

# Finslersche Zahlen.

Autor(en): **Mazzola, Guerino**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33794>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Finslersche Zahlen

von GUERINO MAZZOLA (Zürich)

Die von Finsler in [1] betrachteten totalendlichen Mengen bilden einen interessanten Bereich  $\mathcal{F}$  von endlichen Mengen, der die „natürlichen Zahlen“  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$  enthält: Die gewöhnliche, für natürliche Zahlen definierte Addition und Multiplikation kann auf ganz  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  ausgedehnt werden;  $\mathcal{F}$  ist nicht-kommutative reguläre Halbgruppe mit Neutralelement bei beiden Operationen, welche u.a. durch ein Links-distributivgesetz verknüpft sind.

Zu den Elementen einer „Zahlentheorie“ in  $\mathcal{F}$  gehören Sätze über die Zerfällbarkeit von Zahlen aus  $\mathcal{F}$  in Produkte und Summen von multiplikativ resp. additiv unzerlegbaren Zahlen. Unsere wichtigsten Ergebnisse in dieser Richtung finden sich in den Sätzen 11, 18, 20, 23 und 25 weiter unten.

Der Bequemlichkeit halber sind die meisten der in [1] aufgestellten Sätze hier nochmals kurz bewiesen worden.

### I. Definitionen

Die Wendung „dann und nur dann“ kürzen wir im folgenden mit „falls“ ab. Unter  $\bigcup a$  verstehen wir wie üblich die Menge  $\{x \mid \text{ex. } y \text{ mit } x \in y \in a\}$ . Oft schreiben wir statt  $\bigcup a$  auch  $\bigcup_{x \in a} x$ . Die Menge der natürlichen Zahlen kürzen wir mit  $\omega$  ab. Sei  $a$  eine Menge.

DEFINITION I: Sei  $n \in \omega$ . Wir definieren die  $n$ -te Vereinigung  $\bigcup^n a$  rekursiv durch (i)  $\bigcup^0 a := a$ . (ii)  $\bigcup^{n+1} a := \bigcup(\bigcup^n a)$ .

DEFINITION II:  $a$  heisst totalendlich (oder Finslerzahl), falls ein  $n_0$  existiert, sodass  $\bigcup^{n_0} a = \emptyset$ .

DEFINITION III: Das kleinste  $n_0$  mit  $\bigcup^{n_0} a = \emptyset$  heisst die Stufe von  $a$ . Bezeichnung:  $n_0 = :|a|$ .

LEMMA 1: Sei  $a_n := \{\bigcup^{n-1} x / x \in a\}$   $n \geq 1$ . Dann ist  $\bigcup^n a = \bigcup a_n$ .

*Beweis:* Induktion nach  $n$ . (i)  $n=1$ . Dann ist  $\bigcup a = \bigcup \{\bigcup^0 x / x \in a\} = \bigcup \{x / x \in a\}$ . (ii)  $n=m^+$ .  $\bigcup^{m+1} a = \bigcup(\bigcup^m a) = \bigcup \bigcup \{\bigcup^{m-1} x / x \in a\}$ . Zu zeigen ist  $f := \bigcup \times \{\bigcup^m x\}_{x \in a} = \bigcup \bigcup \{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a}$ . Wir beachten, dass  $y \in f$ , falls  $y \in \bigcup^m x_0$  für ein  $x_0 \in a$ . Ferner ist  $\bigcup^m x_0 = \bigcup(\bigcup^{m-1} x_0)$ . Also ist  $y \in f$ , falls  $y \in z \in \bigcup^{m-1} x_0$ . Das heisst aber  $z \in \bigcup \{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a}$ , somit  $y \in \bigcup(\bigcup \{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a})$  QED.

LEMMA 2: Sei  $a$  totalendlich und  $|a|=n_0>0$ . Dann gilt für jedes  $x \in a$   $|x| \leq n_0 - 1$ , und es existiert ein  $x_0$  mit  $|x_0|=n_0 - 1$ . (Also ist jedes  $x$  in einer totalendlichen Menge wieder totalendlich.)

Beweis:  $\bigcup^{n_0} a = \emptyset$ . Also wegen Lemma 1  $\bigcup a_{n_0} = \emptyset$ . Daher ist  $\bigcup^{n_0-1} x = \emptyset$  für alle  $x \in a$ . Also haben wir  $|x| \leq n_0 - 1$  für alle  $x \in a$ . Da ferner  $\bigcup^{n_0-1} a \neq \emptyset$ , folgt: (i) Wenn  $n_0 - 1 = 0$ , dann ist  $a$  nicht  $\emptyset$ , sondern  $\{\emptyset\}$ . Also ist  $|\emptyset| = 0 = n_0 - 1$ . (ii) Sei  $n_0 - 1 > 0$ . Dann existiert ein  $x_0 \in a$  mit  $\bigcup^{n_0-2} x_0 \neq \emptyset$ . Also ergibt sich  $|x_0| > n_0 - 2$ . QED.

LEMMA 3: Es existieren nur endlich viele  $a$  zu fester Stufe  $n_0$ .

Beweis: Für  $n_0 = 0$  ist es klar. Sei  $n_0 > 0$ . Dann ist  $|x| \leq n_0 - 1$  für alle  $x \in a$ . Also existieren nach Induktionsvoraussetzung nur endlich viele solcher  $x$ . Es folgt die Behauptung. QED.

Zu zwei totalendlichen Mengen werden nun rekursiv nach der Stufe dritte totalendliche Mengen definiert:

(i) Die „Summe“ kann nach Finsler folgendermassen definiert werden:  $\emptyset + b := b$ .  
 $a + b := \{\alpha + b / \alpha \in a\}$ .

(ii) Das „Produkt“ durch:  $\emptyset b := \emptyset$ .  $ab := \bigcup_{\alpha \in a} b + \alpha b$ .

Dazu zwei Bemerkungen: Man sieht sofort, dass  $\emptyset + b = b = b + \emptyset$  und  $b\emptyset = \emptyset = b\emptyset$  richtig ist. Wir schreiben somit, wie gewöhnlich, „0“ für „ $\emptyset$ “. Ähnlich gilt  $\{\emptyset\}a = a = a\{\emptyset\}$ . Daher schreiben wir auch wieder „1“ für „ $\{\emptyset\}$ “.

SATZ 4:  $|a + b| = |a| + |b|$ .

Beweis: Wir induzieren nach  $|a|$ . (i)  $|a| = 0$ . Klar. (ii)  $|a| = n^+$ . Es existiert ein  $\alpha_0$  mit  $|\alpha_0| = n$ . Also ist  $|\alpha_0| + |b| = |\alpha_0 + b|$  maximal unter den  $|\alpha + b|$ ,  $\alpha \in a$ , also ist  $(|\alpha_0| + |b|)^+ = |a + b| = n^+ + |b| = |a| + |b|$ . QED.

SATZ 5:  $|ab| = |a| |b|$ .

Beweis: Induktion nach  $|a|$ . (i)  $|a| = 0$ . Klar. (ii)  $|a| = n^+$ . Also existiert ein  $\alpha_0 \in a$  mit  $|\alpha_0| = n$ . Also hat  $b + \alpha_0 b$  maximale Stufe unter den  $x \in ab$ , mithin gilt  $|b + \alpha_0 b| = |ab| = |b| + |\alpha_0| |b| = |\alpha_0|^+ \cdot |b| = |a| \cdot |b|$ . QED.

SATZ 6:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . (Assoziativgesetz.)

Beweis: Induktion nach  $|a|$ . (i)  $(0 + b) + c = b + c = 0 + (b + c)$ . (ii)  $(a + b) + c = \{\alpha + b\}_{\alpha \in a} + c = \{(\alpha + b) + c\}_{\alpha \in a} = \{\alpha + (b + c)\}_{\alpha \in a}$ . QED.

SATZ 7:  $(a + b) c = ac + bc$ . (Links Distributivgesetz.)

Beweis: Induktion nach  $|a|$ . (i)  $(0 + b) c = bc = 0c + bc$ . (ii)  $(a + b) c = \bigcup_{\delta \in a + b} c + \delta c = \{\gamma + (\alpha + b) c / (\gamma, \alpha) \in c \times a\} = \{\gamma + \alpha c + bc\}_{\gamma, \alpha} = \{\varepsilon + bc / \varepsilon \in ac\} = ac + bc$ . QED.

SATZ 8:  $(ab) c = a(bc)$ . (Assoziativgesetz.)

*Beweis:* Stufeninduktion.  $(ab) c = \bigcup_{\delta \in ab} c + \delta c = \{\gamma + \delta c\}_{\gamma, \delta} = \{\gamma + (\beta + \alpha b) c\}_{\alpha, \beta, \gamma} = \{(\gamma + \beta c) + \alpha(bc)\}_{\alpha, \beta, \gamma} = a(bc)$ . QED.

Für die natürliche Interpretation der totalendlichen Mengen und der erklären Operation mit Hilfe von „Verzweigsfiguren“ siehe [1].

## II. Zerlegungssätze

Es folgen jetzt die wichtigen Sätze 9 und 11 über das Abspalten von Zahlen. (Satz 9 ist das additive Analogon zu Satz 11 und findet sich schon in [1]). Im Anschluss werden einige Folgerungen bewiesen.

**SATZ 9:**  $a + b = c + d$  und  $|a| = |c|$ , falls  $a = c$  und  $b = d$ .

*Beweis:* Die Inklusion von rechts nach links ist klar. Die andere ergibt sich durch Induktion nach  $|a| = |c|$ .

(i) Aus  $|a| = 0 = |c|$  folgt  $a = c = 0$  und  $b = d$ .

(ii) Sei  $\{\alpha + b\}_{\alpha \in a} = a + b = c + d = \{\gamma + d\}_{\gamma \in c}$ . Also existiert für jedes  $\alpha \in a$  ein  $\gamma \in c$  mit  $\alpha + b = \gamma + d$ . Somit ist nach Voraussetzung  $\alpha = \gamma$  und  $b = d$ . Daher ist  $a \subset c$ . Genauso wird  $c \subset a$ , mithin  $a = c$ . QED.

**LEMMA 10:** Wenn  $a + b = c + d$ , dann ist  $b = x + d$  oder  $y + b = d$ .

*Beweis:* Seien  $a$  und  $c$  nicht 0, da es sonst klar ist. Dann gibt es für jedes  $\alpha \in a$  ein  $\gamma$  aus  $c$ , sodass  $\alpha + b = \gamma + d$ . Nach Induktionsannahme folgt das Lemma. QED.

**SATZ 11:** Es ist  $ab = cd \neq 0$  und  $|a| = |c|$ , falls  $a = c \neq 0$  und  $b = d \neq 0$ .

*Beweis:* Wir führen Induktion nach  $|a| = |c|$ .

(i)  $|a| = 1$ . Dann ist  $a = c = 1$  und daher  $b = d$ . Die Behauptung sei bewiesen für alle Stufen  $|a| = |c| \leq n + 1$ .

(ii) Sei  $|a| = n^{++}$ . Wir haben  $ab = \{\beta + \alpha b\}_{\alpha, \beta} = \{\delta + \gamma d\}_{\gamma, \delta}$ . Zu  $\alpha_0, \beta_0$  mit maximalen Stufen existieren ein  $\gamma_0$  und ein  $\delta_0$  mit maximalen Stufen, sodass  $\beta_0 + \alpha_0 b = \delta_0 + \gamma_0 d$ . Also folgt  $\alpha_0 = \gamma_0$  und  $b = d$ , denn es ist  $|\beta_0| = |\delta_0| = |b| - 1 = |d| - 1$ . Somit haben  $a$  und  $c$  die gleichen maximalen Elemente. Wenn einzusehen ist, dass  $\bigcup_{\alpha \neq \max.} b + \alpha b = \bigcup_{\gamma \neq \max.} d + \gamma d$  ist, dann folgt zunächst einmal  $a' := \{\alpha / |\alpha| \neq \max.\} = \{\gamma / |\gamma| \neq \max.\} = :c'$ , und damit  $a = c$ . Die geforderte Gleichung gilt, wenn für alle  $|\alpha_1| = \max$  und für alle  $|\alpha_0| \neq \max$   $\emptyset = [b + \alpha_1 b] \cap [b + \alpha_0 b]$  ist, und ebenso für  $|\gamma_1| = \max$  und für alle  $|\gamma_0| \neq \max$   $\emptyset = [d + \gamma_1 d] \cap [d + \gamma_0 d]$  ist. (Wenn es keine nicht maximale  $\alpha_0$  und  $\gamma_0$  gibt, sind wir fertig.) Wir beweisen indirekt etwa die erste Gleichung. Wäre dieser Durchschnitt nicht  $\emptyset$ , so existierten  $\beta, \beta' \in b$ , sodass  $\beta + \alpha_1 b = \beta' + \alpha_0 b$ . Nun ist  $|\alpha_1 b| > |\alpha_0 b|$ . Dann wäre nach Lemma 10  $\alpha_1 b = x + \alpha_0 b$ . Jetzt vergleichen wir die Stufen auf beiden Seiten der Gleichung. Links:  $|\alpha_1 b| = |ab| - |b|$ . Rechts:  $|x| + |\alpha_0| |b| < |ab| - k|b|$  mit  $k \geq 1$ . Also ist  $0 < -k'|b|$

mit  $k' \geq 0$ . Das ist ein Widerspruch. Genauso geht der andere Beweis. Also können wir die maximalen Elemente wegtrennen. QED.

**SATZ 12:** *Im Produkt  $ab = \bigcup_{\alpha \in a} b + \alpha b$  ist die Vereinigung über die  $\alpha \in a$  disjunkt:  $ab = \bigcup_{\alpha \in a} b + \alpha b$ .*

*Beweis:* Sei  $|\alpha'| = |\alpha|$  und  $\alpha' \neq \alpha$ . Dann ist wegen Satz 9 und 11  $[b + \alpha b] \cap [b + \alpha' b] = \emptyset$ . Sei  $|\alpha'| > |\alpha|$ . Wenn wir einen nichtleeren Schnitt haben, ist  $\alpha' b = x + \alpha b$ , also  $|x| \geq |b|$ . Das ist ein Widerspruch. QED.

**KOROLLAR 13:** *Es ist  $\text{card}(ab) = \text{card}(a) \text{card}(b)$ .*

Nun einige Bemerkungen zum Begriff der natürlichen Zahlen. Offensichtlich sind die endlichen Ordinalzahlen  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$  totalendlich. Mithin ist für diese Produkt und Summe definiert. Man sieht aber ohne Mühe, dass sich die Finslerschen Operationen auf  $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$  von den in der ordinalen Arithmetik üblichen arithmetischen Operationen unterscheiden. Hingegen gibt es unter den totalendlichen Mengen eine Teilfamilie, die bezüglich Addition und Multiplikation isomorph zu  $\omega$  ist. Diese besteht aus den Mengen:  $0, 1, \{1\}, \{\{1\}\}, \dots$ . Sie... spielt daher die Rolle der natürlichen Zahlen unter den Finslerzahlen. Wir bezeichnen sie mit  $\omega^*$ . Es ist etwa die  $n$ -fache Summe  $a + a + \dots + a = na$ , wo  $n \in \omega^*$ .

**SATZ 14:** *Es ist  $a + b = b + a$ , falls  $a = mc$  und  $b = nc$ , wo  $m, n \in \omega^*$ .*

*Beweis:* Induktion nach  $(a, b) := \text{Max}(|a|, |b|)$ . Sei  $|a| \neq |b|$ , sonst ist es klar wegen Satz 9.

(i)  $(a, b) = 0$ . Klar. (ii)  $(a, b) > 0$ . Wegen Lemma 10 ist entweder  $b = x + a$  oder  $a = y + b$ . Sei etwa  $a = y + b$ . Dann ist  $a + b = y + b + b = b + y + b$ . Also ist wegen Satz 9  $y + b = b + y$ . Ferner gilt  $(y, b) < (a, b)$ , da  $|b| < |a|$  und  $|y| < |a|$ . Also ist  $y = m' \cdot c$  und  $b = nc$ . Hiermit ist  $a = (m' + n)c = mc$ . QED.

**SATZ 15:** *Wenn  $mb = na \neq 0$ , wo  $m, n \in \omega^*$ , dann ist  $a = k'c$  und  $b = k''c$  und  $mb = kc$ , wo das  $\text{kgV}(k', k'')$   $k$  teilt.*

*Beweis:* Wir nehmen wegen Satz 11  $|a| \neq |b|$ , etwa  $|b| > |a|$  an.  $na = a + (n-1)a = b + (m-1)b$ . Also ist  $(n-1)a = \delta + (m-1)b$ , somit  $b = a + \delta$ . Andererseits ist auch  $(n-1)a + a = (m-1)b + b$ , also  $b = \gamma + a$ , wo  $|\gamma| = |\delta|$ . Das ergibt:

$$(a + \delta) + (a + \delta) + \dots + (a + \delta) = (\gamma + a) + (\gamma + a) + \dots + (\gamma + a),$$

und

$$\delta + (a + \delta) + \dots + (a + \delta) = \gamma + a + (\gamma + a) + \dots + \gamma,$$

was  $\gamma = \delta$  zeigt. Deshalb ist nach Satz 14  $a = k'c$  und  $\delta = m'c$ , somit wird  $b = (k' + m')c = k''c$ , und  $mb = mk''$ .  $c = na = nk'c$ , das heisst  $mk'' = nk'$ ; und daraus folgt mit  $k := mk''$ , dass das  $\text{kgV}(k', k'')$   $k$  teilt. QED.

Endlich noch ein einfaches Korollar zum Links-Distributivgesetz.

KOROLLAR 16:  $a_0 a_1 \dots a_n = \{\alpha_n + \alpha_{n-1} a_n + \alpha_{n-2} a_{n-1} a_n + \dots + \alpha_0 a_1 \dots a_n\}$  alle  $\alpha_i \in a_i$ .

Wir fragen nun:

Wie zerfällt eine totalendliche Menge additiv und multiplikativ? Dazu zwei Definitionen:

#### DEFINITION

IV)  $a$  heisst mono, falls aus  $a = a_1 + a_2$  folgt  $a_1 = 0$  oder  $a_2 = 0$  (also 0 ist Monozahl)

V)  $a$  heisst prim, falls aus  $a = a_1 a_2$  folgt  $a_1 = 1$  oder  $a_2 = 1$  (also 0 ist keine Primzahl, aber 1 ist Primzahl)

SATZ 17: Für jedes totalendliche  $a \neq 0$  existiert genau eine additive Zerlegung in Monozahlen  $\neq 0$ .

*Beweis:* Sei  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m$ , wo die  $a_i, b_k$  Monozahlen  $\neq 0$  sind.  $a_n$  und  $b_m$  sind stufengleich, also gleich, wegen Lemma 10 und Satz 9, usw. induktiv. QED.

SATZ 18: Zu jeder geordneten Faktorzerlegung der Stufe einer Finslerzahl existiert höchstens eine Faktorzerlegung der letzteren, sodass sich die Faktorstufen wie in der Stufenzerlegung folgen.

*Beweis:* Die Eindeutigkeit im obigen Sinne ergibt sich durch Satz 11 und Induktion sofort. QED.

Nun möchten wir schliessen:  $ab \neq 0$  ist unzerlegbar in Monozahlen  $\neq 0$ , falls  $a$  und  $b$  nicht additiv zerlegbar sind.

Dazu den

SATZ 19:  $a(b+c) = x+c$  für  $a, b \neq 0$ .

*Beweis:* Induktion nach  $|a|$ . (i)  $|a|=1$ . Dann kommen wir mit  $x=b$  durch. (ii)  $a(b+c) = \{\beta+c+\alpha(b+c)\}_{\alpha, \beta}$  Gesucht wird  $x$ . Für  $\alpha=0$  nehmen wir alle  $\beta \in b$  in  $x$  auf; wenn  $\alpha \neq 0$  ist, dann gilt nach Voraussetzung  $\alpha(b+c) = \xi'(\alpha) + c$ ; also nehmen wir noch alle  $\beta+c+\xi'(\alpha)$  in  $x$  auf. Dieses  $x$  genügt unseren Wünschen. QED.

Zusammen mit dem Links-Distributivgesetz hat man also: Wenn  $ab \neq 0$  unzerlegbar ist, dann sind  $a$  und  $b$  unzerlegbar.

Und die Umkehrung:

SATZ 20: Wenn  $ab \neq 0$  additiv zerlegbar ist, dann ist  $a$  oder  $b$  zerlegbar.

*Beweis:* Induktion nach  $|ab|$ .

Sei  $ab = k + l_0 = \{\kappa + l_0\}_{\kappa \in k}$  und  $l_0$  nicht zerlegbar. Ferner ist  $ab = \{\beta + \alpha b\}_{\beta, \alpha}$ . Es gibt für alle  $\alpha \in a$  und  $\beta \in b$  genau ein  $\kappa(\alpha, \beta)$  mit  $\beta + \alpha b = \kappa(\alpha, \beta) + l_0$ .

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Es gibt ein  $\beta_0$  mit  $|\beta_0| = |\kappa(\alpha_0, \beta_0)|$ . Also ist  $\alpha_0 b = l_0$ , also sind  $\alpha_0, b$  unzerlegbar.

(i0) Es gebe kein  $\alpha$  mit  $|\alpha| > |\alpha_0|$ . Jedes  $\alpha$  gleicher Stufe wie  $\alpha_0$  ist diesem gleich, was man durch Einsetzen sieht. Ferner existieren keine  $\alpha$  mit  $|\alpha| < |\alpha_0|$ , wenn  $l_0$  nicht zerlegbar ist. Also ist  $a = 1 + \alpha_0 = \{\alpha_0\}$ .

(i1) Es existiere ein  $\alpha_1$  mit  $|\alpha_1| > |\alpha_0|$ . Sei  $\beta + \alpha_1 b = \kappa(\beta, \alpha_1) + l_0$ . Also ist  $\alpha_1 b = v + l_0$ , mit  $v \neq 0$ ; also ist nach Induktionsvoraussetzung  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_1$ , wo  $\bar{\alpha}_1$  nicht zerlegbar ist. Daher wird  $\alpha_1 b = \bar{\alpha}_1 b + \bar{\alpha}_1 b = v + \alpha_0 b$ , dh.  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_0$ . Somit ist  $a = x + \alpha_0$ , mithin zerlegbar.

(ii) Es gibt kein  $\beta_0$  mit  $|\beta_0| = |\kappa(\alpha_0, \beta_0)|$ . Also ist für alle  $\beta \in b$  (und  $\alpha \in a$ )  $|\beta| < |\kappa(\beta, \alpha)|$ .  $|\beta| > |\kappa(\beta, \alpha)|$  ist ausgeschlossen, denn  $l_0$  wäre dann zerlegbar. Somit gilt für alle  $\alpha \in a$  eine Zerlegung  $\alpha b = v + l_0$ ,  $v \neq 0$ . Dh. alle  $\alpha \in a$  sind zerlegbar oder  $b$  ist es. Sei  $b$  nicht zerlegbar. Also sind alle  $\alpha \in a$  zerlegbar:  $\alpha = \lambda(\alpha) + \mu(\alpha)$ , wo  $\mu(\alpha)$  nicht zerlegbar und nicht 0 ist. Hiermit haben wir  $\alpha b = \lambda(\alpha) b + \mu(\alpha) b = v(\alpha) + l_0$ . Da aber  $l_0$  und  $\mu(\alpha) b$  nicht zerlegbar sind, ist  $l_0 = \mu(\alpha) b$ , also  $\mu(\alpha) = \text{const.}$  für alle  $\alpha \in a$ . Also ist  $a = \{\lambda(\alpha)\}_\alpha + \mu$ . QED.

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

**SATZ 21:**  $ab \neq 0$  ist zerlegbar, falls  $a$  oder  $b$  zerlegbar ist.

**KOROLLAR 22:** Ein Produkt  $a_0 a_1 \dots a_n \neq 0$  ist zerlegbar, falls mindestens ein  $a_i$  zerlegbar ist.

Aus dem Vorangehenden wollen wir zwei wichtige Folgerungen ziehen.

(I) Jede Finslerzahl ausser 0 und 1 ist Summe von Produkten von primen Monozahlen. Um dies einzusehen, beachten wir erstens, dass jede Finslerzahl Summe von Monozahlen ist und zweitens, dass jede Monozahl Produkt von primen Monozahlen ist.

(II) Der grosse FERMATsche Satz ist für Finslerzahlen gültig, falls er in  $\omega^*$  gilt. Denn wenn er für Finslerzahlen stimmt, dann auch für ihre Stufen, also in  $\omega^*$ . Nehmen wir ein Tripel  $a, b, c$  von totalendlichen Mengen. Es ist  $a^n + b^n = c^n$  wegen Satz 21 nur für zerlegbare  $c$ . Um ein Gegenbeispiel zu finden, muss also die Zerlegbarkeit von  $c$  wesentlich verwendet werden.

Wir interessieren uns wegen der Folgerung (I) für Produkte von primen Monozahlen. Dazu den

**SATZ 23:** Sei  $ac = bd \neq 0$  mit  $c$  und  $d$  mono, prim und  $\neq 1$ . Dann ist  $c = d$  (und wegen Satz 11  $a = b$ ).

*Beweis:* Induktion nach  $(a, b) (= \text{Max}(|a|, |b|))$

(i)  $(a, b) = 1$ . Also  $a = b = 1$  und  $c = d$ .

(ii)  $(a, b) > 1$ . Das heisst  $|a|$  oder  $|b| > 1$ . Behauptung:  $|a|$  und  $|b| > 1$ . Beweis: Wäre  $a = 1$  und  $|b| > 1$ , dann wäre  $c = bd$ , aber dann könnte  $c$  nicht prim sein, denn  $b$  und  $d$  sind grösser als 1. Seien  $\alpha_0 \in a$ ,  $\beta_0 \in b$ ,  $\gamma_0 \in c$ ,  $\delta_0 \in d$  alle maximal (also  $\alpha_0$  und  $\beta_0 \neq 0$ ) mit  $\gamma_0 + \alpha_0 c = \delta_0 + \beta_0 d$ . Sei weiter  $\alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha''_0$ , wo  $\alpha''_0 \neq 0$  und mono,  $\beta_0 = \beta'_0 + \beta''_0$ , wo

$\beta_0'' \neq 0$  und mono. Dann ist  $0 \neq \alpha_0'' c = \beta_0'' d$ , da  $c$  und  $d$  mono sind. Also ist  $c = d$ . QED.

**KOROLLAR 24:** *Ein Produkt von primen Monozahlen  $\neq 1$  ist eindeutig, dh., wenn  $a_0 a_1 \dots a_n = b_0 b_1 \dots b_m$  ist, wo die  $a_i$  und die  $b_k$  prim, mono und  $\neq 1$  sind, dann ist  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für alle  $i$ .*

*Beweis:*  $a_0 a_1 \dots a_n = (a_0 a_1 \dots) a_n = (b_0 b_1 \dots) b_m$ . Also ist  $a_n = b_m$ . Usf. Somit ergibt sich der wichtige

**SATZ 25: (Zerlegungssatz)** *Jede totalendliche Menge  $\neq 0$  lässt sich als eindeutige Summe von eindeutigen Produkten von primen Monozahlen schreiben.*

*Beweis:* Satz 9 und Korollar 24.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] FINSLER, *Totalendliche Mengen*, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich (Zürich) 108, H. 2 (1963).  
 [2] FINSLER, *Zur Goldbachschen Vermutung*, Elem. Math. (Basel) XX/6 (1965).

Eingegangen den 17. Februar 1969