Über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers.

Über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers

von H. GROSS und P. HAFNER

Es sei K ein angeordneter Körper und Δ_1 ein reeller Abschluss von K (d.h. Δ_1 ist ein maximaler formal reeller, algebraischer Überkörper von K, dessen einzige Anordnung diejenige von K fortsetzt). Nach Artin und Schreier [1] ist ein solcher Körper Δ_1 durch K „eindeutig" bestimmt: ist Δ_2 ein weiterer reeller Abschluss von K, dann gibt es einen ordnungstreuen Körperisomorphismus zwischen Δ_1 and Δ_2, der auf K die Identität ist. Im Beweise von Artin und Schreier wird von dem bekannten Sturmschen Satze Gebrauch gemacht, wonach sich bereits in K bestimmen lässt, wieviele Nullstellen α ein Polynom $f(x)\in K[x]$ in einem reellen Abschluss Δ besitzt, α zwischen vorgeschriebenen Grenzen a und b aus K.

Ein Beweis für diese Eindeutigkeit von Δ_1 *ohne* Verwendung des Sturmschen Theorems ist uns bisher nicht bekannt. Bourbaki [2] verweist auf van der Waerden [5], der den ursprünglichen Beweis von Artin und Schreier bringt. Denselben Beweis findet man bei Jacobson [3] dargestellt. Serge Lang versucht in seiner Algebra [4] den Gebrauch des Sturmschen Theorems durch eine Verwendung des Zwischenwertsatzes zu umgehen. Der Beweis versagt, da er zur Voraussetzung macht, dass der Körper K, bei der üblichen Betragstopologie, in Δ_1 dicht liege; dazu gibt es aber Gegenbeispiele, und in der zweiten Auflage von [4] steht dann auch wieder der alte Beweis. Wie uns Herr van der Waerden berichtet, hatten er, Artin und Schreier versucht, ohne den Sturmschen Satz auszukommen.

Im folgenden beweisen wir nun durch Induktion nach dem Grad eines Polynoms $f(x)\in K[x]$, dass $f(x)$ eine Nullstelle in Δ_2 besitzt, falls es eine Nullstelle in Δ_1 besitzt. Die im Beweis stillschweigend verwendeten Sätze, nämlich der Weierstraßsche Nullstellensatz und der Satz von Rolle, folgen aus der Tatsache, dass $\Delta_1(\sqrt{-1})$ und $\Delta_2(\sqrt{-1})$ algebraisch abgeschlossen sind, d.h. ohne jede Verwendung des Sturmschen Satzes. Aus diesem Resultat ergibt sich dann die Eindeutigkeit von Δ wie üblich mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

SATZ: *$\sigma: K_1 \to K_2$ sei ein ordnungstreuer Isomorphismus irgendwelcher angeordneter Körper K_1 und K_2, Δ_i seien reelle Abschlüsse von K_i $(i=1, 2)$, $f(x)\in K_1[x]$ besitze eine Nullstelle in Δ_1. Dann gilt:*

(i) *$f^\sigma(x)\in K_2[x]$ hat eine Nullstelle in Δ_2. Ist $f(x)$ zudem noch irreduzibel, so gilt ferner:*

(ii) *es gibt Wurzeln $\alpha\in\Delta_1$, $\beta\in\Delta_2$ von $f(x)$ bzw. $f^\sigma(x)$, derart, dass der Isomorphismus $\varphi: K_1(\alpha)\cong K_2(\beta)$ mit $\varphi(\alpha)=\beta$ und $\varphi|_{K_1}=\sigma$ ordnungstreu ist.*

Bemerkung: es ist klar, dass (ii) auch für reduzible f gilt (Folgerung (a) enthält diese Überlegung). Die Voraussetzung der Irreduzibilität erspart uns eine Fallunterscheidung im Beweis.

Beweis: durch Induktion nach dem Grad von $f(x)$.

1) Für lineare Polynome ist nichts zu beweisen.

2) Induktionsvoraussetzung: der Satz sei richtig für Polynome vom Grad $\leqslant n-1$; $f(x) \in K_1[x]$ sei ein Polynom vom Grad n mit höchstem Koeffizienten 1 (o.B.d.A.) und mit einer Nullstelle in Δ_1.

Folgerungen: (a) Ist $h(x) \in K_1[x]$ ein Polynom vom Grad $\leqslant n-1$ und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ alle verschiedenen Nullstellen von $h(x)$ in Δ_1, sind ferner $\beta_1, \ldots, \beta_s$ alle verschiedenen Nullstellen von $h^\sigma(x)$ in Δ_2, so gilt:

(i) $r = s$,

(ii) es gibt einen Isomorphismus $K_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cong K_2(\beta_1, \ldots, \beta_r)$,

der ordnungstreu ist und σ fortsetzt.

Das folgt sofort aus der Induktionsvoraussetzung (die Rolle der K_i kann auch von endlichen ordnungsisomorphen algebraischen Erweiterungen K_i', $K_i \subset K_i' \subset \Delta_i$ gespielt werden. Die dabei festgehaltenen Körper Δ_i sind je auch reelle Abschlüsse der K_i').

(b) Seien $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ nun insbesondere alle Nullstellen der Ableitung $f'(x)$ in Δ_1, β_i alle Nullstellen von $f'^\sigma(x) = f^{\sigma\prime}(x)$ in Δ_2, $\tilde{K}_1 = K_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\tilde{K}_2 = K_2(\beta_1, \ldots, \beta_r)$. Nach (a) gibt es einen ordnungstreuen Isomorphismus

$$\tau: \tilde{K}_1 \cong \tilde{K}_2,$$

der σ fortsetzt.

(c) Wir setzen zusätzlich voraus, $f(x)$ sei irreduzibel und $f^\sigma(x)$ besitze eine Nullstelle in Δ_2. $\alpha \in \Delta_1$ bzw. $\beta \in \Delta_2$ sei die grösste Nullstelle von $f(x)$ bzw. $f^\sigma(x)$. Ist $\hat{K}_i$ Teilmenge von Δ_i, so definieren α bzw. β je einen Schnitt $\hat{K}_i = U_i \cup O_i$ (disjunkt), wobei $U_1 = \{x \mid x \in \hat{K}_1, x \leqslant \alpha\}$, $O_1 = \{x \mid x \in \hat{K}_1, x > \alpha\}$, analog U_2 und O_2. Es seien nun $\hat{K}_i$ Unterkörper von Δ_i, welche $\tilde{K}_i$ umfassen und für die eine ordnungstreue Fortsetzung

$$\kappa: \hat{K}_1 \cong \hat{K}_2$$

von τ (und damit von σ) existiert. (Zu jedem $\hat{K}_1$ mit $[\hat{K}_1 : \tilde{K}_1] \leqslant n-1$ gibt es $\hat{K}_2$, so dass diese Bedingung erfüllt ist).

Behauptung:

$$\kappa(O_1) = O_2, \quad \kappa(U_1) = U_2.$$

Beweis: wir zeigen: $\kappa(O_1) \cap U_2 = \emptyset$; eine analoge Betrachtung ergibt

$\kappa^{-1}(O_2)\cap U_1=\emptyset$. Daraus wird klar, dass $\kappa(O_1)\subset O_2$, $\kappa^{-1}(O_2)\subset O_1$, also $\kappa(O_1)=O_2$ ist. Und daraus folgt natürlich auch $\kappa(U_1)=U_2$.

α ist die grösste Nullstelle von $f(x)$, also ist $f(\zeta)>0$ für alle $\zeta\in O_1$ (denn 1 ist der höchste Koeffizient in f). Falls $f'^{\sigma}(x)$ in U_2 eine Wurzel hat, bezeichnen wir die grösste Wurzel $\leqslant\beta$ von $f'^{\sigma}(x)$ mit γ; andernfalls sei γ ein beliebiges Element aus U_2. Wegen der Irreduzibilität von f^{σ} und da $\hat{K}_2$ sämtliche Nullstellen von f'^{σ} enthält, gilt $f^{\sigma}(\eta)\leqslant 0$ für alle $\eta\in[\![\gamma,\beta]\!]\subset\hat{K}_2$. Falls es ein $\xi'\in O_1$ gibt mit $\kappa(\xi')\in U_2$, so gibt es auch ein $\xi\in O_1$ mit $\kappa(\xi)\in[\![\gamma,\beta]\!]$, nämlich $\xi=\xi'$ oder $\xi=\kappa^{-1}(\gamma)$. Also gilt

$$f(\xi)>0 \quad \text{und} \quad f^{\sigma}(\kappa(\xi))\leqslant 0\,;$$

dies ist ein Widerspruch, da κ eine ordnungstreue Fortsetzung von τ und σ ist.

(3) Induktionsschritt: ist der Grad von $f(x)$ ungerade, so hat $f^{\sigma}(x)$ selbstverständlich eine Nullstelle in Δ_2. Ist der Grad von $f(x)$ gerade, so hat $f(x)$ in Δ_1 mindestens zwei (evtl. zusammenfallende) Nullstellen. Es sei θ die grösste Nullstelle von $f'(x)$ in Δ_1, zu der es eine Wurzel $\pi\in\Delta_1$ von $f(x)$ mit $\theta\leqslant\pi$ gibt; dann ist $f(\theta)\leqslant 0$. Nun ist $\theta\in\tilde{K}_1$, also gilt in $\tilde{K}_2$ entsprechend $f^{\sigma}(\tau(\theta))\leqslant 0$. Ist $f^{\sigma}(\tau(\theta))\neq 0$, so muss man noch den Weierstraß'schen Nullstellensatz anwenden. Damit ist (i) bewiesen.

Für den Beweis von (ii) dürfen wir annehmen, dass f irreduzibel ist über K_1 (von geradem oder ungeradem Grad). Es ist zu zeigen, dass eine Wurzel $\alpha\in\Delta_1$ von $f(x)$ existiert, so dass es einen ordnungstreuen Isomorphismus $K_1(\alpha)\to\Delta_2$ gibt, welcher σ fortsetzt. Sei α die grösste Wurzel von $f(x)$ in Δ_1, β die grösste Wurzel von $f^{\sigma}(x)$ in Δ_2. Ist $[\tilde{K}_1(\alpha):\tilde{K}_1]\leqslant n-1$, dann ist die Abbildung:

$$\varrho:\tilde{K}_1(\alpha)\cong\tilde{K}_2(\beta) \quad \text{mit} \quad \varrho(\alpha)=\beta \quad \text{und} \quad \varrho|_{\tilde{K}_1}=\tau$$

ein ordnungstreuer Isomorphismus. Ist $[\tilde{K}_1(\alpha):\tilde{K}_1]=n$, dann ist $f(x)$ auch irreduzibel über $\tilde{K}_1$, d.h. ϱ ist auf alle Fälle ein Isomorphismus. Wäre ϱ nicht ordnungstreu, so gäbe es ein Element

$$\omega=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i>0 \quad \text{in} \quad \tilde{K}_1(\alpha) \quad \text{mit} \quad \varrho(\omega)=\sum\tau(a_i)\beta^i<0\,.$$

Man hätte also ein Polynom

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\in\tilde{K}_1[x]$$

vom Grad $\leqslant n-1$ mit $p(\alpha)>0, p^{\tau}(\beta)<0$. Es gibt einen irreduziblen Faktor $p_0(x)$ von $p(x)$, für den ebenfalls gilt $p_0(\alpha)>0, p_0^{\tau}(\beta)<0$. Sind $\delta_1,\ldots,\delta_t$ alle Nullstellen von $p_0(x)$ in Δ_1, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t$ alle Nullstellen von $p_0^{\tau}(x)$ in Δ_2, $\hat{K}_1=\tilde{K}_1(\delta_1,\ldots,\delta_t)$, $\hat{K}_2=\tilde{K}_2(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t)$, so gibt es nach Folgerung (a) einen ordnungstreuen Isomorphismus

$$\kappa:\hat{K}_1\cong\hat{K}_2\,,$$

der τ fortsetzt. Die Anzahl der Nullstellen von $p_0(x)$ in der Oberklasse $O_1 \subset \hat{K}_1$ von α ist verschieden von der Anzahl Nullstellen von $p_0^\tau(x)$ in der Oberklasse $O_2 \subset \hat{K}_2$ von β, d.h.

$$\kappa(O_1) \neq O_2$$

im Widerspruch zu Folgerung (c); ist nämlich der höchste Koeffizient a_0 von p_0 positiv, so liegen in O_1 eine gerade Anzahl Nullstellen von $p_0(x)$, während die Anzahl der Nullstellen von $p_0(x)$ in O_2 ungerade ist; analog für $a_0<0$. (Will man in dieser elementaren Beweisführung auch das Zählen von Vorzeichenwechseln bei mehrfachen Nullstellen zulassen – beispielsweise unter Verwendung der Taylorschen Entwicklung – dann kann man sich den Übergang von $p(x)$ zu $p_0(x)$ natürlich ersparen.)

KOROLLAR: *Sind Δ_1 und Δ_2 reelle Abschlüsse des angeordneten Körpers K, dann existiert eine ordnungstreue Isomorphie $\varphi:\Delta_1 \cong \Delta_2$ mit $\varphi|_K = \mathrm{Id}_K$.*

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas von Zorn findet man maximale Erweiterungen $K_1 \subset \Delta_1$, $K_2 \subset \Delta_2$ von K, auf die sich die Identität von K ordnungstreu fortsetzen lässt. Wegen des vorangehenden Satzes können K_1 und K_2 aber nur maximal sein, wenn $K_1 = \Delta_1$, $K_2 = \Delta_2$ ist.

In diesem Beweis kommt man also auch ohne den Trick mit dem Hinzufügen von Quadratwurzeln aus.

LITERATUR

[1] E. Artin, und O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper.* Abh. Math. Sem. Hamburgischen Universität *5* (1926), 85–99 (=The collected papers of Emil Artin (Addison-Wesley, Reading, Mass. – Palo Alto – London – Dallas – Atlanta 1965), 258–272).

[2] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. VI (Hermann et Cie., Paris 1952 [Actualités Sci. Ind., No. 1179]), p. 38.

[3] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra*, vol. III: *Theory of fields and Galois theory* (D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J. – Toronto, Ont. – London – New York 1964), p. 285.

[4] S. Lang, *Algebra* (Addison-Wesley, Reading 1965), pp. 275–277. Second printing: Addison-Wesley, Reading, Mass. – Palo Alto – London – Don Mills, Ont. 1967, p. 277.

[5] B. L. van der Waerden, Algebra I, 7. Aufl. (Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1966), p. 259.

Eingegangen den 5. April 1969.