die Bedingung* (D), *so erfüllt er auch die Bedingung* (L).

Der Beweis verläuft indirekt. Es sei $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 = C > K$ im Punkte $x^* \in G$. Wegen der Invarianz der Bedingungen (D) und (L) gegenüber Translationen und Rotationen, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $x^* = 0$ und

$$h(x) = Hx + o(|x|) \quad \text{mit} \quad H = H(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(Bekanntlich lässt sich eine $n \times n$ Matrix M mit Hilfe von orthogonalen Matrizen O_1 und O_2 in der Form $M = O_1 H O_2$ darstellen, wobei H eine Diagonalmatrix ist). Die zur Funktionalmatrix $H(x)$ inverse Matrix $H^{-1}(x)$ schreiben wir in der Form $H^{-1}(x) = (v_{ij}(x))$. Dann ist

$$v_{ij}(0) = \delta_{ij} v_i \quad \text{mit} \quad v_i^{-1} = \lambda_i$$

Da die v_{ij} nach Voraussetzung stetige Funktionen sind, gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < |v_1 v_2 v_3|$, ein $\delta > 0$, so dass

$$A = \{x \mid |x_i| < \delta,\ i = 1, 2, 3\} \subset G \quad \text{und dass für alle } x \in A$$
$$|v_{ij}(x) - v_{ij}(0)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\det H(x)| < (|v_1 v_2 v_3| - \varepsilon)^{-1}$$

Wir verwenden die Familie von stetig differenzierbaren Funktionen:

$$u_{(n,\varepsilon)}(x) = u(x) = \begin{cases} \left(1+\cos\dfrac{n\pi x_1}{\delta}\right)\left(1+\cos\dfrac{\pi x_2}{\delta}\right)\left(1+\cos\dfrac{\pi x_3}{\delta}\right) & \text{für } x \in A \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$n=1,2\ldots\ 0<\varepsilon<|\nu_1\nu_2\nu_3|$. Es ist

$$\operatorname{grad} u(x) = -\frac{\pi}{\delta}\left(n\sin\frac{n\pi x_1}{\delta}\left(1+\cos\frac{\pi x_2}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_3}{\delta}\right),\right.$$
$$\left(1+\cos\frac{n\pi x_1}{\delta}\right)\sin\frac{\pi x_2}{\delta}\left(1+\cos\frac{\pi x_3}{\delta}\right),$$
$$\left.\left(1+\cos\frac{n\pi x_1}{\delta}\right)\left(1+\cos\frac{\pi x_2}{\delta}\right)\sin\frac{\pi x_3}{\delta}\right)$$

für $x \in A$

$$= 0 \quad \text{sonst, und} \quad \int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm = g\pi^2(n^2+2)\,\delta$$

Mit $u'(h(x)) = u(x)$ erhält man aus

$$\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm = \int_G (\operatorname{grad} u \cdot H^{-1})^2\, |\det H|\, dm$$

nach einiger Rechnung die Abschätzung

$$\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm \leqslant \frac{\pi^2\delta}{|\nu_1\nu_2\nu_3| - \varepsilon}\left[g n^2(|\nu_1|+\varepsilon)^2 + c_1\varepsilon^2 n^2 + c_2\varepsilon n + O(\varepsilon)\right]$$

c_1 und c_2 sind von n und ε unabhängige Konstanten. Daraus schliesst man, dass

$$\frac{\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm}{\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm} \leqslant \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{-1}\left[\frac{(|\nu_1|+\varepsilon)^2}{|\nu_1\nu_2\nu_3|-\varepsilon} + O(\varepsilon^2) + O\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)\right]$$

Da über n und ε noch frei verfügt werden kann, setzen wir jetzt $\varepsilon = n^{-1}$. Der Grenzwert für $n\to\infty$ der rechten Seite der letzten Ungleichung ist dann C^{-1}. Es lässt sich also ein n_0 finden, derart dass

$$\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm > K\int_{G'} \operatorname{grad}^2 u'\, dm \qquad \text{für } u = u_{(n_0,\,1/n_0)}.$$

Um eine dritte, aequivalente Eigenschaft zu formulieren, verwenden wir den Begriff des Moduls einer Kurvenschar. Wir stützen uns dabei auf die Untersuchungen von FUGLEDE [2] und VÄISÄLÄ [10] und [11].

Linienintegrale

Eine Teilmenge γ von E^3 ist eine Kurve, falls γ homöomorph zu einem offenen, halboffenen oder abgeschlossenem Intervall ist. Eine rektifizierbare Kurve der Länge l kann mit Hilfe der Bogenlänge parametrisiert werden: $x=x(s)$. Das Linienintegral der nicht negativen, Borel-messbaren Funktion ϱ über γ ist dann als

$$\int_\gamma \varrho\, ds = \int_0^l \varrho(x(s))\, ds$$

definiert. (Der Wert ∞ ist zugelassen.) Ist die Kurve lokal rektifizierbar, so ist das Integral als uneigentliches Integral definiert.

Der Modul einer Kurvenschar Γ

Wir bezeichnen mit $F(\Gamma)$ die Familie der nicht negativen, Borel-messbaren Funktionen $\varrho(x)$, die der Bedingung

$$\int_\gamma \varrho\, ds \geqslant 1$$

für alle lokal rektifizierbaren Kurven $\gamma \in \Gamma$ genügen.

DEFINITION: *Sei $p \geqslant 1$, m das 3-dim. Lebesgue-Mass. Der p-Modul einer beschränkten Kurvenschar Γ ist die reelle Zahl*

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in F(\Gamma)} \int_{E^3} \varrho^p\, dm$$

Die nicht lokal rektifizierbaren Kurven der Schar treten also in dieser Definition gar nicht in Erscheinung. Wird das Integral einer Funktion über eine nicht lokal rektifizierbare Kurve mit Hilfe des 1-dim. Hausdorff-Masses definiert, so lässt sich zeigen, dass $M_p(\Gamma)=0$, wenn das System Γ nur aus nicht lokal rektifizierbaren Kurven besteht.

Beispiele

1) Ein Tripel $Z=(Q, E_0, E_1)$ nennen wir einen Zylinder in E^3, wenn es einen Homöomorphismus h vom Einheitszylinder $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$ auf die abgeschlossene Hülle des Gebietes Q gibt, der $x_3=0$ $(x_1^2+x_2^2 \leqslant 1)$. Auf E_0 und $x_3=1$ auf E_1 abbildet. Die Kurven in Q mit Anfangs- und Endpunkt in E_0 bezw. E_1 stellen eine Kurvenschar Γ_Z dar. Unter dem p-Modul $M_p(Z)$ eines Zylinders versteht man den p-Modul dieser Schar.

Der Modul eines geraden Zylinders mit der (ebenen) Grundfläche E_0 und der Höhe h lässt sich leicht berechnen: Wählt man $\varrho = h^{-1}$ so gilt $\int_\gamma h^{-1}\, ds \geqslant 1$ und daher

$$M_p(Z) \leqslant \int_Q h^{-p}\, dm = h^{-p} m(Q)$$

Anderseits gilt für alle Funktionen $\varrho \in F(\Gamma)$ und für alle Kurven $\gamma' \in \Gamma_Z$ parallel zur Zylinderachse:

$$1 \leqslant \left(\int_{\gamma'} \varrho\, ds\right)^p \leqslant \left(\int_{\gamma'} \varrho^p\, ds\right) \cdot h^{p-1}$$

und daher

$$\int_Q \varrho^p\, dm = \int_{E_0} \int_{\gamma'} \varrho^p\, dm \geqslant m(Q)\, h^{-p}.$$

Daraus schliesst man, dass $M_p(Z) = m(Q)\, h^{-p}$. Setzt man für einen beliebigen Zylinder anstelle von h den Abstand d von E_0 und E_1 ein, so erhält man mit $\varrho = d^{-1}$ ein Analogon zur Rengelschen Ungleichung:

$$M_p(Z) \leqslant m(Q)\, d^{-p} \tag{1.1}$$

2) Ein Ring R ist ein beschränktes Gebiet in E^3, das homöomorph zu $R(a, b) = \{x \mid a < |x| < b,\ 0 < a < b\}$ ist. Der Rand von R besitzt zwei Komponenten: eine innere D_0 und eine äussere D_1. Der Modul eines Ringes, $M_p(R)$, ist der Modul derjenigen Kurvenschar Γ_R, welche aus den Kurven in R besteht, die D_0 und D_1 verbinden. Zur Berechnung des p-Moduls von $R(a, b)$ für $p > 1$ werden folgende Funktionen verwendet:

$$\varrho_p = \frac{p-3}{p-1} \frac{1}{b^{(p-3)/(p-1)} - a^{(p-3)/(p-1)}} r^{2/(1-p)} = k_p r^{2/(1-p)} \quad \text{für } p \neq 3$$

$$\varrho_3 = \frac{1}{\log(b/a)} r^{-1} = k_3 r^{-1}$$

Dann gilt für eine Integration entlang eines Radius

$$1 = \int_a^b \varrho\, dr = \int_a^b \varrho\, r^{2/p} \cdot r^{-2/p}\, dr$$

$$\leqslant \left(\int_a^b \varrho^p r^2\, dr\right) \left(\int_a^b r^{-2/(p-1)}\, dr\right)^{p-1} = k_p^{1-p} \cdot \int_a^b \varrho^p r^2\, dr$$

Also gilt für beliebige ϱ

$$\int_R \varrho^p\, dm = 4\pi \int_a^b \varrho^p r^2\, dr \geqslant k_p^{p-1} \cdot 4\pi$$

mit Gleichheit für ϱ_p. Für $p=2$ ergibt sich insbesondere:

$$M_2(R) = \frac{4\pi}{a^{-1} - b^{-1}} \tag{1.2}$$

Es besteht eine einfache Beziehung zwischen dem Modul von $R(a, b)$ und den Moduln der Zylinder, die man durch Aufschneiden des Ringes erhält: Wird $R(a, b)$ von Kegeln durch den Nullpunkt in endlich viele Zylinder Z_i zerlegt, so gilt

$$\sum_i M_p(Z_i) = M_p(R) \tag{1.3}$$

Für Zylinder Z, die durch Kegel mit der Spitze im Nullpunkt und dem Raumwinkel w aus $R(a, b)$ herausgeschnitten werden ist $M_p(Z)=wk^{p-1}$.
Der Zylinder $Z=(Q, E_0, E_1)$ zum Beispiel mit

$$\begin{aligned} &Q = \{x \mid a < |x| < b, \quad x_1 > 0\} \\ &E_0 = \{x \mid |x| = a, \quad x_1 > 0\}, \quad E_1 = \{x \mid |x| = b, \quad x_1 > 0\} \end{aligned}$$

hat also den Modul

$$M_p(Z) = 2\pi k^{p-1} \tag{1.4}$$

Diese Behauptungen folgen unmittelbar aus der Herleitung des Wertes für den Modul von $R(a, b)$.
Für beliebige Ringe gilt die schwächere Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} M_p(Z_i) \leqslant M_p(R) \tag{1.5}$$

für eine beliebige endliche Zerlegung des Ringes in disjunkte Zylinder $Z_i=(Q^{(i)}, E_0^{(i)}, E_1^{(i)})$ mit $E_0^{(i)} \subset D_0$, $E_1^{(i)} \subset D_1$ und $Q^{(i)} \subset R$, $i=1, 2,\ldots, n$. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen: Ist χ_i die charakteristische Funktion von $Q^{(i)}$ und ist $\varrho \in F(\Gamma_R)$, so ist $\varrho_i = \varrho\chi_i$ eine zulässige Funktion für $Z_i: \varrho_i \in F(\Gamma_{Z_i})$ $i=1,\ldots, n$.

Man schliesst daraus die gewünschte Ungleichung

$$\inf_{\varrho \in F(\Gamma_R)} \int \varrho^p \, dm \geqslant \sum_i \inf_{\varrho_i \in F(\Gamma_{Z_i})} \int \varrho_i^p \, dm$$

Die zu (1.1) analoge Ungleichung für Ringe folgt auch hier mit $\rho=d^{-1}$, d Abstand von D_0 und D_1:

$$M_p(R) \leqslant m(R)\, d^{-p} \tag{1.6}$$

Für den Fall $p=2$ erhält man nach FUGLEDE [2] auch eine Abschätzung in der anderen Richtung (eine entsprechende Betrachtung für den Fall $p=3$ siehe GEHRING [3] oder [4] p. 369): Eine Lipschitz-Fläche σ ist eine 2-dim. Mannigfaltigkeit in E^3, auf der mit Hilfe von Funktionen f_i, $i=1, 2,\ldots$ ein System von Parameterumgebungen definiert ist, wobei die f_i auf Gebieten $G_i \subset E^2$ definiert sind und einer zweiseitigen Lipschitz-Bedingung genügen:

$$c_i^{-1}|x-y| \leqslant |f_i(x)-f_i(y)| \leqslant c_i^{-1}|x-y| \; x, y \in E^2; f_i(x), f_i(y) \in \sigma .$$

Das Integral $\int_\sigma \varrho \, ds$ einer Borelfunktion ϱ über eine Lipschitz-Fläche σ kann unter Verwendung der Resultate von RADEMACHER [8] folgendermassen definiert werden: Die $f_i(x)=f_i(x_1, x_2)$ sind f.ü. differenzierbar, die Koeffizienten E, F, G der ersten Fundamentalform messbar und die Form $\sqrt{EG-F^2}\, dx_1\, dx_2$ ist unabhängig von der gewählten Lipschitz-Darstellung f_i. Eine Unterteilung von σ in disjunkte Borelmengen B_i mit $\bigcup_i B_i=\sigma$, derart dass B_i im Bildbereich von f_i liegt, gestattet dann die Definition:

$$\int_\sigma \varrho \, ds = \sum_i \int_{f_i^{-1}(B_i)} \varrho(f_i(x)) \sqrt{EG-F^2}\, dx_1\, dx_2$$

Der Modulbegriff kann somit auf natürliche Art auf Systeme Σ von Lipschitzflächen ausgedehnt werden. Wir setzen

$$M_p(\Sigma) = \inf_{\varrho \in F(\Sigma)} \int_{E^3} \varrho^p \, dm$$

Das Infimum erstreckt sich über alle nicht-negativen Borel-Funktionen $\varrho \in F(\Sigma)$ mit der Eigenschaft

$$\int_\sigma \varrho \, ds \geqslant 1 \qquad \text{für alle } \sigma \in \Sigma$$

Σ_R sei nun die Schar der Lipschitzflächen, welche die Randkomponenten D_0 und D_1 des Ringes R trennen. Dann gilt nach FUGLEDE [2] Satz 9 p. 200 und Bemerkung p. 207

$$M_2(\Gamma_R) = 1/M_2(\Sigma_R) = \int_R \operatorname{grad}^2 u \, dm \tag{1.7}$$

u löst hier das verallgemeinerte Dirichlet-Randwertproblem mit den Randwerten 0 auf D_0 bzw 1 auf D_1.

Setzt man $S(R)=S=\inf_{\sigma \in \Sigma_R} \int_\sigma ds$ so ist $\varrho=S^{-1}$ zulässig ($S^{-1} \in F(\Sigma)$) und somit

$$M_2(\Sigma_R) \leqslant \int_R S^{-2} \, dm = m(R)\, S^{-2}$$

Aus (1.7) folgt dann

$$M_2(\Gamma_R) \geqslant S^2/m(R) \tag{1.8}$$

Die dritte zu (D) und (L) aequivalente Eigenschaft ist eine Aussage über das Verhalten der Moduln von Kurvenscharen:

Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ besitzt die Eigenschaft (M) falls eine Konstante K existiert, so dass $M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$ für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$ mit $\Gamma' = h(\Gamma)$. Die Aequivalenz ergibt sich sofort aus den folgenden Lemmata 2 und 3.

LEMMA 2. *Ein Diffeomorphismus $h: G \to G'$ mit der Eigenschaft* (L) *erfüllt* (M).
Beweis:
Für $\varrho' \in F(\Gamma')$, $\gamma \in \Gamma$ und $x' = h(x)$ gilt

$$\int\limits_{\gamma} \varrho'(h(x))\, \lambda_1(x)\, ds \geqslant \int\limits_{h(\gamma)} \varrho'(y)\, ds$$

(vgl. die Definition für $\lambda_1(x)$ auf p. 285). Die Funktion $\varrho'(h(x))\, \lambda_1(x)$ gehört also zu $F(\Gamma)$.

$$M_2(\Gamma) \leqslant \int\limits_G \varrho'^2 \lambda_1^2\, dm \leqslant K \int\limits_G \varrho'^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\, dm = K \int\limits_{G'} \varrho'^2\, dm$$

denn $K \geqslant \lambda_1/\lambda_2\lambda_3$,
daraus folgt $M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$.

LEMMA 3. *Ein Diffeomorphismus $h: G \to G'$, der die Bedingung $M_2(Z) \leqslant K M_2(Z')$ für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$ mit $\bar{Q} \subset G$ erfüllt, hat die Eigenschaft* (L).

Aus diesem Lemma ist ersichtlich, dass es genügt, (M) durch die schwächere Forderung

$$M_2(Z) \leqslant K M_2(Z') \tag{M*}$$

für alle Zylinder Z in G mit Bild $h(Z) = Z'$ zu ersetzen.

Beweis von Lemma 3: Die Eigenschaften (L) und (M) sind beide invariant unter Translation und Rotation. Um zu zeigen, dass $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K$ im Punkte $x \in G$, können wir daher (wie im Beweis zum Lemma 1) annehmen, dass $x = 0$ und dass $h(x) = Hx + o(|x|)$, $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung des Zylinders $Z_t = (Q, E_0, E_1)$, $Q = \{x \mid |x_1| < t/2,\ x_2^2 + x_3^2 < t\}$ $E_1 = \{x \mid x_1 = \pm t/2,\ x_2^2 + x_3^2 < t\}$ liefert:

$$M_2(Z) = \pi t^3/t^2 \leqslant K M_2(Z') \leqslant K \frac{t^3 \pi \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + o(t^3)}{t^2 \lambda_1^2 + o(t^2)}$$

nach der Ungleichung (1.1). Daraus schliesst man

$$1 \leqslant K \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + t^{-3} o(t^3)}{\lambda_1^2 + t^{-2} o(t^2)}$$

und daher $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K$, die gewünschte Ungleichung.

Mit der gleichen Methode lässt sich zeigen, dass (M) auch durch folgende Bedingung ersetzt werden kann: Der Diffeomorphismus $h: G \to G'$ genügt der Ungleichung

$$M_2(R) \leqslant K\, M_2(R') \text{ für alle Ringe } R \text{ mit } \bar{R} \subset G. \tag{M**}$$

Beweis: Wir normieren h wie oben. Als Ring $R' = R'_n(t)$ wählen wir mit beliebigem $n > 1$ den „Zylinder" $\{x' \mid |x'_1| < t/n,\ x_2'^2 + x_3'^2 < (t + t/n)^2\}$, aus dem die Kreisscheibe $\{x' \mid x_2'^2 + x_3'^2 \leqslant t^2,\ x'_1 = 0\}$ entfernt wird. Nach den Ungleichungen (1.6) und (1.8) gilt:

$$(t + t/n)^2\, 2\pi n/t = m(R')\, d^{-2}(R') \geqslant M_2(R') \geqslant K^{-1} M_2(R)$$

$$S(R) = \frac{2\pi t^2}{\lambda_2 \lambda_3} + o(t^2)$$

$$m(R) = \frac{2\pi}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}\, \frac{t}{n} \left(t + \frac{t}{n}\right)^2 + o(t^3)$$

$$M_2(R) \geqslant \frac{4\pi^2 t^4 (\lambda_2 \lambda_3)^{-2} + o(t^4)}{2\pi \left(t + \frac{t}{n}\right)^2 \cdot \frac{t}{n} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} + o(t^3)}$$

Die beiden Ungleichungen ergeben

$$K n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant \frac{(\lambda_2 \lambda_3)^{-2} + t^{-4} o(t^4)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 n^{-1} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} + t^{-3} o(t^3)}$$

und mit dem Grenzübergang $t \to 0$ folgt

$$K(1 + 1/n)^4 \geqslant \lambda_1 / \lambda_2 \lambda_3$$

und schliesslich $K \geqslant \lambda_1/\lambda_2 \lambda_3$

(Ein entsprechender Beweis für den Fall $p = 3$ findet sich bei GEHRING [4] p. 374/375.)

Die Ergebnisse dieses Abschnittes lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

AEQUIVALENZ-SATZ. *Ist h ein Diffeomorphismus eines Gebietes $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$, so sind folgende Aussagen aequivalent:*

(D) $\int_G \operatorname{grad}^2 u\, dm \leqslant K \int_{G'} \operatorname{grad}^2 (u \circ h^{-1})\, dm$ *für alle in G stetig differenzierbaren Funktionen u.*

(L) $\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K,\ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$ *in allen Punkten $x \in G$ ($\lambda_i^2 = 1, 2, 3$ ist Eigenwert von HH^*, H ist die Funktionalmatrix von h im Punkte x).*

(M) $M_2(\Gamma) \leqslant K\, M_2(\Gamma')$ *für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$ mit $\Gamma' = h(\Gamma)$. Es genügt*

(M*) $M_2(Z) \leqslant K\, M_2(Z')$ *für alle Zylinder mit $\bar{Q} \subset G$ oder*

(M**) $M_2(R) \leqslant K\, M_2(R')$ *für alle Ringe mit $\bar{R} \subset G$ zu fordern.*

KOROLLAR 1. *Ist h ein Diffeomorphismus $G \to G'$, so sind folgende Bedingungen aequivalent:*

(D^{-1}) $\int\limits_G \operatorname{grad}^2 u\, dm \geqslant C^{-1} \int\limits_{G'} \operatorname{grad}^2 (u \circ h^{-1})\, dm$ *für alle stetig differenzierbaren Funktionen u.*

(L^{-1}) $\lambda_3/\lambda_2\lambda_1 \geqslant C^{-1} (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0)$ in G.

(M^{-1}) $M_2(\Gamma) \geqslant C^{-1} M_2(\Gamma')$ *für alle Kurvenscharen* $\Gamma \subset G$.

Korollar 1 ist eine Anwendung des Aequivalenz-Satzes auf den inversen Diffeomorphismus h^{-1}.

KOROLLAR 2. *Ist h ein Diffeomorphismus* $G \to G'$, *der die Ungleichungen*

$$C^{-1} M_2(Z') \leqslant M_2(Z) \leqslant K M_2(Z') \tag{1.9}$$

für alle Zylinder in G erfüllt, so gilt lokal

$$K^{-1} |x-y| \leqslant |h(x) - h(y)| \leqslant C |x-y|$$

Nach dem Aequivalenz-Satz und nach der Bemerkung 3 auf Seite 286 ergibt sich aus (1.9), dass $K^{-1} \leqslant \lambda_i \leqslant C$ $i = 1, 2, 3$ und daraus die Lipschitz-Bedingung.

Korollar 2 dient als Ausgangspunkt für den zweiten und dritten Abschnitt, wo auf die Differenzierbarkeits-Voraussetzung für h verzichtet wird. Es wird dort gezeigt, dass sich aus der Voraussetzung (1.9) und der Forderung, dass h ein Homöomorphismus ist, trotzdem eine Lipschitz-Stetigkeit nachweisen lässt. Daraus folgt dann insbesondere, dass h fast überall differenzierbar sein muss. Gewisse Aussagen aus dem Aequivalenz-Satz lassen sich sodann übertragen.

Beispiele

1) Für Streckungen $h(x) = vx$, v reell und positiv, gilt $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \equiv v^{-1}$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$. Ist umgekehrt h ein Diffeomorphismus mit $\lambda_i/\lambda_j\lambda_k \equiv K$ für alle $x \in G$ und für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$, so folgt daraus sofort $\lambda_i \equiv K^{-1}$ $i = 1, 2, 3$. Nach einer Verallgemeinerung des Satzes von LIOUVILLE (siehe GEHRING [4], p. 389, Satz 16) muss h die Restriktion einer Möbiustransformation auf G sein. Somit ist h abgesehen von Rotationen und Translationen eine Streckung im Verhältnis K^{-1}.
2) *Konforme Abbildung der Einheitskugel auf sich.*
   Ist h eine Möbiustransformation (konforme Abbildung) der Einheitskugel $|x| < 1$ auf sich, welche die x_1-Achse auf sich abbildet und den Punkt $(a, 0, 0)$, $0 \leqslant a < 1$, in den Nullpunkt überführt, so induziert h auf jeder Ebene durch $(0, 0, 0)$ und $(a, 0, 0)$ eine Abbildung w, die sich in komplexer Schreibweise als

$$w(z) = (z-a)/(1-az)$$

darstellen lässt. Die x_1-Achse wurde als reelle Achse gewählt. Da es sich um eine

Möbiustransformation handelt, gilt für festes x: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$. Setzt man

$$K^{-1}=\inf_{|x|<1}\lambda(x)=\inf_{|z|<1}\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1-a}{1+a}$$
$$C=\sup_{|x|<1}\lambda(x)=\sup_{|z|<1}\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1+a}{1-a}$$

so schliesst man daraus, dass h für alle x, $|x|<1$, der Bedingung

$$C^{-1}\leqslant\lambda/\lambda\,\lambda(x)=\lambda^{-1}(x)\leqslant K$$

genügt.

3) *Kugelringe*

Zwei Kugelringe $R_i=\{x\mid 1<|x|<a_i\}$ $i=1,2$ sollen diffeomorph aufeinander abgebildet werden. Wir setzen $G=R_1$, $G'=R_2$, $a_1<a_2$, und berechnen die kleinste Konstante K mit der Eigenschaft, dass bei diesem Diffeomorphismus h die Bedingungen des Aequivalenz-Satzes erfüllt sind. Dazu geben wir h als eine symmetrische Abbildung vor (in Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned}&(r',\vartheta',\varphi')=h(r,\vartheta,\varphi)\\&\vartheta'=\vartheta\\&\varphi'=\varphi\\&(1/r'-1/a_2)/(1-1/a_2)=(1/r-1/a_1)/(1-1/a_1)\end{aligned}$$

und zeigen, dass diese Abbildung im erwähnten Sinne die beste ist. Die Konstante K wird mit Hilfe der Bedingung (L) berechnet. Wegen der Symmetrie gilt:

$$\lambda_1=\frac{d(r')}{dr},\qquad\lambda_2=\lambda_3=r'/r$$
$$\frac{d(r')}{dr}=\frac{r'^2\,d(1/r')}{r^2\,d(1/r)}=\frac{r'^2(1-1/a_2)}{r^2(1-1/a_1)}$$
$$>1,\quad\text{denn}\quad a_1<a_2$$
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}=\frac{1-1/a_2}{1-1/a_1}=\frac{M_2(R_1)}{M_2(R_2)}\qquad\text{(siehe (1.2))}$$
$$\lambda_2/\lambda_1\lambda_3=\lambda_3/\lambda_1\lambda_2=\lambda_1^{-1}<1$$

Daraus schliesst man, dass $K=M_2(R_1)/M_2(R_2)$. Die Bedingung (M**) des Aequivalenz-Satzes liefert $K\geqslant M_2(R_1)/M_2(R_2)$ für alle Diffeomorphismen h.

II. Absolute Stetigkeit

Im ersten Abschnitt wird von den untersuchten Abbildungen stets vorausgesetzt, dass sie stetig differenzierbar seien. Auf diese einschränkende Voraussetzung soll jetzt verzichtet werden. Die Bedingungen (D) und (L) im Aequivalenzsatz lassen sich dann nicht mehr so formulieren, jedoch lassen sich die Bedingungen (M), (M*) und (M**) auf beliebige Homöomorphismen h übertragen.

Zur Untersuchung der Regularitätseigenschaften von h benötigen wir einige Begriffe und Resultate aus der reellen Analysis. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei LEHTO–VIRTANEN [5], Kap. III, § 2.

Ein reelles Borelsches Mass τ heisst absolut stetig bezüglich dem Borel-Lebesgue Mass m, falls $\tau(N)=0$ für jede m-Nullmenge N. Der Homöomorphismus $h:G\to G'$ induziert durch $B\to h(B)$ eine Abbildung der Borelmengen in G auf Borelmengen in G'. Wir setzen

$$\tau_h(B) = m(h(B)) \tag{2.1}$$

für Borelmengen B in G. $\tau_h(B)$ ist ein positives Borelsches Mass auf G.

DEFINITION. *Der Homöomorphismus $h:G\to G'$ heisst absolut stetig in G, falls das zugeordnete Mass τ_h auf G absolut stetig ist.*

Ist $K(r, x)$ die konzentrische Kugel mit Mittelpunkt $x\in G$ und Radius r und existiert der Grenzwert

$$\tau'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\tau(K(r, x)\cap G)}{m(K(r, x))}$$

so heisst $\tau'(x)$ die Derivierte von τ im Punkte x. Nach dem Satz von Lebesgue besitzt ein positives, beschränktes Borelsches Mass τ in G fast überall eine Derivierte und es gilt für jede Borelmenge B in G:

$$\tau(B) \geqslant \int_B \tau'\, dm$$

Gleichheit besteht genau dann, wenn τ in G absolut stetig ist.

DEFINITION. *Die in $G\subset E^3$ stetige Funktion f mit Werten in E^3 ist absolut stetig auf Linien* (ACL), *falls folgendes gilt: In jedem Quader $Q=\{x \mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1, 2, 3\}\subset G$ ist f absolut stetig auf fast allen achsenparallelen Strecken in Q. Die Vereinigung der achsenparallelen Strecken $l\subset Q$, auf denen f nicht absolut stetig ist, hat 3-dimensionales Lebesgue-Mass O.*

SATZ 1. *Erfüllt der Homöomorphismus $h:G\to G'$ die Bedingung* (M*)*: $M_2(Z)\leqslant K\,M(Z')$ für alle Zylinder $Z=(Q, E_0, E_1)$ mit $\bar{Q}\subset G$ und $Z'=h(Z)$, so ist die inverse Abbildung h^{-1} absolut stetig und es gilt $m(B)\leqslant K^3 m(h(B))$ für alle Borelmengen $B\subset G$.*
Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir drei Hilfsätze.

HILFSATZ 1. *Erfüllt der Homöomorphismus h die Voraussetzungen von Satz 1, so gilt* (M**):

$$M_2(R)\leqslant K\,M_2(R') \quad \textit{für alle Ringe } R \textit{ mit } \bar{R}\subset G.$$

Für den Beweis dieses Hilfsatzes benützen wir Resultate von FUGLEDE [2].

R sei ein beliebiger Ring, $\bar{R}\subset G$. Wir setzten zunächst voraus, dass die Randkomponenten von R keine irregulären Punkte bezüglich des Dirichlet-Randwertproblems enthalten. Es gilt dann

$$\int_R \operatorname{grad}^2 u \, dm = M_2(R)$$

wobei u die harmonische Funktion mit den Randwerten $u=0$ auf D_0 und $u=1$ auf D_1 ist. Wir verwenden das Verfahren, das auf die Gleichung (1.3) geführt hat: Der Ring R wird durch eine Fläche F in zwei Zylinder Z_1, Z_2 zerlegt. Von F wird vorausgesetzt, dass für jede Stromlinie s (orthogonale Trajektorie zu den Niveauflächen u=const.) entweder $s\cap F=\emptyset$ oder $s\cap F=s$ gilt. Von den beiden Zylindern muss gezeigt werden, dass $\varrho=|\operatorname{grad} u|$ extremal ist, woraus dann folgt:

$$M_2(Z_i) = \int_{Q_i} \operatorname{grad}^2 u \, dm \qquad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Auf eine Ausführung des Beweises kann verzichtet werden, da sich die Methode von FUGLEDE [2] (Punkt 3^0 p. 202–205) auf unseren Fall übertragen lässt. Aus (2.4) und (1.5) erhält man

$$M_2(R) = M_2(Z_1) + M_2(Z_2) \leqslant K(M_2(Z_1') + M_2(Z_2')) \leqslant K M_2(R').$$

Besitzt nun aber D_0 oder D_1 irreguläre Punkte, so kann $R'=h(R)$ bei vorgegebenem $\varepsilon>0$ durch einen Ring R_0, $\bar{R}_0\subset R'$, approximiert werden für den die Ungleichung

$$M_2(R_0) \leqslant M_2(R') + \varepsilon \tag{2.3}$$

gilt.[1] Zu einem solchen R_0 wählen wir einen Ring R_1 mit $h^{-1}(R_0)\subset R_1\subset R$, dessen Randkomponenten nur aus regulären Punkten bestehen (z.B. den Ring, der aus den Punkten besteht, die von $h^{-1}(R_0)$ einen geeigneten Abstand haben). Wie soeben bewiesen wurde, ist $M_2(R_1)\leqslant K M_2(R_1')$. Daraus folgt:

$$M_2(R) \leqslant M_2(R_1) \leqslant K M_2(R_1') \leqslant K M_2(R_0) \leqslant K M_2(R') + K\varepsilon$$

da $R_1\subset R$ und $R_0\subset R_1'$, und damit

$$M_2(R) \leqslant K M_2(R').$$

---

[1]) Nach CHOQUET [1] p. 146/147 ist $M_2(R)$ gleich der Kapazität des inneren Komplementes I von R bezüglich der Green'schen Funktion des Gebietes $R\cup I$. Da I kompakt ist, gilt

$$M_2(R) = \operatorname{cap} I = \inf_{O\supset I} \operatorname{cap} O.$$

Das Infimum erstreckt sich über die offenen Mengen O, die I enthalten. Wegen der Monotonie des Moduls gibt es daher einen Ring R^* mit äusserer Randkomponente D_1, dessen innere Randkomponente D_0^* ganz in R liegt und für den

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R) + \varepsilon/2$$

gilt. Eine Spiegelung am Einheitskreis mit dem Zentrum in I und nochmalige Anwendung des beschriebenen Verfahrens liefert das gewünschte Resultat.

HILFSATZ 2. *Ist R ein beliebiger Ring mit innerem Komplement I, und ist R^* der durch zwei konzentrische Kugelflächen berandete Ring mit $m(R)=m(R^*)$ und $m(I)=m(I^*)$, so gilt*

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R).$$

Dieser Satz stammt von SZEGÖ [9]. Wir sagen im Folgenden, R^* entstehe aus R durch Symmetrisierung.

HILFSATZ 3. *Ist $R' = \{x' \mid a' < |x' - x_0'| < b'\} \subset G'$, $R = h^{-1}(R')$ und R^* der aus R durch Symmetrisierung entstandene Ring, so folgt aus den Voraussetzungen des Satzes 1:*

$$K^{-1} < a'/a^* + K^{-1} a'/b' \tag{2.6}$$

Beweis: Nach den Hilfsätzen 1 und 2 gilt:

$$K M_2(R') \geqslant M_2(R) \geqslant M_2(R^*).$$

Sind a^* und b^* $(a^* < b^*)$ die Radien der begrenzenden Kugelflächen von R^*, so ergibt dies zusammen mit der Gleichung (1.2)

$$K 4\pi (1/a' - 1/b')^{-1} \geqslant 4\pi (1/a^* - 1/b^*)^{-1}$$

und daraus

$$1/a' - 1/b' \leqslant K(1/a^* - 1/b^*)$$

$$K^{-1} + a'/b^* \leqslant a'/a^* + K^{-1} a'/b'$$

und (2.6).

Folgerungen

1) Für eine Folge konzentrischer Ringe R_i' mit

$$a_i' < 1,\ b_i' = \sqrt{a_i'} > a_i' \quad \text{und} \quad a_i' \to 0$$

schliesst man aus (2.6):

$$K^{-1} < a_i'/a_i^* + K^{-1}\sqrt{a_i'}$$

und durch Grenzübergang:

$$K^{-3} \leqslant \liminf_{i\to\infty} (a_i'/a_i^*)^3 = \liminf_{i\to\infty} (m(I_i')/m(h^{-1}(I_i'))) \tag{2.7}$$

wo I_i' das innere Komplement des Ringes R_i' ist, also eine Kugel vom Radius a_i'.

2) Ist $b' = 2\varepsilon$ und $a' \leqslant \varepsilon$, so folgt aus (2.6)

$$K^{-1} = a'/a^* + K^{-1}/2$$

und daher besteht für jede Kugel I' mit Radius $< \varepsilon$, deren Abstand zum Rand von G grösser als ε ist, die Ungleichung

$$m(I')/m(I) = (a'/a^*)^3 \geqslant K^{-3}/8, \quad I = h^{-1}(I') \tag{2.8}$$

Aus diesen beiden Folgerungen ergibt sich leicht ein

Beweis des Satzes 1: Eine Lebesgue-Nullmenge $N' \subset G'$ kann durch Kugeln überdeckt werden, derart dass die Summe ihrer Inhalte beliebig klein ist. Daraus und aus (2.8) schliesst man, dass $N = h^{-1}(N') \subset G$ wieder eine Nullmenge ist. h^{-1} ist also in G' absolut stetig. Die h^{-1} zugeordnete Mengenfunktion τ_h^{-1} (siehe (2.1)) ist in jeder kompakten Teilmenge von G' beschränkt. Nach dem Satz von Lebesgue existiert die Derivierte $(\tau_h^{-1})'$ f.ü. in G' und nach (2.7) ist f.ü.

$$(\tau_{h^{-1}})' \leqslant K^3$$

Wegen der absoluten Stetigkeit von τ_h^{-1} gilt für alle Borelmengen $B \subset G$

$$m(B) = m(h^{-1}(B')) = \int_{B'} (\tau_{h^{-1}})' \, dm$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

SATZ 2. *h sei ein Homöomorphismus $G \to G'$. Ist dann für ein $p > 1$*

$$M_p(Z) \leqslant K M_p(Z')$$

für alle Zylinder in G, so ist h absolut stetig auf Linien (ACL).

Die Beweismethode dieses Satzes geht auf PFLUGER [7] zurück. Der Fall mit Dimension $d = 3$ und $p = d$ ist bei VÄISÄLÄ [11] behandelt. Es genügt hier zu bemerken, dass der Beweis von VÄISÄLÄ auch für $d \neq n$ Gültigkeit besitzt.

III. Lipschitz-Stetigkeit

In diesem Abschnitt wird sich herausstellen, dass die Homöomorphismen h von G auf G', für die eine „zweiseitige" Ungleichung

$$K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C M_2(Z) \tag{3.1}$$

gilt, eine Lipschitzbedingung erfüllen. Deshalb sind diese f.ü. differenzierbar, ein Umstand, der grundlegend ist für die Übertragung der Ergebnisse aus dem ersten Teil. Ob sich die Differenzierbarkeit f.ü. von h bereits aus der „einseitigen" Ungleichung (Voraussetzung im zweiten Abschnitt) herleiten lässt, ist eine offene Frage. Im Gegensatz zur Theorie der quasikonformen Abbildungen in E^3 ist es jedoch unmöglich, aus der einseitigen Ungleichung eine zweiseitige herzuleiten. Der Homöomorphismus $h(r, \varphi, z) = (r^2, \varphi, z)$ (in Zylinderkoordinaten), der $\{x = (r, \varphi, z) \mid 0 < z < 1, 0 \leqslant r < 1\}$ auf sich abbildet, belegt diese Behauptung.

SATZ 3. *Gelten für den Homöomorphismus $h: G \to G'$ die Ungleichungen*

$$K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C M_2(Z)$$

für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$, $\bar{Q} \subset G$, so erfüllt h (lokal) eine Lipschitzbedingung *der Form*

$$\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y| \leqslant |h(x)-h(y)| \leqslant \sqrt{KC^3}\,|x-y| \tag{3.2}$$

KOROLLAR. *h und h^{-1} sind f.ü. differenzierbar.*

Dies ist eine Folgerung des Satzes von RADEMACHER

Wir beweisen die zweite Ungleichung in (3.2). Die erste folgt dann durch Anwendung auf die inverse Abbildung h^{-1}. Es muss vorausgesetzt werden, dass die Verbindungsstrecke der Punkte x, y, in G liegt. In diesem Sinne ist der Satz nur eine lokale Aussage. Durch x und y legen wir sodann die Symmetrieachse eines geraden, offenen Kreiszylinders Q, $\bar{Q}\subset G$, dessen Grund- und Deckebene E_0 und E_1 die Punkte x bzw. y enthalten. Wir verwenden die Ungleichung (1.1), die für $Z=(Q, E_0, E_1)$ in Gleichheit übergeht:

$$M_2(Z) = m(Q)\,|x-y|^{-2}$$
$$M_2(Z') \leqslant m(Q')\,d^{-2}$$

Konvergiert der Radius r des Kreiszylinders gegen Null, so strebt d gegen $|h(x)-h(y)|$. Nach Satz 1 gilt nun

$$m(Q') \leqslant C^3\, m(Q),$$

und daraus folgt

$$m(Q)\,|x-y|^{-2} = M_2(Z) \leqslant K\,M_2(Z') \leqslant K\,m(Q')\,d^{-2} \leqslant K\,C^3\,m(Q)\,d^{-2}$$

Division mit $m(Q)$ und anschliessender Grenzübergang $r\to 0$ führen auf die zweite Ungleichung in (3.2).

Satz 3 besitzt nach FUGLEDE [2] (Beweis zu Satz 4 p. 188) folgende Umkehrung: Aus der (lokalen) Voraussetzung:

$$c^{-1}\,|x-y| \leqslant |h(x)-h(y)| \leqslant c\,|x-y|$$

folgt

$$c^{-5}\,M_2(\Gamma) \leqslant M_2(\Gamma') \leqslant c^5\,M_2(\Gamma)$$

für alle Kurvenscharen $\Gamma\subset G$.

Aus Satz 3 ergeben sich eine ganze Reihe von Folgerungen:

1) Die partiellen Ableitungen von h, die fast überall existieren, sind lokal in L_∞, denn sie sind durch $\sqrt{KC^3}$ beschränkt.
2) Aus den Voraussetzungen des Satzes 3 folgt die Eigenschaft (L) (siehe p. 285) für alle Punkte $x\in G$, in denen h differenzierbar ist:

$$\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 \leqslant K \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0 \tag{3.3}$$

Daraus erhält man

$$\lambda_3 \geqslant K^{-1} \tag{3.4}$$

Der Beweis auf p. 13/14 benützt nur die Differenzierbarkeit in den betreffenden Punkten. Darum kann dieses Ergebnis auch folgendermassen formuliert werden:

Ist der Homöomorphismus h f.ü. differenzierbar und gilt $K^{-1}M_2(Z) \leqslant M_2(Z')$ für alle Zylinder in G, so gilt (3.3) in allen Punkten, in denen h differenzierbar ist. Insbesondere ist (3.3) unabhängig von der Grösse von C. Die folgende Umkehrung lässt sich unmittelbar von einem Ergebnis von VÄISÄLÄ ([10] Satz 6.5) übertragen: Ist h ACL, f.ü. in G differenzierbar und gilt (3.3) in fast allen Punkten, in denen h differenzierbar ist, so folgt daraus:

$$M_2(\Gamma) \leqslant K M_2(\Gamma')$$

für alle Kurvenscharen $\Gamma \subset G$.
Weil sich die entsprechenden „zweiseitigen" Ungleichungen immer durch die Betrachtung des inversen Höomorphismus ergeben, gilt

$$K^{-1} M_2(\Gamma) \leqslant M_2(\Gamma') \leqslant C M_2(\Gamma) \tag{3.5}$$

für alle Kurvenscharen, sobald diese Ungleichungen für Zylinder bestehen.

3) Die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_1/\lambda_2 \lambda_3 &\leqslant KC \\ \lambda_3 \lambda_3/\lambda_1 \lambda_2 &\geqslant (KC)^{-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

für Punkte $x \in G$, in denen h differenzierbar ist, sind eine direkte Konsequenz von (3.3), (3.4) und den entsprechenden Ungleichungen für h^{-1}. (3.6) zusammen mit der Differenzierbarkeit f.ü. und der absoluten Stetigkeit auf Linien bedeuten, dass ein Homöomorphismus h, der den Voraussetzungen des Satzes 3 genügt, (KC)-quasikonform ist (im Sinne von VÄISÄLÄ [10] Satz 6.13)[2]. Dieses Ergebnis lässt sich auch folgendermassen formulieren:

SATZ 4[3]) *Erfüllt der Homöomorphismus h die Ungleichungen*

$$K^{-1} M_2(\Gamma) \leqslant M_2(\Gamma') \leqslant C M_2(\Gamma)$$

für alle Kurvenscharen $L \subset G$, so gilt für diese auch

$$(KC)^{-1} M_3(\Gamma) \leqslant M_3(\Gamma') \leqslant KC M_3(\Gamma)$$

Das Beispiel $h(x_1, x_2, x_3) = b(ax_1, x_2, x_3)$, $a \geq 1$ zeigt, dass die Konstante KC nicht verbessert werden kann ($KC = a^2$).

4) Es ist bekannt (siehe MORREY [6] Kapitel 3), dass ein Homöomorphismus $h: G \to G'$, der (3.2) erfüllt, die Klasse der reellwertigen ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in $L_p (p \geq 1)$ sind, invariant lässt: u, definiert auf einem Gebiet $Q \subset G$, und $u' = u \circ h^{-1}$, definiert auf $Q' = h(Q)$, gehören gleichzeitig zur erwähnten Klasse. Zudem besteht f.ü. in Q die Gleichung
grad $u = H$ grad u'.
(H ist die Funktionalmatrix von h.)

---

[2]) Im Sinne von GEHRING [4], Satz 4, ist $h (KC)^{1/2}$-quasikonform.

[3]) Dieses Resultat ist etwas besser als dasjenige, welches in den C.R. de l'Acad. Sci. Paris *266*, 274 (1968) angekündigt wurde.

Nach derselben Begründung wie auf Seite 286 erhält man daraus folgendes Resultat: Mit den Voraussetzungen des Satzes 3 gilt

$$K^{-1} \int_Q \operatorname{grad}^2 u \, dm \leqslant \int_{Q'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \leqslant C \int_Q \operatorname{grad}^2 u \, dm$$

für alle in einem Gebiet $Q \subset G$ definierten ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in L_2 sind.

Als Umkehrung zur Folgerung 4 beweisen wir:

SATZ 5. *Lässt der Homöomorphismus $h: G \to G'$ die Klasse der in Teilgebieten Q von G definierten ACL-Funktionen u, deren partielle Ableitungen lokal in L_p $(p > 1)$ sind, invariant, und gilt*

$$\int_Q |\operatorname{grad} u|^p \, dm \leqslant K \int_{Q'} |\operatorname{grad} u'|^p \, dm$$

für alle diese Funktionen, so folgt daraus

$$M_p(Z) \leqslant K \, M_p(Z')$$

für alle Zylinder $Z = (Q, E_0, E_1)$, $\bar{Q} \subset G$.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 5 geben wir für den Modul eines Zylinders eine zweite Definition an. Diese lässt sich auch für Ringe in dieser Art formulieren, was im Falle $p = 3$ bereits von GEHRING [3] gezeigt worden ist.

Zweite Definition:

Der Modul eines Zylinders $Z = (Q, E_0, E_1)$ ist die reelle Zahl

$$A_p(Z) = \inf_u \int_Q |\operatorname{grad} u|^p \, dm \qquad (p > 1)$$

Das Infimum erstreckt sich über alle in Q definierten ACL-Funktionen u, die auf E_0 und E_1 durch die Konstanten 0 bzw. 1 stetig fortgesetzt werden können.

Es muss gezeigt werden, dass $A_p(Z) = M_p(Z)$.

a) $$M_p(Z) \leqslant A_p(Z)$$

Ist $|\operatorname{grad} u|$ in L_p, so ist u für alle $\gamma \in \Gamma_Z$, mit Ausnahme einer Schar Γ_1 vom p-Modul 0, absolut stetig entlang jeder kompakten Teilkurve von γ (VÄISÄLÄ [10] Lemma 4.1). Aus der Bedingung $u = 0$ bzw. $u = 1$ auf $E_0 (E_1)$ folgt daher für diese Kurven:

$$\int_\gamma |\operatorname{grad} u| \, ds \geqslant 1$$

Wird $|\operatorname{grad} u|$ durch eine Borelfunktion f mit $f = |\operatorname{grad} u|$ f.ü. ersetzt, so gilt

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\gamma |\operatorname{grad} u|\,ds$$

für alle Kurven mit Ausnahme einer Schar Γ_2 vom p-Modul 0 (FUGLEDE [2] Theorem 3d). Da Γ_1 und Γ_2 nichts zum Modul $M_p(Z)$ beitragen, erhält man daraus

$$M_p(Z) \leqslant A_p(Z)$$

b) Die umgekehrte Ungleichung stützt sich auf eine Konstruktion von GEHRING [3] und auf ein Regularisierungsverfahren.

$f \geq 0$ sei eine Borel-Funktion mit $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ und $\int_Q f^p\,dm < \infty$. Ist die zweite Bedingung für kein f erfüllt, so ist $M_p(Z) = \infty$ und daher $A_p(Z) \leqslant M_p(Z)$. Mit ϱ bezeichnen wir die in Q definierte Hilfsfunktion

$$\varrho(x) = \operatorname{Min}\{1, (1/2)\,\delta(x)\}$$

$\delta(x)$ bezeichnet den Abstand von x zum Rand von Q. $\varrho(x)$ ist Lipschitz-stetig:

$$|\varrho(x) - \varrho(x')| \leqslant 2^{-1}\,|x - x'| \tag{3.7}$$

t ist ein Ortsvektor in $B_\varepsilon = \{t \mid |t| < \varepsilon \leqslant 1\} \subset E^3$ und figuriert als Parameter. Die Beziehung $y(x) = y_t(x) = x + t\varrho(x)$ definiert für jedes $t \in B_\varepsilon$ eine eineindeutige Abbildung von Q auf sich.

Die Funktion

$$g(x, \varepsilon) = \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(y_t(x))\,dm(t)$$

ist für festes ε in x stetig, denn f ist integrierbar und $\varrho(x)$ ist stetig. Zudem gilt:

$$\int_\gamma g(x, \varepsilon)\,ds(x) \geqslant (1 + \varepsilon/2)^{-1}$$

für alle $\gamma \in \Gamma_Z$, denn

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(x, \varepsilon)\,ds(x) &= \int_\gamma ds(x) \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} f(x + t\varrho)\,dm(t) \\ &= \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t) \int_{y(\gamma)} f(y) \frac{ds(x)}{ds(y)}\,ds(y)\end{aligned}$$

(nach FUBINI). Für die Transformation des Bogenelementes erhält man nach (3.7):

$$ds(y) = ds(x + t\varrho) \leqslant (1 + |t|\,|\operatorname{grad} \varrho|)\,ds(x) \leqslant (1 + |t|/2)\,ds(x)$$

Mit der Voraussetzung $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ folgt daraus:

$$\int_\gamma g(x,\varepsilon)\,ds(x) \geqslant \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t)\,\frac{1}{1+\varepsilon/2} = \frac{1}{1+\varepsilon/2} \tag{3.9}$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $g(x,\varepsilon)$ in der L_p-Norm gegen f:

$$\begin{aligned}\int_Q |g(x,\varepsilon)-f(x)|^p\,dm &= \int_Q dm(x) \left| \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} (f(x+t\varrho)-f(x))\,dm(t)\right|^p \\ &\leqslant \int_Q \frac{dm(x)}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} |f(x+t\varrho)-f(x)|^p\,dm(t) \\ &= \frac{1}{m(B_\varepsilon)} \int_{B_\varepsilon} dm(t) \int_Q |f(x+t\varrho)-f(x)|^p\,dm(x)\end{aligned}$$

Wird f in L_p durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximiert, so ist ersichtlich, dass der letzte Ausdruck mit ε gegen 0 konvergiert. Weil Q beschränkt ist, konvergieren daher auch die (in x) stetigen Funktionen

$$v(x,\varepsilon) = \frac{g(x,\varepsilon)}{1+\varepsilon/2}$$

in L_p gegen f und erfüllen wegen (3.9) die Bedingung

$$\int_\gamma v(x,\varepsilon)\,ds \geqslant 1 \qquad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_Z$$

Wir definieren eine Funktion $u(x,\varepsilon)$ durch die Gleichung

$$u(x,\varepsilon) = \mathrm{Min}\left\{1, \inf_\beta \int_\beta v(x,\varepsilon)\,ds(x)\right\}$$

Das Infimum erstreckt sich über alle rektifizierbaren Kurven β in Q, die E_0 mit x verbinden. Wegen der Stetigkeit von $v(x,\varepsilon)$ genügt $u(x,\varepsilon)$ lokal einer Lipschitzbedingung und ist daher eine ACL-Funktion mit $|\operatorname{grad} u(x,\varepsilon)| \leqslant v(x,\varepsilon)$. Damit kann zu jeder Borelfunktion $f \geq 0$ mit $\int_\gamma f\,ds \geq 1$ für alle $\gamma \in \Gamma_Z$ und zu jedem $\delta > 0$ eine ACL-Funktion $u(x,\varepsilon)$ angegeben werden, die sich durch 0 (bzw 1) stetig auf E_0 (bzw E_1) erweitern lässt und für die

$$\int_Q |\operatorname{grad} u|^p\,dm \leqslant \int_Q f^p\,dm + \delta$$

gilt. Daraus schliesst man die gesuchte Ungleichung

$$A_p(Q) \leqslant M_p(Q)$$

Mit dieser Vorbereitung gestaltet sich der Beweis zum Satz 5 sehr einfach:
Zu einem beliebigen Zylinder $Z' = (Q', E_0', E_1')$, $\bar{Q}' \subset G'$, gibt es eine Folge von ACL-Funktionen $u_n' = u_n \circ h^{-1}$, die in Q' definiert sind, mit Randwerten 0 auf E_0 und 1 auf E_1 und die

$$\lim_{n \to \infty} \int_{Q'} |\operatorname{grad} u_n'|^p \, dm = M_p(Z')$$

erfüllen. Nach der Voraussetzung zu Satz 5 gilt daher

$$K \int_{Q'} |\operatorname{grad} u_n'|^p \, dm \geqslant \int_{Q} |\operatorname{grad} u_n|^p \, dm \geqslant M_p(Z)$$

Mit dem Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$$K \, M_p(Z') \geqslant M_p(Z)$$

Gestützt auf Satz 3 mit den Folgerungen 2 und 4 und auf Satz 5 formulieren wir in Analogie zum ersten Abschnitt (vgl. p. 293) folgenden

Aequivalenz-Satz. *Ist h ein Homöomorphismus eines Gebietes $G \subset E^3$ auf ein Gebiet $G' \subset E^3$, so sind folgende drei Aussagen aequivalent:*

(1) $K^{-1} M_2(Z) \leqslant M_2(Z') \leqslant C \, M_2(Z)$ *für alle Zylinder Z mit $\bar{Q} \subset G$*

(2) *h und h^{-1} sind ACL, f.ü. differenzierbar und in den Punkten, in denen h differenzierbar ist, gilt $C^{-1} \leqslant \lambda_i / \lambda_j \lambda_k \leqslant K$ für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$*

(3) *h und h^{-1} lassen die Klasse der ACL-Funktionen, die in Teilgebieten Q von G (bzw. Q' von G') definiert sind und deren partielle Ableitungen lokal in L_2 sind invariant, und es gilt für diese Funktionen:*

$$K^{-1} \int_{Q} \operatorname{grad}^2 u \, dm \leqslant \int_{Q'} \operatorname{grad}^2 u' \, dm \leqslant C \int_{Q} \operatorname{grad}^2 u \, dm$$

IV. Normalfamilien-Eigenschaft

Definition. *Eine Familie F von stetigen Funktionen heisst normal, falls jede unendliche Folge $\{f_n\}$ in G definierter Funktionen aus F eine Teilfolge besitzt, die auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmässig gegen eine Funktion f oder gegen die Konstante $\pm\infty$ konvergiert. Gehört f jeweils wieder zu F, so ist F eine vollständige Normalfamilie.*

Die Forderung, dass alle Funktionen f_n auf G definiert sein müssen, kann abgeschwächt werden. Es sollen auch Folgen $\{f_n\}$ von Funktionen aus F zugelassen werden, deren Definitionsbereiche $\{G_n\}$ eine beliebige kompakte Teilmenge des Gebietes G von einem gewissen Index an enthalten.

SATZ 6. *Die Familie F der Homöomorphismen, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genügen, ist eine vollständige Normalfamilie.*

Nach dem Satz von ARZELA-ASCOLI ist F eine Normalfamilie, wenn die Homöomorphismen in F gleichgradig stetig sind. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit (Satz 3) ist diese Bedingung erfüllt, und es muss nur noch die Vollständigkeit gezeigt werden. Es sei also $\{h_n\}$ eine Folge von Homöomorphismen aus F, die auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmässig gegen h konvergiert. Wir verwenden folgende Abschätzung:

$$|h(x)-h(y)| \geqslant \big|\,|h_n(x)-h_n(y)| - |h(x)-h_n(x)+h_n(y)-h(y)|\,\big|$$

Bei gegebenem ε, $0<\varepsilon<1$, gilt für $n>n(\varepsilon, x, y)$

$$\begin{aligned} |h(x)-h_n(x)+h_n(y)-h(y)| &\leqslant |h(x)-h_n(x)| + |h(y)-h_n(y)| \\ &\leqslant \varepsilon\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y| \qquad \text{für } x \neq y \end{aligned}$$

und daher

$$|h(x)-h(y)| \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{K^{-3}C^{-1}}\,|x-y| > 0 \qquad \text{für } x \neq y$$

h ist also wieder ein Homöomorphismus und insbesondere wieder Lipschitz-stetig. (Die Ungleichung

$$|h(x)-h(y)| \leqslant \sqrt{K C^3}\,|x-y|$$

folgt aus

$$|h(x)-h(y)| \leqslant |h(x)-h_n(x)| + |h_n(x)-h_n(y)| + |h_n(y)-h(y)|)$$

Mit dem Satz von RADEMACHER schliesst man wieder, dass h f.ü. differenzierbar ist. Es genügt dann, die Ungleichungen

$$K^{-1}M_2(R) \leqslant M_2(R') \leqslant C\,M_2(R)$$

nur für Ringe R, $\bar{R}\subset G$, zu beweisen. Mit dem Beweis auf Seite 293 erhält man nämlich

$$C^{-1} \leqslant \lambda_i/\lambda_j\lambda_k \leqslant K$$

in allen Punkten $x\in G$, in denen h differenzierbar ist und für alle Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$. Nach der zweiten Bemerkung Seite 305 folgt daraus (3.5) und damit (3.1) als Spezialfall.

Zu einem beliebig gewählten Ring R, $\bar{R}\subset G$, betrachten wir die Folge der Ringe $R_n'=h_n(R)$. Wir können voraussetzen, dass $M_2(R_n')\geq K^{-1}M_2(R)$ (vgl. Hilfsatz 1 Seite 296). Wählen wir nun nach der Beziehung (2.3) einen Ring R^*, $\bar{R}^*\subset R'=h(R)$ mit

$$M_2(R^*) \leqslant M_2(R') + \varepsilon$$

so ist R^* von einem gewissen Index an in $R_n'=h_n(R)$ enthalten. ($\bar{R}$ ist nach Definition kompakt). Daher gilt:

$$M_2(R') + \varepsilon \geqslant M_2(R^*) \geqslant M_2(R_n') \geqslant K^{-1}M_2(R)$$

Da ε beliebig gewählt ist, folgt daraus

$$M_2(R') \geqslant K^{-1} M_2(R).$$

Weil die inversen Homöomorphismen auch eine Normalfamilie bilden, gibt es eine Teilfolge von $\{h_n^{-1}\}$, die auf jeder kompakten Teilmenge in $G' = h(G)$ gleichmässig gegen h^{-1} konvergiert. Die analoge Überlegung, angewandt auf diese Teilfolge, liefert

$$M_2(R') \leqslant C M_2(R)$$

Der Beweis ist vollständig.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Choquet, G., *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier *5* (1953/1954), 131–295.

[2] Fuglede, B., *Extremal length and functional completion*, Acta Math. *98* (1957), 171–219.

[3] Gehring, F. W., *Extremal length definitions for the conformal capacity in space*, Michigan. Math. J. *9* (1962), 137–150.

[4] Gehring, F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. *103* (1962), 353–393.

[5] Lehto, O. und Virtanen, K. I., *Quasikonforme Abbildungen* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1965).

[6] Morrey, C. B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1966).

[7] Pfluger, A., *Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen*, Comment. Math. Helv. *33* (1959), 23–33.

[8] Rademacher, H., *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. *79* (1919), 340–359.

[9] Szegö, G., *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31* (1930), 583–593.

[10] Väisälä, J., *On quasiconformal mappings in space*, Ann. Acad. Sc. Fenn. [A I] *298* (1961), 1–36.

[11] Väisälä, J., Two new characterisations for quasiconformality, Ann. Acad. Sc. Fenn. [A I] *362* (1965), 1–12.

Eingegangen, 24. Juli 1968