Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen.
Autor: Huber, Heinz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33776

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen

HEINZ HUBER (Basel)

Im Rahmen der geometrischen Funktionentheorie ist es wünschenswert, zu jeder natürlichen Zahl $g>2$ eine möglichst einfache kompakte Fläche vom Geschlecht g zu konstruieren, die nicht hyperelliptisch ist. Zu diesem Ende betrachten wir ein $(g+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet G der komplexen Ebene, dessen Randkomponenten g kongruente Kreise mit den Zentren ε^k, $(0\leqslant k\leqslant g-1,\ \varepsilon=\exp(2\pi i/g),\ g\geqslant 2)$, und ein Kreis mit dem Zentrum 0 sind. Die Abbildung $z\to\varepsilon z$ von G auf sich induziert einen konformen Automorphismus Φ der Schottky-Verdoppelung S von G, der genau zwei Fixpunkte auf S besitzt. Wir werden zeigen:

I: Die beiden Fixpunkte von Φ sind keine Weierstrasspunkte von S.

Da die von Φ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung g als Permutationsgruppe auf der Menge der Weierstrasspunkte wirkt, und weil die Fixpunktmenge dieser Gruppe nur aus den beiden Fixpunkten von Φ besteht, so folgt aus I als Korollar:

II: Die Anzahl der Weierstrasspunkte von S ist teilbar durch g.

Da jede hyperelliptische Fläche vom Geschlecht g genau $2g+2$ Weierstrasspunkte besitzt, so ergibt sich aus II:

III: Für $g>2$ ist S niemals hyperelliptisch.

Für den Beweis von I ist es zweckmässig, die Schottky-Verdoppelung S von G folgendermassen zu beschreiben:

$$S=\{(z,1)\mid z\in\bar{G}\}\cup\{(z,2)\mid z\in\bar{G}\}$$

mit der Identifikation

$$(z,1)=(z,2)\quad\forall z\in\partial G.$$

Topologie und konforme Struktur von S werden in bekannter Weise derart definiert, dass die zwei Teilgebiete von S:

$$S_1=\{(z,1)\mid z\in G\},\qquad S_2=\{(z,2)\mid z\in G\}$$

durch die Abbildungen

$$\varphi_1:(z,1)\to z,\qquad \varphi_2:(z,2)\to\bar{z}$$

konform auf G abgebildet werden. S besitzt die konformen Automorphismen

$$\Phi:(z,1)\to(\varepsilon z,1),\qquad (z,2)\to(\varepsilon z,2),$$
$$\Psi:(z,1)\to(\bar{z},2),\qquad (z,2)\to(\bar{z},1),$$

sowie den antikonformen Automorphismus

$$\theta:(z,1)\to(z,2),\qquad (z,2)\to(z,1).$$

Wir nehmen jetzt an, es sei (0, 2) ein Weierstrasspunkt, und m die zugehörige minimale Nicht-Lücke. Dann ist

$$1 < m \leqslant g, \tag{1}$$

und es gibt eine auf S meromorphe Funktion p, welche in (0, 2) einen Pol der Ordnung m besitzt und sonst überall holomorph ist. Durch Addition einer geeigneten Konstanten kann erreicht werden, dass $p(0, 1)=0$. Weiter kann durch Multiplikation mit einer passenden Zahl bewirkt werden, dass die Laurententwicklung von p in (0, 2) folgendermassen normiert ist:

$$p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \tag{2}$$

Dann folgt

$$(p \circ \Phi)(\bar{z}, 2) = p(\varepsilon \bar{z}, 2) = p(\overline{\varepsilon^{-1} z}, 2) = \varepsilon^m/z^m + a\,\varepsilon^{m-1}/z^{m-1} + \cdots$$

Die Funktion $p \circ \Phi - \varepsilon^m p$ besitzt somit in (0, 2) einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$, ist sonst überall holomorph, und verschwindet in (0, 1). Daher muss sie, gemäss Definition von m, überall verschwinden:

$$p \circ \Phi = \varepsilon^m p. \tag{3}$$

Jetzt betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von p in (0, 1):

$$p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Dann ist

$$(p \circ \Phi - \varepsilon^m p)(z, 1) = p(\varepsilon z, 1) - \varepsilon^m p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^k - \varepsilon^m)\, b_k z^k.$$

Wegen (3) folgt daraus: $(\varepsilon^k - \varepsilon^m) b_k = 0 \;\; \forall k \geqslant 1$, und somit wegen (1): $b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, m-1$. Da die Gesamtanzahl der Nullstellen von p auf S gleich m ist, folgt daraus:

$$p(z, 1) = b z^m + \cdots, \quad b \neq 0, \tag{4}$$

und p besitzt ausser (0, 1) keine weiteren Nullstellen auf S.

Aus (2) und (4) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} (p \circ \Psi)(z, 1) &= p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \\ (p \circ \Psi)(\bar{z}, 2) &= p(z, 1) = b z^m + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Das Produkt $p(p \circ \Psi)$ ist daher überall holomorph und somit konstant:

$$p \circ \Psi = b/p. \tag{6}$$

Weiter ergibt sich aus (2) und (4):

$$\begin{aligned} \overline{(p \circ \theta)}(z, 1) &= \overline{p(z, 2)} = 1/z^m + \bar{a}/z^{m-1} + \cdots \\ \overline{(p \circ \theta)}(\bar{z}, 2) &= \overline{p(\bar{z}, 1)} = \bar{b} z^m + \cdots \end{aligned}$$

Daraus und aus (5) folgt, dass die meromorphe Funktion $\overline{p \circ \theta} - p \circ \Psi$ in (0, 1) einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$ besitzt, überall sonst holomorph ist, und in (0, 2) von einer Ordnung $\geqslant m$ verschwindet; sie verschwindet daher überall, und wegen (6) folgt:

$$p \circ \theta = \bar{b}/\bar{p}.$$

Für $z \in \partial G$ folgt daraus wegen $\theta(z, 1) = (z, 1) : p(z, 1) = \bar{b}/\overline{p(z, 1)}$. Somit gibt es ein $r > 0$ so, dass $b = r^2$ und $|p(z, 1)| = r \ \forall z \in \partial G$. Sei jetzt $\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_g$ der Randzyklus von G. Dann hat die Funktion

$$f(z) = p(z, 1), \quad z \in \bar{G},$$

offenbar folgende Eigenschaften:

a) f ist holomorph auf $\bar{G}$, verschwindet im Nullpunkt von der Ordnung m und sonst nirgends in $\bar{G}$.

b) Die Bildzyklen $f(\gamma_j)$ liegen auf der Kreislinie mit dem Zentrum 0 und Radius r.

Wir betrachten die Umlaufszahlen dieser Bildzyklen um den Nullpunkt:

$$n_j = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_j} df/f, \quad j = 0, 1, \ldots, g.$$

Wegen a) ist

$$\sum_{j=0}^{g} n_j = m,$$

und wegen b) gilt: Auf γ_j nimmt f jeden Wert c, $|c| = r$, in mindestens $|n_j|$ verschiedenen Stellen an. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

1.) Sind alle $n_j \neq 0$, so nimmt f etwa den Wert r auf jedem γ_j mindestens einmal an. f besitzt also auf ∂G mindestens $g+1$ verschiedene r-Stellen. Damit besitzt aber p auf S mindestens $g+1 > m$ verschiedene r-Stellen. Das ist unmöglich.

2.) Ist $n_{j_0} = 0$, so wähle man einen Punkt $z_0 \in \gamma_{j_0}$. Dann nimmt f den Wert $c = f(z_0)$ auf γ_{j_0} mindestens einmal, auf jedem anderen γ_j mindestens $|n_j|$ mal an. Für die Gesamtzahl N der verschiedenen c-Stellen von f auf ∂G ergibt sich also

$$N \geqslant 1 + \sum_{j \neq j_0} |n_j| \geqslant 1 + |\sum_{j \neq j_0} n_j| = 1 + m.$$

Das ist wiederum nicht möglich.

Somit kann (0, 2) kein Weierstrasspunkt sein; dann ist aber auch $(0, 1) = \Psi(0, 2)$ keiner.

Eingegangen 26.9.68