Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques.

Autor(en): **Hersch, Joseph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33779

Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques

par JOSEPH HERSCH (Ecole polytechnique fédérale, Zürich)

§1. Introduction

Des applications bien connues de la représentation conforme à des problèmes plans de physique mathématique reposent sur *l'invariance de l'intégrale de Dirichlet* lors d'une «transplantation conforme» [9]: Soit $\zeta(z)$ une application conforme (univalente) d'un domaine plan G_z sur un autre G_ζ; la transplantée d'une fonction $f(\zeta)$, donnée dans G_ζ, est la fonction $\tilde{f}(z)=f(\zeta(z))$ et l'on a $D(\tilde{f})=D(f)$, où $D(f)=\iint_{G_\zeta} \operatorname{grad}^2 f \, dA_\zeta$ et dA est l'élément d'aire.

Nous allons étudier ici deux extensions de cette transplantation, qui restent applicables à des domaines de types topologiques différents et de dimensions N, $\tilde{N}$ quelconques. La première de ces extensions («transplantation harmonique») a été brièvement annoncée dans une note aux *Comptes rendus* ([7]; voir aussi [3]); elle permet de transplanter une fonction ayant les mêmes surfaces de niveau qu'une fonction harmonique. La seconde en revanche («transplantation par modules») n'est pas soumise à cette restriction; c'est pourquoi elle peut fournir des bornes inférieures pour la fréquence propre fondamentale d'une membrane: nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème isopérimétrique de Rayleigh–Faber–Krahn.

Toutes les considérations qui suivent restent valables pour N quelconque; pour faciliter le langage, elles seront exprimées ici pour $N=3$ dimensions.

§2. La «transplantation harmonique»

2.1. Soit G un domaine de l'espace, dont la frontière Γ se compose de trois parties $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_a$. Nous supposons l'existence de la solution $h(x, y, z)=h(X)$ du problème de Dirichlet suivant:

$$h = h_0 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \qquad h = h_1 = \text{const} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1,$$
$$\partial h/\partial n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a, \qquad \Delta h = 0 \quad \text{dans} \quad G.$$

Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Γ_0 de Γ_1 dans G: une «rive» de γ est connexe à Γ_0 dans $G-\gamma$, l'autre «rive» de γ est connexe à Γ_1; soit $\partial/\partial n$ la dérivée normale dirigée vers Γ_1. On sait que le flux $\iint_\gamma \partial h/\partial n \, dS$ est indépendant de γ, donc

$$\frac{1}{\mu} = 4\pi C = \frac{1}{(h_1 - h_0)^2} D(h)$$

$$= \frac{1}{(h_1 - h_0)^2}\left\{\iint\limits_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n} dS - \iint\limits_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n} dS\right\} = \frac{1}{h_1 - h_0}\iint\limits_{\gamma} \frac{\partial h}{\partial n} dS,$$

où $\mu = \mu_{\Gamma_0 \Gamma_1}$ est le «module», C la «capacité», $D(h) = \iiint_G \operatorname{grad}^2 h \, d\tau$ l'intégrale de Dirichlet, $d\tau$ l'élément de volume, dS l'élément de surface.

Soit $\psi(h)$ une fonction de classe C^1 dans l'intervalle $h_0 \leqslant h \leqslant h_1$; que vaut l'intégrale de Dirichlet $D(f)$ de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$, $X \in G$? Partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}} (h = \hat{h})$ de h; l'élément de volume peut s'écrire $d\tau = dn\, dS$, où dn est la distance entre les surfaces $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h} + d\hat{h}}$ au point considéré, et dS est sur $\gamma_{\hat{h}}$;

$$D(f) = \iiint\limits_G \psi'^2 \left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)^2 dn\, dS = \int\limits_{h_0}^{h_1} \psi'^2 (\hat{h})\, d\hat{h} \iint\limits_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n} dS = \frac{D(h)}{h_1 - h_0} \int\limits_{h_0}^{h_1} \psi'^2\, dh. \tag{1}$$

Le quotient

$$\frac{D(f)}{D(h)} = \frac{1}{h_1 - h_0} \int\limits_{h_0}^{h_1} \psi'^2\, dh \tag{2}$$

ne dépend donc que des nombres h_0 et h_1 et de la fonction $\psi(h)$.

2.2. Procédons de même pour un autre domaine $\tilde{G}$, *qui n'est pas nécessairement topologiquement équivalent à G* (et peut même avoir une dimension $\tilde{N}$ différente de N). Décomposons sa frontière $\tilde{\Gamma}$ en trois parties $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_a$; appelons $\tilde{h}$ la fonction harmonique dans $\tilde{G}$ qui vaut h_0 sur $\tilde{\Gamma}_0$, h_1 sur $\tilde{\Gamma}_1$, et dont la dérivée normale s'annule sur $\tilde{\Gamma}_a$.

DÉFINITION. – *La fonction $\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$ sera appelée la* **transplantée harmonique** *de la fonction $f(X) = \psi(h(X))$.*

La formule (2) reste valable pour $\tilde{f}$ et $\tilde{h}$, d'où

$$\frac{D(\tilde{f})}{D(\tilde{h})} = \frac{D(f)}{D(h)}. \tag{2'}$$

En particulier, si $D(\tilde{h}) = D(h)$, c'est-à-dire *si $\tilde{\mu} = \mu$*, alors $D(\tilde{f}) = D(f)$ et l'intégrale de Dirichlet est *invariante* par cette transplantation harmonique.

2.3. Soit G un domaine de l'espace, de frontière Γ décomposée en Γ_0 et Γ_a. Nous supposons l'existence d'une *fonction de Green* $g(X, Q)$ (X, point variable; Q, point fixe dans G), définie par $g=0$ pour $X\in\Gamma_0$, $\partial g/\partial n_X=0$ pour $X\in\Gamma_a$, et $-\Delta_X g=\delta_Q$ (mesure de Dirac au point Q). Cette fonction de Green $g(X, Q)=h(X)$, harmonique dans $G-Q$, jouera le même rôle que la fonction h de 2.1. Soit γ une surface, ou un système de surfaces, séparant Q de Γ_0 dans G, nous avons ici $\iint_\gamma \partial h/\partial n\, dS=1$, d'où par (1), pour une fonction $f(X)=\psi(h(X))$,

$$D(f)=\int_0^\infty \psi'^2\, dh. \qquad (1')$$

Soit $\tilde{h}(\tilde{X})=\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Q})$ une fonction de Green dans un autre domaine $\tilde{G}$ avec $\tilde{\Gamma}= =\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_a$, nous pouvons «transplanter» f de G sur $\tilde{G}$ en définissant $\tilde{f}(\tilde{X})=\psi(\tilde{h}(\tilde{X}))$. Alors $D(\tilde{f})=D(f)$.

2.4. Pour généraliser la notion de «rayon conforme», nous définissons (grâce à la fonction de Green) le «*rayon harmonique*» $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ d'un domaine G en un point $Q\in G$, relatif à Γ_0 et Γ_a ($\Gamma_0+\Gamma_a=\Gamma$ frontière de G); $R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est le rayon de la boule sphérique B_N de même dimension N (par exemple $N=3$) que G, de centre $\tilde{Q}$, et telle que, avec $\tilde{\Gamma}_0=\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_a$ vide, $g_B(\tilde{X}, \tilde{Q})-g_{G;\Gamma_0,\Gamma_a}(X, Q)\to 0$ lorsque ($\tilde{Q}$ et Q restant fixes) $|\tilde{X}\tilde{Q}|=|XQ|\to 0$. (Définition voisine de celle de la constante de Robin.) – Pour $N=3$, on a $4\pi g(X, Q)=|XQ|^{-1}-R_Q^{-1}+o(1)$.

Le *rayon harmonique maximum* $\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)$ est défini par

$$\dot{R}(G; \Gamma_0, \Gamma_a)=\max_{Q\in G} R_Q(G; \Gamma_0, \Gamma_a).$$

Si G est un domaine plan simplement connexe et si $\Gamma_0=\Gamma$ (Γ_a vide), alors $\dot{R}(G)$ est égal au rayon conforme maximum $\dot{r}\,(G)$ [9].

2.5. Un LEMME (cf. Carleman [1] et Szegö [11]):

Soit G un domaine borné de l'espace, dont la frontière est formée de n surfaces fermées $\Gamma_1^{(1)}+\Gamma_1^{(2)}+\cdots+\Gamma_1^{(n)}=\Gamma_1$ *intérieures* et d'une frontière *extérieure* Γ_0 (Γ_a vide); soient V_G le volume de G et $V_0\,(>V_G)$ le volume de tout le domaine borné délimité par Γ_0; *de tous ces domaines G ayant mêmes V_0 et V_G, le domaine limité par deux sphères concentriques réalise le Maximum du module $\mu=\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}$.*

Remarque – Il est bien connu (conséquence immédiate du principe de Dirichlet) que le module est une fonctionnelle de domaine monotone; la proposition suivante est donc équivalente au lemme:

V_0 et μ étant donnés, V_G est un Minimum pour le domaine compris entre deux sphères concentriques.

Démonstration du lemme. – Nous considérons la fonction h harmonique dans G, qui vaut 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1, et nous partageons G par toutes les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}$ $(h=\hat{h})$ de h.

$$\mu^{-1} = D(h) = \iint_{\Gamma_1} h \frac{\partial h}{\partial n} dS - \iint_{\Gamma_0} h \frac{\partial h}{\partial n} dS = \iint_{\Gamma_1} \frac{\partial h}{\partial n} dS = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\mathrm{grad}\, h|\, dS$$

pour tout $0 \leqslant \hat{h} \leqslant 1$. – D'autre part, le volume infinitésimal compris entre $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ vaut $|dV| = \iint_{\gamma_{\hat{h}}} dn\, dS = d\hat{h} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} |\mathrm{grad}\, h|^{-1}\, dS$; donc, par l'inégalité de Schwarz puis l'inégalité isopérimétrique géométrique dans l'espace,

$$\mu^{-1}\,|dV| \geqslant d\hat{h}\cdot\left(\iint_{\gamma_{\hat{h}}} dS\right)^2 \geqslant d\hat{h}\cdot(36\pi)^{2/3}\, V(\hat{h})^{4/3}, \tag{3}$$

où $V(\hat{h})$ est le volume de tout le domaine borné délimité par $\gamma_{\hat{h}}$; $V(0)=V_0$; $V(1)= = V_0 - V_G$; $|dV| = -(dV/d\hat{h})\, d\hat{h}$; donc, par (3), $-V^{-4/3}\, dV \geqslant (36\pi)^{2/3}\, \mu\, d\hat{h}$; d'où en intégrant ($\hat{h}$ va de 0 à 1):

$$(V_0 - V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3} \geqslant \tfrac{1}{3}(36\pi)^{2/3}\, \mu = (48\pi^2)^{1/3}\, \mu.$$

On a l'égalité dans le cas de deux sphères concentriques Γ_0 (rayon R_0, $V_0 = 4\pi R_0^3/3$) et Γ_1 (rayon R_1, $V_0 - V_G = 4\pi R_1^3/3$): *alors* $(48\pi^2)^{-1/3}\,[(V_0 - V_G)^{-1/3} - V_0^{-1/3}] = = (4\pi R_1)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = \mu$.

Remarque. – Le lemme et sa démonstration restent valables si l'on admet que Γ_0 soit formée de plusieurs surfaces fermées (dont l'une est la frontière extérieure); les volumes séparés de G par les composantes intérieures de Γ_0 ne doivent alors *pas* être comptés dans V_0. (Ce cas peut être considéré comme cas limite du précédent: on peut relier entre elles les diverses composantes de Γ_0 par des «tuyaux» minces.)

2.6. Le LEMME analogue, relatif au rayon harmonique maximum:
De tous les domaines G de l'espace, de volume V_G donné et dont la frontière Γ_0 consiste en une ou plusieurs surfaces fermées, la sphère a le plus grand rayon harmonique maximum $\dot{R}$.

En d'autres termes: $V_G \geqslant (4/3)\, \pi \dot{R}(G)^3$.

Remarque heuristique. – Ce lemme peut être considéré comme un cas limite du précédent, Γ_1 étant une sphère infinitésimale.

Démonstration. – Soit $Q \in G$ tel que $R_Q(G) = \dot{R}$; lorsque $X \to Q$, la fonction de Green $g(X, Q)$ est de la forme $4\pi g(X, Q) = |XQ|^{-1} - \dot{R}^{-1} + o(1)$. Soit V_K le volume du sous-domaine $G_K = \{X \in G \mid 0 < g(X, Q) < K\}$; le module de G_K vaut K; donc, par le lemme de 2.5, V_K est au moins égal au volume compris entre deux sphères concentriques de rayons R_0 et $R_K < R_0$, la sphère extérieure ayant le volume V_G et le module étant K: $(4/3)\,\pi R_0^3 = V_G$, $(4\pi R_K)^{-1} - (4\pi R_0)^{-1} = K$; $V_G - V_K \leqslant 4\pi R_K^3/3$, donc *il existe un point* X *tel que* $|XQ| \leqslant R_K$ *et* $g(X, Q) \leqslant K$.

Par la définition de $\dot{R} = R_Q(G)$,

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{r}{\exists}\ \underset{\substack{X \\ |XQ|<r}}{\forall}\ g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon;$$

choisissons $K = (4\pi r)^{-1} - (48\pi^2 V_G)^{-1/3}$, alors $R_K = r$; $\exists X$ tel que $|XQ| \leqslant r$ et $g(X, Q) \leqslant K$;

$$K \geqslant g(X, Q) > \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|XQ|} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon \geqslant \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\dot{R}}\right) - \varepsilon$$
$$= K + (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - (4\pi\dot{R})^{-1} - \varepsilon;$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $(4\pi\dot{R})^{-1} > (48\pi^2 V_G)^{-1/3} - \varepsilon$, donc $V_G \geqslant 4\pi\dot{R}^3/3$.

2.7. *Extension du théorème isopérimétrique* $\lambda_1 \dot{r}^2 \leqslant j_0^2$ *de Pólya–Szegö* [9].

Nous considérons le problème de la «membrane vibrante à N dimensions»: $\Delta u + \lambda^G u = 0$ dans le domaine G et $u = 0$ sur la frontière Γ.

THÉORÈME. – *Parmi tous les domaines G à N dimensions admettant une fonction de Green, la boule sphérique* B_N *réalise le Maximum de* $\lambda_1^G \dot{R}(G)^2$.

Démonstration (exprimée ici pour $N = 3$). – Soient $\tilde{Q}$ le centre d'une boule sphérique $B = B_N$ de rayon $R = \dot{R}(G)$; Q un point de G où $R_Q(G) = \dot{R}(G)$; $\tilde{u}_1(\tilde{X}) = \psi(\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}))$ la fonction propre fondamentale de B; sa «transplantée» $U(X) = \psi(g_G(X, Q))$ s'annule sur Γ, elle est admissible pour le principe de Rayleigh dans G:

$$\lambda_1^G \leqslant R[U] = D(U) \Big/ \iiint_G U^2\, d\tau;$$

on va montrer que ce quotient de Rayleigh est

$$\leqslant D(\tilde{u}_1) \Big/ \iiint_B \tilde{u}_1^2\, d\tilde{\tau} = \lambda_1^B.$$

En effet, $D(U) = D(\tilde{u}_1)$ (cf. 2.3); d'autre part, le sous-domaine $\hat{G} = \{X \mid g_G(X, Q) > \hat{g}\}$ a la fonction de Green $g_{\hat{G}}(X, Q) = g_G(X, Q) - \hat{g}$, donc le rayon conforme maximum $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$, où (cf. 2.4) $R_Q(\hat{G})^{-1} = \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$, $\dot{R}(\hat{G})^{-1} \leqslant \dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}$; en vertu du lemme 2.6 (cas $N = 3$), son volume $V_{\hat{G}} \geqslant (4/3)\,\pi\dot{R}(\hat{G})^3 \geqslant (4/3)\,\pi\,[\dot{R}(G)^{-1} + 4\pi\hat{g}]^{-3} = V_{\hat{B}}$, où $\hat{B}$ est la boule de rayon $\hat{R}$ dans laquelle $\tilde{g}_B(\tilde{X}, \tilde{Q}) > \hat{g}$; en effet, $\hat{R}$ est déterminée par $4\pi\hat{g} = \hat{R}^{-1} - \dot{R}(G)^{-1}$.

La fonction ψ étant monotone croissante,

$$\iiint\limits_G U^2\,d\tau = \int\limits_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{G}}\,d[\psi^2(\hat{g})] \geqslant \int\limits_{\hat{g}=0}^{\infty} V_{\hat{B}}\,d[\psi^2(\hat{g})] = \iiint\limits_B \tilde{u}_1^2\,d\tilde{\tau}.$$

Ainsi s'achève la démonstration (ici pour $N=3$) de l'inégalité isopérimétrique $\lambda_1^G \leqslant \lambda_1^{B_N}$.

Remarque. – Nous avons utilisé ci-dessus $\dot{R}(\hat{G}) \geqslant R_Q(\hat{G})$; en fait, *on a l'égalité*, ce qui est un corollaire de la suradditivité des modules.

Pour $N=3$ dimensions, on a $\lambda_1^{B_3} = \pi^2/R^2$, donc

$$\lambda_1^G \dot{R}^2(G) \leqslant \pi^2. \tag{4}$$

2.8. Application de (4) à quelques domaines dont on connaît λ_1:

(a) Parallélépipède rectangle de côtés a, b, c: $\lambda_1 = \pi^2(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(a; b; c)$. ([4], pp. 12 ss.)

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3abc/4\pi$, soit $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(a; b; c)$, qui est plus faible car $(3/4\pi)^{1/3} \simeq 0{,}620 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$.

(b) Cas particulier $a=b=c$ (cube): $\lambda_1 = 3\pi^2/a^2$, d'où $\dot{R} \leqslant a/\sqrt{3} \simeq 0{,}57735a$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > 0{,}5a$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/4\pi)^{1/3}\,a \simeq 0{,}620a$.]

(c) Cas limite $b=c=\infty$: G est le domaine compris entre deux plans parallèles, de distance a; $\lambda_1 = \pi^2/a^2$, (4) donne $\dot{R} \leqslant a$; la valeur exacte est $\dot{R} = a/\ln 4 \simeq 0{,}72135a$. On a donc ici $\lambda_1\dot{R}^2 = (\pi/\ln 4)^2 \simeq 0{,}52034\pi^2$. On a lieu de *conjecturer* que c'est, pour les domaines convexes à trois dimensions, la plus petite valeur possible de $\lambda_1\dot{R}^2$. [De façon analogue, Pólya et Szegö ([9], p. 17) ont conjecturé que, parmi les domaines convexes plans, la bande infinie réalise le Minimum de $\lambda_1\dot{r}^2$ ($\dot{r}$=rayon conforme maximum).]

(d) Cylindre de révolution infini, de rayon R: $\lambda_1 = j_0^2/R^2$, (4) donne donc $\dot{R} \leqslant \pi R/j_0 \simeq$ $\simeq 1{,}3064R$.

(e) Cylindre de révolution tronqué (rayon R, hauteur H): $\lambda_1 = j_0^2/R^2 + \pi^2/H^2$, d'où $\dot{R}^{-2} \geqslant j_0^2\pi^{-2}R^{-2} + H^{-2}$, soit $\dot{R} \leqslant 3^{-1/2}\mathfrak{M}_{-2}(\sqrt{2}\pi R/j_0; \sqrt{2}\pi R/j_0; H)$.

Comparaison: le lemme 2.6 donne $\dot{R}^3 \leqslant 3R^2H/4$, soit $\dot{R} \leqslant (3j_0^2/8\pi^2)^{1/3}\,\mathfrak{M}_0(\sqrt{2}\pi R/j_0;$ $\sqrt{2}\pi R/j_0; H)$ qui est plus faible, car $(3j_0^2/8\pi^2)^{1/3} \simeq 0{,}603 > 0{,}577 \simeq 3^{-1/2}$ et $\mathfrak{M}_0 \geqslant \mathfrak{M}_{-2}$. ([4], pp. 12 ss.)

(f) Cas particulier $H=2R$: Nous obtenons $\dot{R} \leqslant (j_0^2\pi^{-2}+0{,}25)^{-1/2}R \simeq 1{,}094R$. [Comparaisons: l'inégalité grossière de monotonie donne $\dot{R} > R$; le lemme 2.6 donne $\dot{R} \leqslant (3/2)^{1/3}\,R \simeq 1{,}145R$.] [Par le théorème de Rayleigh–Faber–Krahn, le lemme 2.6 est *toujours* plus faible que (4).]

Inversement, la connaissance de $\dot{R}$ (ou d'une borne inférieure) fournira une borne supérieure pour λ_1.

2.9. *Extension d'une propriété isopérimétrique des membranes rectangulaires* [5, 6]. Considérons un domaine G (dimension N quelconque) de frontière $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ (Γ_0, Γ_1, Γ_a disjointes). Nous supposons qu'il existe une fonction harmonique h dans G telle que $h=0$ sur Γ_0, $h=1$ sur Γ_1, $\partial h/\partial n=0$ sur Γ_a, et que $1/\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}=D(h)<\infty$. – Soit donnée dans G une «répartition de masses» $\varrho(x_1,..., x_N)=\varrho(X)$; masse totale $M=\int_G \varrho\, d\tau$. – Considérons dans G deux problèmes de «membranes vibrantes inhomogènes»:

$$\Delta u + \lambda\varrho u = 0 \quad \text{dans} \quad G, \qquad \text{avec}$$

0) $u=0$ sur Γ_0, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_1 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_0};

1) $u=0$ sur Γ_1, $\partial u/\partial n=0$ sur Γ_0 et Γ_a; première valeur propre λ_{Γ_1}.

Alors

$$\lambda_{\Gamma_0}^{-1} + \lambda_{\Gamma_1}^{-1} \geqslant 8M\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}/\pi^2. \tag{5}$$

Cette inégalité est *isopérimétrique*: on a l'égalité notamment avec $\varrho=\text{const}$ pour tout cylindre (ou prisme) tronqué droit, de faces opposées Γ_0 et Γ_1. – Elle a d'abord été démontrée à l'aide de la représentation conforme [5, 6] pour les «quadrilatères» et les domaines doublement connexes dans le plan.

Démonstration de (5). – La fonction $f_0(X)=\sin[\pi h(X)/2]$ est admissible pour le principe de Rayleigh caractérisant λ_{Γ_0}; $f_1(X)=\cos[\pi h(X)/2]$ pour celui caractérisant λ_{Γ_1}; partageons G par les surfaces de niveau $\gamma_{\hat{h}}(h=\hat{h})$ de h, nous obtenons

$$D(f_0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_G \cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \operatorname{grad}^2 h\, d\tau$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{\hat{h}=0}^{1} \cos^2\left(\frac{\pi\hat{h}}{2}\right) d\hat{h} \int_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n}\, dS = \frac{\pi^2}{8\mu} = D(f_1);$$

$$\frac{1}{\lambda_{\Gamma_0}} + \frac{1}{\lambda_{\Gamma_1}} \geqslant \frac{1}{R[f_0]} + \frac{1}{R[f_1]} = \frac{8\mu}{\pi^2} \int_G \varrho\cdot(f_0^2 + f_1^2)\, d\tau = \frac{8\mu}{\pi^2} M.$$

Remarque. – Pour les problèmes correspondants à 1 dimension dans l'intervalle $0<\tilde{x}<1$, nous avons la fonction harmonique $\tilde{h}=\tilde{x}$ et les fonctions propres fondamentales $\tilde{u}_0=\sin(\pi\tilde{x}/2)=\sin(\pi\tilde{h}/2)$ et $\tilde{u}_1=\cos(\pi\tilde{x}/2)=\cos(\pi\tilde{h}/2)$; les fonctions f_0 et f_1

utilisées dans la démonstration sont précisément les *transplantées harmoniques* de $\tilde{u}_0$ et $\tilde{u}_1$ (cf. 2.2).

§3. La «transplantation par modules»

3.1. La transplantation harmonique (§ 2) s'applique à des fonctions ayant les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique, ce qui est une forte restriction. Pour transplanter des fonctions n'ayant *pas* cette propriété, nous remarquons que *nous n'avons pas utilisé complètement l'harmonicité de* h! Nous avons utilisé (en 2.1) que le flux $\iint \partial h/\partial n\, dS$ est le même pour toutes les surfaces *de niveau* $\gamma_{\hat{h}}$ de h; tandis que l'harmonicité de h est équivalente à cette propriété pour *toute* surface γ. – On voit donc que, à l'aide de 2.1 et 2.2, nous saurons transplanter une fonction $f(X)$ (de classe C^1) dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a, pourvu que nous sachions *construire une fonction* $h(X)$ *dans* G, *ayant les mêmes surfaces de niveau* $\gamma_{\hat{h}}$ $(h=\hat{h})$ *que* $f(X)$ *et dont le flux* $\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \partial h(X)/\partial n\, dS$ *soit indépendant de* $\hat{h}$. – Le problème de 2.1 est donc modifié ainsi: On donne de nouveau h_0 et h_1, mais *on impose*, en lieu et place de l'harmonicité, *toutes les surfaces de niveau* $\gamma_{\hat{h}}$ *de* h, et la condition $\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \partial h/\partial n\, dS = \text{const.}$ Appelons k cette constante. La fonction h est complètement déterminée: c'est le potentiel électrostatique *en présence des «conducteurs parfaits»* $\gamma_{\hat{h}}$. Il est clair que la différence $d\hat{h}$ des valeurs de h sur deux conducteurs voisins $\gamma_{\hat{h}}$ et $\gamma_{\hat{h}+d\hat{h}}$ est proportionnelle au module infinitésimal (résistance électrique)

$$d\mu = \mu(dG) = [4\pi C(dG)]^{-1} = \left[\frac{1}{(d\hat{h})^2} D_{dG}(h)\right]^{-1} = \left[\frac{1}{d\hat{h}} \iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{\partial h}{\partial n}\, dS\right]^{-1}$$

$$= \left[\iint_{\gamma_{\hat{h}}} \frac{1}{dn}\, dS\right]^{-1} = \left(\frac{k}{d\hat{h}}\right)^{-1} = \frac{d\hat{h}}{k}, \qquad d\hat{h} = k\, d\mu.$$

On peut imposer *deux* des trois nombres h_0, h_1, k, la constante k (l'intensité) est proportionnelle à la différence $h_1 - h_0$. Sans aucune restriction essentielle, *nous choisirons dans ce travail* $h_0 = 0$ *et* $k = 1$, *ce qui détermine* h_1.

Nous avons donc

$$dh = d\mu$$

et, en désignant par γ_X la ligne de niveau passant par le point X,

$$h(X) = \int_{\Gamma_0}^{\gamma_X} d\mu = \mu^-(X);$$

nous introduisons la notation $\mu^-(X)$ (au lieu de $h(X)$), et nous dirons «le module au point X» pour désigner cette fonction ainsi définie dans G. Le signe – dans μ^- veut rappeler que, par suite de la *suradditivité des modules*, $\mu^-(X)=\mu^-(\gamma_X)\leqslant\mu_{\Gamma_0\gamma_X}$: il ne faut pas confondre $\mu^-=\int d\mu$ et μ.

La fonction cherchée est ainsi simplement le «module» $h(X)=\mu^-(X)$. On va *vérifier* qu'elle a bien la propriété voulue.

3.2. THÉORÈME. – *Le flux du «module» à travers chaque surface de niveau vaut* 1.

Démonstration. – Considérons deux surfaces de niveau voisines $\check{\gamma}$ et $\hat{\gamma}$; $\mu_{\check{\gamma}\hat{\gamma}}=d\mu=d\mu^-$; $dn(X)$ est la distance d'un point $X\in\hat{\gamma}$ à $\check{\gamma}$; par 3.1, nous avons

$$\iint\limits_{\hat{\gamma}}\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS=d\mu\iint\limits_{\hat{\gamma}}\frac{1}{dn}\,dS=d\mu\cdot\frac{1}{d\mu}=1\,.$$

Remarque. – Si Γ_1 se réduit à un point, le «module» $\mu^-(X)$ varie en général de 0 à $+\infty$. Ce n'est pas une fonction harmonique, mais son flux vaut 1 à travers chaque ligne de niveau: *c'est une extension naturelle de la notion de fonction de Green.*

3.3. Le «module» $\mu^-(X)$ ayant les mêmes lignes de niveau que $f(X)$, on peut écrire $f(X)=\psi(\mu^-(X))$, d'où (analogue à 2.1 et 2.3):

$$D(f)=\iiint\limits_{G}\psi'^2(\mu^-)\left(\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\right)^2 dn\,dS=\int\limits_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\iint\limits_{\gamma_{\mu^-}}\frac{\partial\mu^-}{\partial n}\,dS$$
$$=\int\limits_{\mu^-=0}^{\mu^-_{\max}}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \qquad (1'')$$

Dans le cas $0<\mu^-<\infty$ (cf. remarque ci-dessus), nous avons

$$D(f)=\int\limits_{\mu^-=0}^{\infty}\psi'^2(\mu^-)\,d\mu^-\,. \qquad (1''')$$

3.4. Etant donnés: (a) deux domaines G, $\tilde{G}$ (dont les dimensions N et $\tilde{N}$ ne sont même pas nécessairement égales), de frontières $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\Gamma_a$ et $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\tilde{\Gamma}_1+\tilde{\Gamma}_a$;

(b) une fonction f dans G, constante sur Γ_0, constante sur Γ_1, et de dérivée normale nulle sur Γ_a;

(c) une fonction F dans $\tilde{G}$, jouissant des propriétés analogues;

alors nous définissons la **transplantée par modules** $\tilde{f}(\tilde{X})$ *de* $f(X)$ comme suit:

$\mu^-(X)$ est définie dans G comme en 3.1, à l'aide des lignes de niveau de f; $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ de même dans $\tilde{G}$ à l'aide des lignes de niveau de F; alors $f(X)$ est de la forme $f(X) = \psi(\mu^-(X))$. [Souvent $\mu^-_{\max} = \mu^-(\Gamma_1)$, $\tilde{\mu}^-_{\max} = \tilde{\mu}^-(\tilde{\Gamma}_1)$.]

DÉFINITION:

$$\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi\left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\tilde{\mu}^-(\tilde{X})\right). \tag{6}$$

On a alors, par 3.3,

$$D(\tilde{f}) = \left(\frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}}\right)^2 \int\limits_{\mu^-=0}^{\mu-\max} \psi'^2(\mu^-)\, d\left(\frac{\tilde{\mu}^-_{\max}}{\mu^-_{\max}}\mu^-\right) = \frac{\mu^-_{\max}}{\tilde{\mu}^-_{\max}} D(f),$$

$$\tilde{\mu}^-_{\max} D(\tilde{f}) = \mu^-_{\max} D(f). \tag{2''}$$

En particulier, *si $\tilde{\mu}^-_{\max} = \mu^-_{\max}$, et également ici si tous deux sont infinis, nous définissons*

$$\tilde{f}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{\mu}^-(\tilde{X})), \tag{6'}$$

d'où

$$D(\tilde{f}) = D(f). \tag{2'''}$$

3.5. *Une autre démonstration du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn* [10, 2, 8, 9]

Ni la transplantation conforme, ni la transplantation harmonique (§ 2) ne peuvent servir à démontrer ce théorème $\lambda_1 A \geqslant \pi j_0^2$. ($A$ est l'aire du domaine, $j_0 \simeq 2{,}4048$ le premier zéro de la fonction de Bessel $J_0(x)$; on a l'égalité pour la membrane circulaire.) En effet, la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ du domaine plan considéré G ($u_1 = 0$ sur la frontière Γ) n'a en général *pas* les mêmes lignes de niveau qu'une fonction harmonique. Quand on compare G à une membrane circulaire K, une transplantation conforme ou harmonique ne peut donc avoir lieu que de K sur G, le principe de Rayleigh est alors appliqué (à la fonction transplantée) *dans* G: il ne peut fournir que des bornes *supérieures* pour λ_1.

En revanche, la «transplantation par modules» permet d'utiliser les lignes de niveau de u_1 dans G et de transplanter u_1 de G sur K.

Le théorème pour N dimensions est bien connu: *De tous les domaines de dimension N et de N-volume V donnés, la boule sphérique donne la plus petite valeur propre fondamentale λ_1.* – La démonstration suivante sera, elle aussi, exprimée pour $N = 3$ dimensions, mais elle reste valable pour tout N.

Nous avons ici $\Gamma_0 = \Gamma$, Γ_a est vide, Γ_1 est formée par le point (ou les points) où u_1 atteint son maximum. – Dans le domaine G considéré, nous définissons la fonction $\mu^-(X)$, comme en 3.1, à partir des surfaces de niveau de $u_1(X)$. La fonction ψ est définie par $u_1(X) = \psi(\mu^-(X))$. – Soit K une sphère de centre $\tilde{Q}$ et de volume V_G égal à celui de G: son rayon R est donné par $4\pi R^3/3 = V_G$. Le «module» $\tilde{\mu}^-(\tilde{X})$ dans K sera défini relativement aux sphères concentriques, d'où $\tilde{\mu}^-(\tilde{X}) = \tilde{\mu}(\tilde{X}) = (4\pi)^{-1}(|\tilde{X}\tilde{Q}|^{-1} - R^{-1})$. [Il est égal à $\tilde{g}_{\tilde{X}\tilde{Q}}$; on a *ici l'additivité* des modules.] La transplantée de $u_1(X)$ est $\tilde{u}(\tilde{X}) = \psi(\tilde{\mu}(\tilde{X}))$; $\tilde{u} = 0$ sur la frontière sphérique $\tilde{\Gamma}$ de K. Par (2‴),

$$D_K(\tilde{u}) = \int_{\mu^-=0}^{\infty} \psi'^2(\mu^-)\, d\mu^- = D_G(u_1) = \lambda_1^G \iiint_G u_1^2\, d\tau = \lambda_1^G \int_{\mu^-=0}^{\infty} \psi^2(\mu^-) \frac{dV}{d\mu^-}\, d\mu^-, \tag{7}$$

où dV est le volume compris entre les surfaces de niveau γ_{μ^-} et $\gamma_{\mu^- + d\mu^-}$; soit $V(\xi)$ le volume du sous-domaine de G où $\mu^- < \xi$; $dV/d\mu^- = dV/d\xi$; il suit du lemme 2.5 (Carleman, Szegö) que la dérivée $dV/d\xi$ est, pour chaque ξ, plus grande que pour une sphère de volume $V_G - V(\xi)$; donc, avec $4\pi r^3/3 = V_G - V(\xi)$,

$$\frac{dV}{d\xi} \geqslant \frac{-4\pi r^2\, dr}{-dr/4\pi r^2} = (4\pi r^2)^2 = (36\pi)^{2/3} (V_G - V(\xi))^{4/3};$$

d'où, en intégrant et en tenant compte de $V(\xi = 0) = 0$,

$$[V_G - V(\xi)]^{-1/3} \geqslant (48\pi^2)^{1/3}\, \xi + V_G^{-1/3} = [V_G - \tilde{V}(\xi)]^{-1/3}$$

pour tout ξ (analogue: 2.5), c'est-à-dire $V(\xi) \geqslant \tilde{V}(\xi)$; $V(\xi = \infty) = V_G = V_K = \tilde{V}(\xi = \infty)$.

La fonction $\psi(\xi)$ étant monotone croissante, on a par (7):

$$D_K(\tilde{u}) = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, dV(\xi) = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} [V_G - V(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)]$$

$$\leqslant \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} [V_K - \tilde{V}(\xi)]\, d[\psi^2(\xi)] = \lambda_1^G \int_{\xi=0}^{\infty} \psi^2(\xi)\, d\tilde{V}(\xi) = \lambda_1^G \iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau;$$

nous appliquons le principe de Rayleigh à la fonction $\tilde{u}(\tilde{X})$ dans K:

$$\lambda_1^K \leqslant R[\tilde{u}] = \frac{D_K(\tilde{u})}{\iiint_K \tilde{u}^2\, d\tau} \leqslant \lambda_1^G.$$

§4. Une interprétation-démonstration des théorèmes de Rayleigh–Faber–Krahn et de Pólya–Szegö: comparaison de cordes vibrantes inhomogènes de longueur infinie

4.1. Si nous considérons comme connues les surfaces de niveau de la fonction propre fondamentale $u_1(X)$ d'un domaine G (membrane à N dimensions, à frontière fixée), le problème de la vibration fondamentale devient équivalent à celui d'une corde inhomogène de longueur infinie, fixée à son extrémité gauche.

En effet, le quotient de Rayleigh (avec lignes de niveau γ_{μ^-} connues) est, par (1‴),

$$R[f]=\frac{D(f)}{\int_G f^2\,d\tau}=\frac{\int_{\mu^-=0}^{\infty}\left(\frac{d\psi}{d\mu^-}\right)^2 d\mu^-}{\int_{\mu^-=0}^{\infty}\frac{dV}{d\mu^-}\psi^2\,d\mu^-};$$

c'est le quotient de Rayleigh d'une telle corde inhomogène, avec la masse spécifique $\varrho(\mu^-)=dV/d\mu^-$, μ^- étant simplement l'abcisse. – La *masse totale* de la corde est $M=\int_{\mu^-=0}^{\infty}\varrho\,d\mu^-=V_G$. – La première valeur propre λ_1 et la première fonction propre $\psi(\mu^-)$ sont les mêmes pour la membrane et pour la corde.

4.2. *Interprétation du théorème de Rayleigh–Faber–Krahn.*

La comparaison entre une membrane G à N dimensions et une membrane dans une boule sphérique B_V (N dimensions aussi) de même N-volume V_G se ramène à la comparaison entre deux cordes inhomogènes (cf. 4.1) d'abcisse μ^-, de masses spécifiques $\varrho(\mu^-)$ et $\tilde{\varrho}(\mu^-)$ respectivement, mais *d'égale masse totale* $M=V_G$: $\lambda_1^G=\lambda_1^{\varrho}$, $\lambda_1^{B_V}=\lambda_1^{\tilde{\varrho}}$.

La démonstration donnée en 3.5 peut être interprétée ainsi: en vertu du lemme 2.5 (Carleman, Szegö), on a pour toute abcisse ξ:

$$\int_{\mu^-=0}^{\xi}\varrho\,d\mu^-\geqslant\int_{\mu^-=0}^{\xi}\tilde{\varrho}\,d\mu^-,\quad\text{donc aussi}\quad m(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}\varrho\,d\mu^-\leqslant\int_{\xi}^{\infty}\tilde{\varrho}\,d\mu^-=\tilde{m}(\xi);$$

$m(0)=M=\tilde{m}(0)$: *on passe de ϱ à $\tilde{\varrho}$ en déplaçant des masses vers la droite. (Il est intuitif que cela abaisse λ_1.)* – On peut, sans modifier le Minimum du quotient de Rayleigh, se restreindre aux fonctions $\psi(\mu^-)$ positives, *monotones* croissantes (le quotient de Rayleigh diminue si l'on remplace partout $d\psi$ par $|d\psi|$); pour chaque telle fonction ψ,

$$\int_{\mu^-=0}^{\infty}\varrho\psi^2\,d\mu^-=\int_{\xi=0}^{\infty}m(\xi)\,d[\psi^2(\xi)]\leqslant\int_{\xi=0}^{\infty}\tilde{m}(\xi)\,d[\psi^2(\xi)]=\int_{\mu^-=0}^{\infty}\tilde{\varrho}\psi^2\,d\mu^-,$$

$$R[\psi]=\frac{\int_0^{\infty}\psi'^2\,d\mu^-}{\int_0^{\infty}\varrho\psi^2\,d\mu^-}\geqslant\frac{\int_0^{\infty}\psi'^2\,d\mu^-}{\int_0^{\infty}\tilde{\varrho}\psi^2\,d\mu^-}=\tilde{R}[\psi];\quad\text{d'où}\quad\lambda_1^G=\lambda_1^{\varrho}\geqslant\lambda_1^{\tilde{\varrho}}=\lambda_1^{B_V}.$$

4.3. *Interprétation du théorème de Pólya–Szegö.*

Soit $Q\in G$ tel que $R_Q(G)=\dot{R}$; on compare la membrane à N dimensions dans G, *modifiée par l'imposition des lignes de niveau de* $g(X, Q)$, *ce qui fait augmenter* λ_1, avec la boule sphérique $B_{\dot{R}}$ de rayon $\dot{R}$; cela revient à comparer deux cordes infinies de masses spécifiques ϱ et $\tilde{\varrho}$; la démonstration donnée en 2.7 peut être interprétée ainsi: par le lemme 2.6, on a ici $m(\xi)\geqslant\tilde{m}(\xi)$ (voir 4.2), d'où $\lambda_1^G\leqslant\lambda_1^{\varrho}\leqslant\lambda_1^{\tilde{\varrho}}=\lambda_1^{B_{\dot{R}}}$.

Conclusion

La transplantation harmonique permet de suppléer, dans certains cas, à la transplantation conforme lorsque celle-ci n'est plus à disposition; tandis que la transplantation par modules, plus souple, ramène l'étude de fonctionnelles de domaines à celle des modules déterminés par les surfaces de niveau des solutions inconnues. – L'idée de la transplantation harmonique est voisine de la méthode de Pólya et Szegö ([9], pp. 100–105) consistant à imposer les lignes de niveau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Carleman, *Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik*, Math. Z. *1*, 208–212 (1918)
[2] G Faber, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitzungsberichte der Bayrischen Akad. der Wiss. *1923*, 169–172.
[3] T. Gasser et J. Hersch, *Über Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegö*, Z. Angew. Math. Phys. *19*, 672–675 (1968).
[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities* (Cambridge Univ. Press, 1959).
[5] J. Hersch, *Deux propriétés isopérimétriques des membranes homogènes rectangulaires*, C.R. Acad. Sci. Paris *261*, 2299 (1965).
[6] J. Hersch, *Anwendungen der konformen Abbildung auf isoperimetrische Sätze für Eigenwerte*, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Springer-Verlag, 1966), 25–34.
[7] J. Hersch, *«Transplantation harmonique» et extension de théorèmes isopérimétriques*, C.R. Acad. Sci. Paris *266*, 690 (1968).
[8] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Annalen *94*, 97–100 (1924).
[9] G. Pólya et G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton Univ. Press, 1951).
[10] Lord Rayleigh, *The theory of sound*, 2nd edition (London 1894/96).
[11] G. Szegö, *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31*, 583–593 (1930).

Summary

The "harmonic transplantation" allows to extend some isoperimetric theorems, so far proved by conformal mapping, to higher connectivity and to higher dimensions; for the first eigenvalue λ_1 of a membrane, it again can give only upper bounds. – The "transplantation by moduli" is much more flexible; for example, it leads to a simple one-dimensional interpretation of the Rayleigh–Faber–Krahn theorem.

Reçu le 16 octobre 1968