Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen.

Nicht-hyperelliptische Schottky-Verdoppelungen

HEINZ HUBER (Basel)

Im Rahmen der geometrischen Funktionentheorie ist es wünschenswert, zu jeder natürlichen Zahl $g>2$ eine möglichst einfache kompakte Fläche vom Geschlecht g zu konstruieren, die nicht hyperelliptisch ist. Zu diesem Ende betrachten wir ein $(g+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet G der komplexen Ebene, dessen Randkomponenten g kongruente Kreise mit den Zentren ε^k, $(0 \leqslant k \leqslant g-1$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/g)$, $g \geqslant 2)$, und ein Kreis mit dem Zentrum 0 sind. Die Abbildung $z \to \varepsilon z$ von G auf sich induziert einen konformen Automorphismus Φ der Schottky-Verdoppelung S von G, der genau zwei Fixpunkte auf S besitzt. Wir werden zeigen:

I: Die beiden Fixpunkte von Φ sind keine Weierstrasspunkte von S.

Da die von Φ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung g als Permutationsgruppe auf der Menge der Weierstrasspunkte wirkt, und weil die Fixpunktmenge dieser Gruppe nur aus den beiden Fixpunkten von Φ besteht, so folgt aus I als Korollar:

II: Die Anzahl der Weierstrasspunkte von S ist teilbar durch g.

Da jede hyperelliptische Fläche vom Geschlecht g genau $2g+2$ Weierstrasspunkte besitzt, so ergibt sich aus II:

III: Für $g>2$ ist S niemals hyperelliptisch.

Für den Beweis von I ist es zweckmässig, die Schottky-Verdoppelung S von G folgendermassen zu beschreiben:

$$S = \{(z, 1) \mid z \in \bar{G}\} \cup \{(z, 2) \mid z \in \bar{G}\}$$

mit der Identifikation

$$(z, 1) = (z, 2) \quad \forall z \in \partial G.$$

Topologie und konforme Struktur von S werden in bekannter Weise derart definiert, dass die zwei Teilgebiete von S:

$$S_1 = \{(z, 1) \mid z \in G\}, \qquad S_2 = \{(z, 2) \mid z \in G\}$$

durch die Abbildungen

$$\varphi_1 : (z, 1) \to z, \qquad \varphi_2 : (z, 2) \to \bar{z}$$

konform auf G abgebildet werden. S besitzt die konformen Automorphismen

$$\Phi : (z, 1) \to (\varepsilon z, 1), \qquad (z, 2) \to (\varepsilon z, 2),$$
$$\Psi : (z, 1) \to (\bar{z}, 2), \qquad (z, 2) \to (\bar{z}, 1),$$

sowie den antikonformen Automorphismus

$$\theta : (z, 1) \to (z, 2), \qquad (z, 2) \to (z, 1).$$

Wir nehmen jetzt an, es sei (0, 2) ein Weierstrasspunkt, und m die zugehörige minimale Nicht-Lücke. Dann ist

$$1 < m \leqslant g, \tag{1}$$

und es gibt eine auf S meromorphe Funktion p, welche in (0, 2) einen Pol der Ordnung m besitzt und sonst überall holomorph ist. Durch Addition einer geeigneten Konstanten kann erreicht werden, dass $p(0, 1)=0$. Weiter kann durch Multiplikation mit einer passenden Zahl bewirkt werden, dass die Laurententwicklung von p in (0, 2) folgendermassen normiert ist:

$$p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \tag{2}$$

Dann folgt

$$(p \circ \Phi)(\bar{z}, 2) = p(\varepsilon \bar{z}, 2) = p(\overline{\varepsilon^{-1} z}, 2) = \varepsilon^m/z^m + a\,\varepsilon^{m-1}/z^{m-1} + \cdots$$

Die Funktion $p \circ \Phi - \varepsilon^m p$ besitzt somit in (0, 2) einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$, ist sonst überall holomorph, und verschwindet in (0, 1). Daher muss sie, gemäss Definition von m, überall verschwinden:

$$p \circ \Phi = \varepsilon^m p. \tag{3}$$

Jetzt betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von p in (0, 1):

$$p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Dann ist

$$(p \circ \Phi - \varepsilon^m p)(z, 1) = p(\varepsilon z, 1) - \varepsilon^m p(z, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^k - \varepsilon^m)\, b_k z^k.$$

Wegen (3) folgt daraus: $(\varepsilon^k - \varepsilon^m) b_k = 0 \;\; \forall k \geqslant 1$, und somit wegen (1): $b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, m-1$. Da die Gesamtanzahl der Nullstellen von p auf S gleich m ist, folgt daraus:

$$p(z, 1) = b\, z^m + \cdots, \quad b \neq 0, \tag{4}$$

und p besitzt ausser (0, 1) keine weiteren Nullstellen auf S.

Aus (2) und (4) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} (p \circ \Psi)(z, 1) &= p(\bar{z}, 2) = 1/z^m + a/z^{m-1} + \cdots \\ (p \circ \Psi)(\bar{z}, 2) &= p(z, 1) = b\, z^m + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Das Produkt $p(p \circ \Psi)$ ist daher überall holomorph und somit konstant:

$$p \circ \Psi = b/p. \tag{6}$$

Weiter ergibt sich aus (2) und (4):

$$\begin{aligned} \overline{(p \circ \theta)}(z, 1) &= \overline{p(z, 2)} = 1/z^m + \bar{a}/z^{m-1} + \cdots \\ \overline{(p \circ \theta)}(\bar{z}, 2) &= \overline{p(\bar{z}, 1)} = \bar{b}\, z^m + \cdots \end{aligned}$$

Daraus und aus (5) folgt, dass die meromorphe Funktion $\overline{p\circ\theta}-p\circ\Psi$ in (0, 1) einen Pol der Ordnung $\leqslant m-1$ besitzt, überall sonst holomorph ist, und in (0, 2) von einer Ordnung $\geqslant m$ verschwindet; sie verschwindet daher überall, und wegen (6) folgt:

$$p\circ\theta=\bar{b}/\bar{p}.$$

Für $z\in\partial G$ folgt daraus wegen $\theta(z,1)=(z,1)$: $p(z,1)=\bar{b}/\overline{p(z,1)}$. Somit gibt es ein $r>0$ so, dass $b=r^2$ und $|p(z,1)|=r\ \forall z\in\partial G$. Sei jetzt $\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_g$ der Randzyklus von G. Dann hat die Funktion

$$f(z)=p(z,1),\quad z\in\bar{G},$$

offenbar folgende Eigenschaften:

a) f ist holomorph auf $\bar{G}$, verschwindet im Nullpunkt von der Ordnung m und sonst nirgends in $\bar{G}$.

b) Die Bildzyklen $f(\gamma_j)$ liegen auf der Kreislinie mit dem Zentrum 0 und Radius r.

Wir betrachten die Umlaufszahlen dieser Bildzyklen um den Nullpunkt:

$$n_j=(2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_j}df/f,\quad j=0,1,\ldots,g.$$

Wegen a) ist

$$\sum_{j=0}^{g}n_j=m,$$

und wegen b) gilt: Auf γ_j nimmt f jeden Wert c, $|c|=r$, in mindestens $|n_j|$ verschiedenen Stellen an. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:

1.) Sind alle $n_j\neq 0$, so nimmt f etwa den Wert r auf jedem γ_j mindestens einmal an. f besitzt also auf ∂G mindestens $g+1$ verschiedene r-Stellen. Damit besitzt aber p auf S mindestens $g+1>m$ verschiedene r-Stellen. Das ist unmöglich.

2.) Ist $n_{j_0}=0$, so wähle man einen Punkt $z_0\in\gamma_{j_0}$. Dann nimmt f den Wert $c=f(z_0)$ auf γ_{j_0} mindestens einmal, auf jedem anderen γ_j mindestens $|n_j|$ mal an. Für die Gesamtzahl N der verschiedenen c-Stellen von f auf ∂G ergibt sich also

$$N\geqslant 1+\sum_{j\neq j_0}|n_j|\geqslant 1+\Big|\sum_{j\neq j_0}n_j\Big|=1+m.$$

Das ist wiederum nicht möglich.

Somit kann (0, 2) kein Weierstrasspunkt sein; dann ist aber auch $(0,1)=\Psi(0,2)$ keiner.

Eingegangen 26.9.68