# Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple.

# Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple

Par JEAN DE SIEBENTHAL (Lausanne)

*Magnificat anima mea Dominum*

## § 1. Introduction

1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang $l$ sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique 0, $\Lambda$ le système des racines de $\mathfrak{g}$ sur une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, avec $\Lambda' = \Lambda - \{0\}$. Une suite fondamentale de $\Lambda$ est une suite libre $\varphi_1, \dots \varphi_l$ de $l$ racines telle que $\mu \in \Lambda$ implique $\mu = a_1 \varphi_1 + \cdots + a_e \varphi_e$, les $a_i$ étant des entiers rationnels, tous $\geqslant 0$ ou bien tous $\leqslant 0$. $\Lambda$ engendre un espace euclidien $R^l$ identifié à son dual au moyen du produit scalaire usuel.

Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$, c'est à dire tel que

$$\Lambda_0 = -\Lambda_0 \qquad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 .$$

Une suite $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \Lambda$ est une $\Lambda_0$-suite si $\mu_{i+1} - \mu_i \in \Lambda_0$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$; une partie $A$ de $\Lambda$ est dite $\Lambda_0$-connexe, si pour toute paire $\gamma, \gamma' \in A$ il existe une $\Lambda_0$-suite qui relie $\gamma$ à $\gamma'$.

THÉORÈME: *La partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ de $\Lambda$ en classes mod $\Lambda_0$ vérifie:*

a) *Toute classe $\Lambda_i$ est $\Lambda_0$-connexe*

b) *Si $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq 0$, il existe un entier $k$ tel que $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$; de plus*

b′) $k \neq 0$ *implique* $(\Lambda_i + \Lambda_j \cap \Lambda = \Lambda_k$

$$(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$$

b″) *Pour tout $i$ il existe un $i'$ tel que*

$$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

2. L'addition dans $\Lambda$ définit dans $\Lambda \mid \Lambda_0$ une loi de composition commutative, associative, non partout définie, ayant un 0 noté $\Lambda_0$, tout élément $\Lambda_i$ ayant un opposé $\Lambda_{i'}$.

*Le but du présent mémoire est l'étude de ces structures.* On peut se ramener aux cas suivants:

3. *Une suite fondamentale de $\Lambda_0$ fait partie d'une suite fondamentale de $\Lambda$.*

C'est le cas des sous-systèmes fermés $\Lambda_0$ dits saturés: l'intersection du sous-espace $R(\Lambda_0)$ support de $\Lambda_0$ et de $\Lambda$ coïncide avec $\Lambda_0$.

Lorsque

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \subset \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots \varphi_l\}$$

est l'inclusion de suites fondamentales ci-dessus, et si $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$ sont les classes de

$\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_l$ mod $\Lambda_0$, alors la classe de

$$\mu = \sum_{1}^{l} m_i \varphi_i \quad \text{est} \quad \bar{\mu} = \sum_{r+1}^{l} m_i \bar{\varphi}_i .$$

Désignant par $R^{l-r}$ le supplémentaire orthogonal du support de $\Lambda_0$, chaque classe $\Lambda_i$ admet une projection orthogonale sur $R^{l-r}$ réduite à un point: le centre de gravité de cette classe.

*La loi* $\Lambda \mid \Lambda_0$ *est ici entièrement déterminée par les centres* $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$ *des classes* $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$.

4. *Le sous-système fermé* $\Lambda_0$ *est de rang maximal* $l$.

Ici, $R^{l-r} = \{0\}$, les centres des classes $\Lambda_i$ sont tous en 0. Particulièrement intéressants sont ici les simplifiés de $\Lambda$, c'est à dire les sous-systèmes fermés $\Lambda_0$ minimaux de rang $l$, tous de type

$$A_{s_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_t} \qquad s_1 + \cdots + s_t = l.$$

Pour étudier $\Lambda \mid \Lambda_0$, on peut choisir dans le support $R^l$ de $\Lambda$ un système de générateurs

$$\tau_{1\,1}, \ldots, \tau_{1, s_1+1}; \cdots; \qquad \tau_{t\,1}, \ldots, \tau_{t, s_t+1}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{s_i+1} \tau_{i\,j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Les racines de $\Lambda_0$ sont toutes les différences $\tau_{i\,m} - \tau_{i\,m'}$; les autres éléments de $\Lambda$ sont de l'un des types

$$\tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''.$$

Les $A_7 \subset E_7$, $A_8 \subset E_8$, $A_2 \subset G_2$ conduisent aux expressions connues.

Pour $A_2 + A_2 + A_2 \subset E_6$, on obtient, en prenant

$$\begin{array}{lll} \tau_1, \tau_2, \tau_3 \quad ; & \tau_4, \tau_5, \tau_6 \quad ; & \tau_7, \tau_8, \tau_9 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 & \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 = 0 & \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 = 0 \\ \alpha, \alpha', \cdots \in \{1, 2, 3\} & \beta, \beta', \cdots \in \{4, 5, 6\} & \gamma, \gamma', \cdots \in \{7, 8, 9\} \end{array}$$

les expressions suivantes pour les racines de $E_6$

$$\tau_\alpha - \tau_{\alpha'}; \quad \tau_\beta - \tau_{\beta'}; \quad \tau_\gamma - \tau_{\gamma'} \qquad \text{(racines de } \Lambda_0)$$

$$\pm (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma).$$

On a ici trois classes

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \{\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma\}, \quad \Lambda_{1'} = -\Lambda_1$$

et $\Lambda \mid \Lambda_0$ est un groupe cyclique d'ordre 3. On pourra constater ici, lorsque $\Lambda$ est une structure exceptionnelle $E_6$, $E_7$, $E_8$, $F_4$, $G_2$ que les $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toujours des lois de groupes, sauf dans le cas $E_8 \mid 8A_1$.

5. Cette théorie peut servir à l'étude:

a) *des sous-algèbres réductives* $\mathfrak{g}_0$ *de* $\mathfrak{g}$ *qui correspondent aux systèmes fermés* $\Lambda_0 \subset \Lambda$

b) *des* $\mathfrak{g}_0$*-modules en lesquels* $\mathfrak{g}$ *se décompose suivant* ad $\mathfrak{g}_0$: $\Lambda$ tout $\mu \in \Lambda$ correspond dans $\mathfrak{g}$ un sous-espace 1-dimensionnel $\mathbf{C} e_\mu$, avec

$$[h, e_\mu] = \mu(h)\, e_\mu \qquad \forall\, h \in \mathfrak{h}.$$

On a:

$$\mathfrak{g} = e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'} \mathbf{C} e_\mu \quad \text{où} \quad e_0 = \mathfrak{h}$$

$$\mathfrak{g}_0 = e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'_0} \mathbf{C} e_\mu .$$

J'écris:

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{C} e_\alpha \quad \text{d'où}$$

1) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s .$$

Les $\mathfrak{g}_i$ sont des $\mathfrak{g}_0$-modules, irréductibles si $i \neq 0$.

On peut avoir $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$; si ce n'est pas le cas, il existe un indice $k$ tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$. Lorsque $k \neq 0$, on a: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$; $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_k$.

Enfin, pour tout $i$, il existe $i'$ tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subset \mathfrak{g}_0$.

La connaissance de la loi $\Lambda \mid \Lambda_0$ implique celle des sur-algèbres de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, permet de trouver rapidement les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ maximales (du type envisagé). Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ pour lesquelles 1) se réduit à

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1'} \qquad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{1'}] \subset \mathfrak{g}_0 , \quad \text{ou}$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

correspondent à certains espaces riemanniens symétriques.

6. Ce travail se rattache à [1] et à [2] chap II où sont étudiés principalement les systèmes fermés $\Lambda_0$ en eux-mêmes. Ici, la question est reprise dans son ensemble, en portant plutôt l'attention sur l'*insertion* de $\Lambda_0$ dans $\Lambda$. J'ai utilisé les listes données dans [1] ou [2]; celles qui figurent dans [4] permettront d'étudier le cas des sous-systèmes saturés des algèbres simples exceptionnelles, cas qui ne figure pas explicitement dans le § 5.

## Plan

## § 2. Partitions admissibles

### 2.1 *Notion de $\Lambda$-système*

Soit $\Lambda \subset R^l$ le système des vecteurs-racines d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$. On en déduit:

a) le système inverse

$$\Lambda^* = \{\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha), \forall \alpha \in \Lambda\}$$

b) la symétrie $S_\alpha : z \mapsto z - (\alpha^*, z)\,\alpha$, et le groupe de Weyl W, engendré par les $S_\alpha$, $\forall_\alpha \in \Lambda$.

c) la grille des poids

$$\gamma(\Lambda) = \{x \in R^l \mid (\alpha^*, x) \in \mathbf{Z}, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

On sait que $W\gamma(\Lambda) = \gamma(\Lambda)$. Si $x \in \gamma(\Lambda)$, on a

$$S_\alpha x = x + mx \quad \text{où} \quad m \in \mathbf{Z}; \quad \text{les} \quad x + k\alpha, \quad \text{où} \quad k \in ]\,0, m\,[ \cap \mathbf{Z}$$

sont alors les intermédiaires stricts.

DÉFINITION 2.1: *J'appelle $\Lambda$-système toute partie $\Delta$ de $R^l$ qui vérifie:*

1) $\Delta \subset \gamma(\Lambda)$
2) $x \in \Delta \Rightarrow S_\alpha x \in \Delta, \quad \forall \alpha \in \Lambda$
3) $x \in \Delta, \quad S_\alpha x = x + m\alpha \Rightarrow x + k\alpha \in \Delta \quad \forall k \in \mathbf{Z} \cap ]\,0, m\,[$.

Autrement dit, $\Delta$ est une partie de la grille des poids stables pour $W$ et qui, avec deux éléments symétriques $x$, $S_\alpha x$ contient tous les intermédiaires $x + k\alpha$, $(k \in z)$. Notons que

$$|S_\alpha x| = |x|, \qquad |x + k\alpha| \leqslant |x|.$$

### 2.2 *A-connexité dans un $\Lambda$-système*

DÉFINITION 2.2: *Soit $\Lambda$ le système des racines d'une algèbre* $\mathfrak{g}$ *semi-simple; soient*

1) $\Delta$ un $\Lambda$-système
2) $A \subset \Lambda$
3) $B \subset \Delta$

*L'ensemble $B$ est dit A-connexe si pour tout couple $(\mu, \mu') \in B \times B$, il existe une A-suite $\subset B$ qui relie $\mu$ à $\mu'$, c'est à dire une suite*

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_1, \ldots, \quad \mu_k = \mu'$$

*d'éléments de $B$ telle que $\mu_{i+1} - \mu_i \in A$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. $B$ est dit connexe s'il est $\Lambda$-connexe.*

Cela posé, j'écris

$$\mu' \equiv \mu \bmod A \quad \text{lorsque} \quad \mu' = \mu + \sum n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

C'est une relation d'équivalence dans $\Delta$, qui subit une partition en classes modulo le réseau engendré par $A$ sur $\mathbf{Z}$ ou en bref modulo $A$:

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s .$$

PROPOSITION 2.1: *Soient $\Delta$ un $\Lambda$-système, $A \subset \Lambda$, avec $0 \in A$, $A = -A$, et*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$$

*la partition de $\Delta$ en classes mod $A$. Chaque classe $\Delta_m$ est $A$-connexe.*

*Preuve:* soient $\mu$, $\bar{\mu} \in \Delta_m$, avec

1) $$\bar{\mu} = \mu + \sum n_i \alpha_i \qquad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A .$$

Supposons d'abord

i) $$(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) > 0 .$$

Je dis qu'il existe un indice $j$ tel que $n_j \neq 0$ avec

$$\begin{aligned} \bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta \quad &\text{si} \quad n_j > 0 \\ \bar{\mu} + \alpha_j \in \Delta \quad &\text{si} \quad n_j < 0 . \end{aligned}$$

En effet, si cet indice n'existe pas,

a) $n_j > 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$

b) $n_j < 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \geqslant 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leqslant 0$.

Par exemple, avec a), $(\bar{\mu}, \alpha_j) > 0$ signifie

$$S_{\alpha_j} \bar{\mu} = \bar{\mu} - (\bar{\mu}, \alpha_j^*) \alpha_j \quad \text{et} \quad \bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta ,$$

vu que $\Delta$ est un $\Lambda$-système.

Multipliant scalairement 1) par $\bar{\mu}$, il vient

$$(\bar{\mu}, \bar{\mu}) - (\bar{\mu}, \mu) = \sum n_i (\bar{\mu}, \alpha_i) .$$

D'après i), le premier membre est strictement positif, tandis que d'après a) et b) le second membre est négatif. On n'échappe à la contradiction qu'en admettant l'existence de l'indice $j$.

Maintenant la condition

ii) $$\bar{\mu} \neq \mu \quad \text{et} \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu}) \geqslant (\mu, \mu)$$

implique i), comme le montre un calcul élémentaire:
si

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}| = 1, \quad |\mu| &= r \leqslant 1 \\ \bar{\mu} &= (1, 0) \\ \mu &= (r \cos t, r \sin t) \end{aligned}$$

dans le plan enclidien, on a $(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) = 1 - r \cos t$.

Si $r<1$, on a $1-r\cos t>0$, et si $r=1$, alors $\cos t<1$ vu que $\bar{\mu}\neq\mu$, d'où encore $1-r\cos t>0$.

Prenons maintenant dans $\Delta_m$ un $\mu'$ de carré scalaire minimum; pour tout $\delta_0\neq\mu'$, $\delta_0\in\Delta_m$, on a

$$\delta_0 = \mu' + \sum n_i\alpha_i \qquad n_i\in\mathbf{Z}, \quad \alpha_i\in A$$

$\delta_0$ et $\mu'$ vérifiant ii) satisfont à i): $(\delta_0, \delta_0-\mu')>0$.

On a vu qu'il existe alors dans $\Delta_m$

$$\delta_1 = \delta_0 - \alpha_j = \mu' + \cdots + (n_j - 1)\,\alpha_j + \cdots \qquad (n_j > 0)$$

ou

$$\delta_1 = \delta_0 + \alpha_j = \mu' + \cdots + (n_j + 1)\,\alpha_j + \cdots \qquad (n_j < 0).$$

Soit

$$\Delta\ni\delta_1 = \mu' + \sum n_i'\alpha_i \qquad \sum |\, n_i' \,| = \sum |\, n_i \,| - 1\,.$$

Si $\delta_1\neq\mu'$, on recommence l'opération,... Il se construit une $A$-suite

$$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k, \cdots \subset \Delta$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_k = \mu' + \sum n_i^{(k)}\alpha_i, \qquad & n_i^{(k)}\in\mathbf{Z}, \alpha_i\in A \\ & \sum |n_i^{(k)}\,| = \sum |\, n_i^{(k-1)}\,| - 1\,. \\ & k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Si pour un entier $k$, on a $\delta_k=\mu'$, alors la $A$-suite

$$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k = \mu' \quad \text{relie} \quad \delta_0 \text{ à } \mu'\,.$$

Cette circonstance se produit nécessairement puisque $\sum |\, n_i^{(k)}\,|$ décroît strictement. Ainsi, on peut relier $\mu$ et $\bar{\mu}$.

Ecrivons la suite obtenue:

$$\mu = \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_u = \bar{\mu} \qquad \tau_{i+1} - \tau_i\in A_0\,.$$

Par construction, on a, successivement $\Delta_m\ni\mu=\tau_0$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_u=\bar{\mu}$ ce qui prouve que $\Delta_m$ est $A_0$-connexe.

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

PROPOSITION 2.2: *Soient $\Delta$ un $A$-système, $\tau\in\Delta$, $\alpha$, $\beta\in A$, et $\tau'=\tau+\alpha+\beta\in\Delta$, où $\tau\neq\tau'$. Alors $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.*

On utilise le raisonnement qui suit i) dans la preuve de la proposition 2.1.

Si $(\tau', \tau')\geqslant(\tau, \tau)$, alors, comme $\tau\neq\tau'$, il vient $(\tau', \tau')-(\tau', \tau)>0$ d'où $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.

Si $(\tau, \tau')\leqslant(\tau, \tau)$, on a $(\tau, \tau)-(\tau', \tau)>0$ et $\tau=\tau'-\alpha-\beta$ montre à nouveau que $\tau+\alpha\in\Delta$ ou $\tau+\beta\in\Delta$.

PROPOSITION 2.3: *Soit $\Lambda$ un système de racines de rang 1; pour que $\{\mu_1, \ldots, \mu_l\} \subset \Lambda$ soit une suite fondamentale de $\Lambda$, il faut et il suffit qu'on ait*

1) $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda \quad \forall i \neq j$ et

2) *Toute racine $\mu \in \Lambda$ est $\mathbf{Z}$-combinaison linéaire de $\mu_1, \ldots, \mu_1$.*

Si $m_1, \ldots, m_l$ est une suite fondamentale, il est bien connu que 1) et 2) sont vérifiées.

Les conditions 1) et 2) sont suffisantes. En effet, les racines

$$\mu = \sum m_i \mu_i \in \Lambda \quad \text{ont un poids} \quad P(\mu) = \sum_{i=1}^{l} |m_i|.$$

Les racines de poids 2 sont par hypothèse de la forme $\pm(\mu_i + \mu_j)$ $(i \neq j)$. Raisonnons par récurrence et soit $\beta$ une racine de poids $p+1$; d'après la proposition 2.1, on peut écrire $\beta = \mu \pm \mu_i$ où $\mu$ est une racine de poids $p$, donc à coefficients tous $\geqslant 0$ par exemple.

Si $\beta$ a des coefficients tous $\geqslant 0$, il n'y a rien à démontrer; sinon $\beta = \mu - \mu_i$ avec

$$\mu = m_1 \mu_1 + \cdots + m_s \mu_s, \quad m_j > 0, \quad j = 1, \ldots, s \quad \text{et} \quad i \notin \{1, \ldots, s\}.$$

Il existe un indice $j \leqslant s$, $s$ par exemple, tel que

$$\mu - \mu_s = \alpha \in \Lambda, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \mu_s \in \Lambda, \quad \alpha + \mu_s - \mu_i \in \Lambda.$$

On a: $\beta = -\mu_i + \alpha + \mu_s$.

D'après la proposition 2.2, on a $-\mu_i + \alpha \in \Lambda$ ou bien $-\mu_i + \mu_s \in \Lambda$. Le second cas est exclu par hypothèse; $-\mu_i + \alpha$ est une racine de poids $p$ à coefficients non tous $\geqslant 0$; pour éviter la contradiction, il faut poser $\beta = \mu + \mu_i$, d'où la conclusion.

## 2.3 *Sous-systèmes fermés*

PROPOSITION 2.4: *Supposons $\Delta = \Lambda$, $A \subset \Lambda$ avec $A = -A$, $(A + A) \cap \Lambda \subset A$. Alors la classe $\Delta_0$ des $\mu \equiv 0 (\mathrm{mod}\, A)$ coïncide avec $A$.*

On a d'abord $A \subset \Delta_0$. Soit maintenant $\mu \in \Delta_0$:

$$\mu = \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

La proposition 2.1 affirme l'existence d'une $A$-suite qui relie 0 à $\mu$: $0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k = \mu$. On a:

$$\mu_1 - 0 = \mu_1 \in A$$
$$\mu_2 - \mu_1 \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_2 = \mu_1 + \alpha \in (A + A) \cap \Lambda, \quad \text{et} \quad \mu_2 \in A$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mu_k - \mu_{k-1} \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_k = \mu \in A.$$

Ainsi $\Delta_0 \subset A$ et $\Delta_0 = A$.

DÉFINITION 2.3: *Toute partie* $\Lambda_0$ *de* $\Lambda$ *qui vérifie* $\Lambda_0 = -\Lambda_0$, $(\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ *est appellée sous-système fermé de L.*

COROLLAIRE (à la proposition 2.1): *Soient* $\Delta$ *un* $\Lambda$*-système,* $\Lambda_0$ *un sous-système fermé de* $\Lambda$*, et* $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s$ *la partition de* $\Delta$ *en classes mod* $\Lambda_0$*. Chaque classe* $\Delta_m$ *est* $\Lambda_0$*-connexe.*

En particulier, si $\Delta = \Lambda$, ce dernier subit une partition en classes mod $\Lambda_0$

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

et chaque classe $\Lambda_m$ est $\Lambda_0$-connexe. $\Lambda_0$ est celle de ces classes qui contient 0.

2.4 *Partitions admissibles d'un* $\Lambda$*-système*

DÉFINITION 2.4: *Soit* $\Delta$ *un* $\Lambda$*-système dans* $R^l$*, et D une partition* $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$ *de* $\Delta$*. Le vecteur* $\tau \rightarrow \tau'$ de $R^l$ *est dit vecteur de* $\Delta$ *si* $\tau$, $\tau' \in \Delta$ *et si* $\tau' - \tau \in \Lambda$*. Le vecteur* $\tau \rightarrow \tau'$ *est dit vecteur de D si c'est un vecteur de* $\Delta$ *et si* $\tau \equiv \tau' \bmod D$.

DÉFINITION 2.5: *La partition D du L-système* $\Delta$ *est dite admissible si*

1) *Tout vecteur de* $\Delta$ *équipollent à un vecteur de D est un vecteur de D* et
2) *Tout ensemble de la partition est connexe.*

PROPOSITION 2.5: *Soit* $\Delta$ *un* $\Lambda$*-système et D une partition de* $\Delta$*. Pour que D soit la partition de* $\Delta$ *en classes modulo un sous-système fermé* $\Lambda_0$*, il faut et il suffit que D soit une partition admissible.*

a) Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$ et $D$: $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$ la partition de $\Delta$ en classes mod $\Lambda_0$. Considérons pour commencer un vecteur $\tau \rightarrow \tau'$ de $D$; On a: $\tau' = \tau + \alpha$, où $\alpha \in \Lambda$.

D'autre part, $\tau' \equiv \tau \bmod \Lambda_0$ implique $\tau' = \tau + \sum n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $\alpha_i \in \Lambda_0$, d'où $\alpha = \sum n_i \alpha_i$, et comme $\Lambda_0$ est fermé, on a $\alpha \in \Lambda_0$.

Maintenant, *si* $\gamma \rightarrow \gamma'$ *est un vecteur de* $\Delta$ *équipollent au vecteur* $\tau \rightarrow \tau'$ *de D, on a:*

$$\gamma' = \gamma + \alpha, \quad \text{où} \quad \alpha \in \Lambda_0,$$

soit: $\gamma' \equiv \gamma \bmod \Lambda_0$. $\gamma \rightarrow \gamma'$ *est un vecteur de D.*

D'après le corollaire à la proposition 2.1, chaque classe $\Delta_i$ est $\Lambda_0$-connexe et la condition 2) de la définition 2.5 est satisfaite. $D$ est une partition admissible.

b) Soit $D$: $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s$ une partition admissible de $\Delta$, soit $\Lambda_0$ l'ensemble des $\alpha \in \Lambda$ tels qu'il existe $\tau$, $\tau' \in \Delta$ avec $\tau' \equiv \tau \bmod D$, $\tau' - \tau = \alpha$.

Je dis que $\Lambda_0$ est un sous-système fermé de $\Lambda$. On a d'après la définition: $\Lambda_0 = -\Lambda_0$, et $0 \in \Lambda_0$.

Soient $\alpha$, $\beta \in \Lambda_0$, avec $\alpha + \beta \in \Lambda - \{0\}$. Construisons le sous-espace $R^h$ de $R^l$ engendré par $\Delta$. On a par hypothèse $\alpha$, $\beta \in R^h$, d'où $\alpha + \beta \in R^h$. Si, pour tout $\tau \in \Delta$, on a $(\alpha + \beta, \tau) = 0$, alors $(\alpha + \beta, R^h) = 0$ $(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$, ce qui est absurde.

Soit donc $\tau \in \Delta$ avec $(\alpha+\beta, \tau) \neq 0$. En prenant un intermédiaire entre $\tau$ et $S_{\alpha+\beta}\tau$, on obtient $\mu$, $\mu' \in \Delta$ avec $\mu' = \mu+\alpha+\beta$, $\mu \neq \mu'$.

D'après la proposition 2.2, on a par exemple $\mu+\alpha \in \Delta$, et le vecteur $\mu \to \mu+\alpha$ est équipollent à un vecteur de $D$, d'où $\mu \equiv \mu+\alpha \bmod D$; de même, $\mu+\alpha \to (\mu+\alpha)+\beta$ est un vecteur de $D$, et $\mu$, $\mu+\alpha$, $\mu+\alpha+\beta$ sont congrus $\bmod D$, ce qui prouve que $\alpha+\beta \in \Lambda_0$.

Il reste à prouver que $D$ est la partition de $\Delta$ en classes $\bmod \Lambda_0$. Supposons $x, y \in \Delta_m$; comme $\Delta_m$ est connexe, il existe une $\Lambda_0$-chaîne qui relie $x$ à $y$, d'où $y = x + \sum n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, $\alpha_i \in \Lambda_0$. Réciproquement, si cette dernière relation a lieu entre $x, y \in \Delta$, il existe une $\Lambda_0$-chaine reliant $x$ à $y$: $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$, avec $x_{i+1} - x_i \in \Lambda_0$, et $x_i \to x_{i+1}$ est un vecteur de $D$. De proche en proche:

$$x \in \Delta_m, \quad x_1 \in \Delta_m, \ldots, x_k = y \in \Delta_m \quad \text{et} \quad x \equiv y \bmod D.$$

## § 3. Addition des classes de $\Lambda$ modulo un sous-système fermé $\Lambda_0$

Soient

$\Lambda$ le système des racines d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$

$\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$, et

$\Delta$ un $\Lambda$-système.

$\Delta$ subit une partition en classes $\bmod \Lambda_0$: $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s$

chaque classe étant $\Lambda_0$-connexe. Considérons deux classes $\Delta_i$, $\Delta_j$ et formons $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta$; cette intersection peut être vide. Si ce n'est pas le cas, il existe un indice $k$ tel que $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta \subset \Delta_k$. Il s'introduit ainsi une loi de composition entre classes $\bmod L_0$, associative, commutative, non nécessairement partout définie.

Je me propose d'étudier cette loi dans le cas où $\Delta = \Lambda$; alors

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

où

$$\Lambda_0' = \Lambda_0 - \{0\}, \quad \Lambda_0 = \{0, \pm \mu_{0\,1}, \ldots, \pm \mu_{0\,n_0}\}, \quad \Lambda_m = \{\mu_{m\,1}, \ldots, \mu_{m,n_m}\}, \qquad m \geqslant 1.$$

L'addition des classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$ est une loi de composition associative, commutative, non nécessairement partout définie, pourvue d'un zéro $\Lambda_0$, chaque classe ayant une opposée. Nous voulons préciser ces diverses propriétés.

Supposons $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda$ non vide, contenue dans $\Lambda_k$ et $0 \notin \{i, j, k\}$ distincts. Il existe des racines notées

$$\mu_{i_1}, \mu_{j_1}, \mu_{k_1} \quad \text{telles que} \quad \mu_{i_1} + \mu_{j_1} = \mu_{k_1}.$$

Prenons alors $\mu^* \in \Lambda_k$; comme $\Lambda_k$ est $\Lambda_0$-connexe, il existe une $\Lambda_0$-suite qui relie $\mu_{k_1}$ à $\mu^*$:

$$m_0 = \mu_{k_1}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_p = m^*.$$

Comme $0 \notin \Lambda_k$, aucune de ces racines n'est nulle; *je dis que* $\mu^*$ *est somme d'un élément* *de $\Lambda_i$ et d'un élément de $\Lambda_j$*; l'affirmation est vraie pour $\mu_0$. Supposons qu'elle soit vraie pour $\mu_{z-1}$. On a:

$$\mu_{z-1} = \mu_{i\,s'} + \mu_{j\,s''} \quad \mu_z = \mu_{i\,s'} + \mu_{j\,s''} + \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_0^*.$$

En appliquant la proposition 2.2, on a par exemple:

$$\mu_{i\,s'} + \alpha \in \Lambda_i \quad \text{et} \quad \mu_z = (\mu_{i\,s'} + \alpha) + \mu_{j\,s''} \in (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda.$$

L'affirmation est établie. En résumé:

LEMME 3.1: *Les hypothèses:*

$$0 \notin \{i, j, k\}, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$$

*impliquent* $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$.

Supposons maintenant $0 = i$, $j \neq 0$, $j = k$.

On a: $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_j$.

Comme $0 \in \Lambda_0$, on a $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; précisons en faisant apparaitre $\Lambda_0'$:

a) si $\Lambda_j$ n'a qu'un seul élément $\mu$, alors

$$\mu \pm \alpha \notin L, \quad \forall \alpha \in L_0', \quad \text{et} \quad (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap L = \Lambda_j = \{\mu\}$$

b) si $\Lambda_j$ a deux éléments $\mu$, $\mu'$ au moins, alors la conjonction

$$\mu \in \Lambda_j, \quad \mu \pm \alpha \notin \Lambda, \quad \forall \alpha \in \Lambda_0'$$

est impossible, vu que $\Lambda_j$ est $\Lambda_0$-connexe; il existe donc

$$\alpha \in L_0' \quad \text{avec} \quad \mu + \alpha \in \Lambda_j, \quad \text{et} \quad \mu \in (\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda, \quad (\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j.$$

LEMME 3.2: *On a, pour $j \neq 0$: $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; si $\Lambda_j$ a plus d'un élément, $(\Lambda_0' + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$.*

Supposons enfin $i \neq 0$, $\Lambda_i = \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i n_i}\}$; alors $-\Lambda_i = \{-\mu_{i_1}, \ldots, -\mu_{i n_i}\}$ est une classe de $\Lambda \bmod \Lambda_0$, et il existe $i' \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$. On a: $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$. Le cas où $i = i'$ n'est pas exclu. Ces résultats peuvent être rassemblés.

THÉORÈME 3.1: *La partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ du système $\Lambda$ en classes modulo le sous-système fermé $\Lambda_0$ a les propriétés suivantes:*

a) *toute classe $\Lambda_m$ est $\Lambda_0$-connexe*

b) si *$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$, il existe $k \leqslant s$ tel que $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cup \Lambda \subset \Lambda_k$; de plus*

b') *$k \neq 0$ implique $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$, $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$ avec $(\Lambda_0' + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$* si *$\Lambda_k$ a plus d'un élément.*

b'' *pour tout i, il existe un indice i' et un seul tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$, ou $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$.*

L'ensemble quotient est ainsi pourvu d'une loi de composition, qui est précisée par le théorème.

Lorsque $\Lambda_0' = \emptyset$, on retrouve $\Lambda$, chaque classe ayant un seul élément.

On peut adopter une notation abrégée, en écrivant autrement les relations du théorème:

$$\begin{array}{lll} (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset & \text{devient} & \Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \\ (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k & \text{devient} & \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k \\ (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j & \text{devient} & \Lambda_0 + \Lambda_j = \Lambda_j \\ (\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 & \text{devient} & \Lambda_i + \Lambda_{i'} = \Lambda_0 . \end{array}$$

Lorsque $\Lambda_0' = \emptyset$, $\Lambda_i = \{\mu_i\}$, on a toujours, pour $i \neq 0$: $2\Lambda_i = \emptyset$. Lorsque $\Lambda_0' \neq \emptyset$, on peut avoir des classes $\Lambda_i, 2\Lambda_i, \ldots, p\Lambda_i$ non vides, $(p+1)\Lambda_i = \emptyset$; $p$ pouvant prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dans certains cas, on peut aussi obtenir:

$\Lambda_1, 2\Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1$ non vides, $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$, $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ formant un groupe cyclique.

## § 4. Sous-systèmes saturés. Centre et caractères

4.1

DÉFINITION 4.1: Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé du système $\Lambda$; *le saturé* $\bar{\Lambda}_0$ *de* $\Lambda_0$ *dans* $\Lambda$ *est l'intersection du support* $R^r$ *de* $\Lambda_0$ *et de* $\Lambda$. C'est un sous-système fermé, qui vérifie $\bar{\bar{\Lambda}}_0 = \bar{\Lambda}_0$. On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda$ lorsque $\Lambda_0$ est de rang 1.

DÉFINITION On dit que le sous-système fermé $\Lambda_0^*$ de $\Lambda$ est *un simplifié* de $\Lambda_0$ si $\Lambda_0^*$ et $\Lambda_0$ ont même rang, si $\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$ et si $\Lambda_0^*$ ne contient aucun sous-système fermé $\neq 0$ propre de même rang.

Tout sous-système fermé $\Lambda_0$ de $\Lambda$ admet un saturé unique $\bar{\Lambda}_0$; il admet au moins un simplifié $\Lambda_0^*$. Tout simplifié est du type $\mathrm{A}_{s_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}_{s_k}$, et tout sous-système fermé d'un simplifié est encore un simplifié.

PROPOSITION 4.1: *Tout sous-système fermé* $\Lambda_0$ *de* $\Lambda$ *est saturé dans un système de rang maximum.*

Si $\mu_1, \ldots, \mu_r (r < 1)$ est une base entière de $\Lambda_0$, on prend $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_l \in \Lambda$ en sorte que $\mu_1, \ldots, \mu_l$ soient libres dans $R^l$. Les éléments de $\Lambda$ qui sont des **Z**-combinaisons linéaires de $\mu_1, \ldots, \mu_l$ forment un sous-système fermé $\Lambda_0^*$ de rang $l$ dans lequel $\Lambda_0$ est saturé.

4.2 *Sous-systèmes saturés et suites fondamentales*

PROPOSITION 4.2: *Soit* $\Lambda_0$ *un sous-système fermé de* $\Lambda$*; pour que* $\Lambda_0$ *soit saturé dans* $\Lambda$*, il faut et il suffit qu'il existe une suite fondamentale de* $\Lambda_0$ *contenue dans une suite fondamentale de* $\Lambda$.

Si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de $\Lambda_0$, contenue dans la suite fondamentale $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ de $\Lambda$, alors, d'après la définition, $\Lambda_0$ est saturé dans $\Lambda$.

*Réciproquement*, supposons $\Lambda_0$ saturé dans $\Lambda$; soient $R^r$ le support de $\Lambda_0 (r<l)$, $R^{l-r}$ le supplémentaire orthogonal de $R^r$ dans $R^l$.

Si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin \Lambda_0$ on a $\lambda \notin R^r$; la restriction $\bar{\lambda}$ de $\lambda$ à $R^{l-r}$ n'est pas nulle; $\bar{\lambda}=0$ définit un $(l-r-1)$-plan de $R^{l-r}$, noté $\pi_\lambda$. La réunion de tous les $\pi_\lambda$ est une partie $F$ fermée de $R^{l-r}$.

Je désigne par $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots$ les composantes connexes du complémentaire de $F$ dans $R^{l-r}$; ces $\mathscr{D}_1$ sont ouverts, connexes, et même convexes: ce sont les chambres de $\Lambda \mid \Lambda_0$.

Soit $x \in \mathscr{D}$; une chambre de Weyl (ouverte) $P_\varphi$ de $\Lambda$ est dite adjacente à $x$ si $x$ est adhérent à $P_\varphi : x \in \bar{P}_\varphi$; si dans ce cas, $y \in P_\varphi$, le segment $u=(x, y)$ est dans $\bar{P}_\varphi$. Sur $y$, les racines $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ qui définissent $P_\varphi$ sont toutes $>0$; il en est de même en chaque point de $u$, sauf en $x$, où elles sont $\geqslant 0$. Avec de bonnes notations:

a)
$$\begin{gathered}\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_{r'}(x) = 0 \\ \varphi_{r'+1}(x) > 0, \ldots, \varphi_l(x) > 0 .\end{gathered}$$

La forme $\varphi_j (j \leqslant r')$ étant nulle en un point $x$ intérieur à $\mathscr{D}_1$ est, par définition de $F$, nulle sur $R^{l-r}$; alors
$$\begin{aligned}&\varphi_j \in R^r \cap \Lambda, \quad \text{d'où} \\ &\varphi_1, \ldots, \varphi_{r'} \in \Lambda_0 .\end{aligned}$$
D'autre part, soit $\mu \in \Lambda_0$; on a
$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \qquad m_i \in \mathbf{Z}, \quad m_i \text{ nuls ou tous de même signe}.$$
Alors
$$0 = \mu(x) = m_{r'+1} \varphi_{r'+1}(x) + \cdots + m_l \varphi_l(x)$$
et par a): $m_{r'+1} = \cdots = m_l = 0$; il vient
$$\mu = m_1 \varphi_1 + \cdots + m_{r'} \varphi_{r'}, \quad \text{et} \quad r' = r .$$

Ainsi $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de $\Lambda_0$, contenue dans $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_l\}$, qui est une suite fondamentale de $\Lambda$.

Par usage du groupe de Weyl de $\Lambda_0$, on voit de plus que toute suite fondamentale de $\Lambda_0$ a aussi cette propriété.

Corollaire: *On obtient tous les sous-systèmes $\Lambda_0$ saturés dans $\Lambda$, en prenant une partie quelconque $\mu_1, \ldots, \mu_r$ d'une suite fondamentale $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ de $\Lambda$. $\Lambda_0$ est constitué par les $\mathbf{Z}$-combinaisons linéaires de $\mu_1, \ldots, \mu_r$ qui appartiennent à $\Lambda$.*

4.3 *Centre d'un sous-système*

Définition 4.2: *Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé* de $\Lambda$.
$$\mathscr{Z}_0 = \{x \in R^l \mid (x, \Lambda_0) \subset \mathbf{Z}\}$$
*est par définition le centre de $\Lambda_0$ dans $R^l$.*

Le centre $\mathscr{Z}_0$ est un sous-groupe additif de $R^l$. $\Lambda$ une inclusion de sous-systèmes fermés $\{0\}\subset\Lambda_0\subset\Lambda_0^*\subset\cdots\subset\Lambda$ correspond $R^l\supset\mathscr{Z}_0\supset\mathscr{Z}_0^*\supset\cdots\supset\mathscr{Z}$.

PROPOSITION 4.3: *Si $\Lambda_0$, $\Lambda_0^*$ sont deux sous-systèmes fermés de $\Lambda$, distincts, alors les centres $\mathscr{Z}_0$, $\mathscr{Z}_0^*$ sont distincts.*

Soit $\mu_1,\ldots,\mu_r$ une base entière de $\Lambda_0$, sous-tendant $R^r$; prenons $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\notin\Lambda_0$. Il suffit de montrer qu'il existe un $v\in\mathscr{Z}_0$, avec $\lambda(v)\notin\mathbf{Z}$.

Deux cas se présentent:

a) $$\lambda = m_1\mu_1+\cdots+m_r\mu_r \quad \text{avec} \quad m_1\notin\mathbf{Z}.$$

Ici on prend $v\in R^r$, avec $\mu_1(v)=1$, $\mu_2(v)=\cdots=\mu_r(v)=0$ alors $v\in\mathscr{Z}_0$, et $\lambda(v)=m_1\notin\mathbf{Z}$.

b) $$\lambda,\ \mu_1,\ldots,\mu_r \quad \text{sont linéairement indépendants}.$$

On prend $v\in R^l$ tel que $\lambda(v)=\frac{1}{2}$, $\mu_1(v)=\cdots=\mu_r(v)=0$.

PROPOSITION 4.4: *Toute forme linéaire sur $R^l$, entière sur le centre $\mathscr{Z}_0$ du sous-système fermé $\Lambda_0$, est $\mathbf{Z}$-combinaison linéaire d'éléments de $\Lambda_0$.*

Si $\varrho$ est cette forme, elle s'annule sur le supplémentaire $R^{l-r}$ du support $R^r$ de $\Lambda_0$. Si $\mu_1,\ldots,\mu_r$ est une base entière de $\Lambda_0$, on a $\varrho=m_1\mu_1+\cdots+m_r\mu_r$. Il existe $v_1,\ldots,v_r\in R^r$ avec $\mu_i(v_j)=\delta_{ij}$ (Symbole de Kronecker); ainsi $v_1,\ldots,v_r\in\mathscr{Z}_0$, $\varrho(v)_j=m_j\in\mathbf{Z}$ cqfd.

### 4.4 *Structure du centre d'un sous-système saturé*

PROPOSITION 4.5: *Soient $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$, $\mathscr{Z}_0$ son centre, $\mathscr{Z}$ celui de $\Lambda$. Pour que $\Lambda_0$ soit saturé dans $\Lambda$, il faut et il suffit que $\mathscr{Z}_0\mid\mathscr{Z}$ soit un tore.*

Supposons $\Lambda_0$ saturé; soit $R^r$ son support, de supplémentaire $R^{l-r}$. Il suffit de prouver que toute classe de $\mathscr{Z}_0 \bmod R^{l-r}$ contient un élément de $\mathscr{Z}$.

Soit $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_r\}$ une suite fondamentale de $\Lambda_0$ contenue dans une suite fondamentale $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\ldots,\varphi_l\}$ de $\Lambda$.

Pour $v\in\mathscr{Z}_0$, on a

$$v=v_1+v_2,\quad \text{où}\quad v_1\in R^r,\quad v_2\in R^{l-r},\quad \text{et}$$
$$\varphi_i(v)=\varphi_i(v_1)\qquad i=1,2,\ldots,r$$

ce qui prouve que $v_1\in\mathscr{Z}_0$. Cherchons $u\in R^{l-r}$ en sorte que

$$\varphi_i(v+u)\in\mathbf{Z},\qquad v_1=1,2,\ldots,l$$

c'est à dire $v_1+u\in\mathscr{Z}$. On a

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(v_1+u)&=\varphi_1(v_1)\in\mathbf{Z}\\ \varphi_r(v_1+u)&=\varphi_r(v_1)\in\mathbf{Z}\end{aligned}\right\}\quad \forall u\in R^{l-r}.$$

Posons $\varphi_i(v_1+u)=0 \quad i=r+1,\ldots,l$, d'où $\varphi_i(u)=-\varphi_i(v_1)$.

On a un système de $l-r$ équations indépendantes pour $u\in R^{l-r}$; il y a une solution $u_0$ et une seule, et $v_1+u_0\in\mathscr{Z}$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}$ soit un tore, c'est à dire que chaque classe de $\mathscr{X}_0 \bmod R^{l-r}$ contienne un élément de $\mathscr{X}$.

Soit $v + R^{l-r}$ une classe de $\mathscr{X}_0 \bmod R^{l-r}$, où

$$v = v_1 + v_2 \in \mathscr{X}_0, \qquad v_1 \in \mathscr{X}_0.$$

Il existe $x \in R^{l-r}$ avec $v_1 + x \in \mathscr{X}$.

Si $\mu_1, \dots, \mu_r$ est une base entière de $\Lambda_0$, et si
$\mu = m_1 m_1 + \dots + m_r \mu_r \in \bar{\Lambda}_0$, on a
$\mu(v_1 + x) \in \mathbf{Z}$, $m(v_1) \in \mathbf{Z}$; ainsi
$\mu(v) \in \mathbf{Z}$, $\forall v \in \mathscr{X}_0$ et $\mu \in \Lambda_0$.
On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0$ cqfd.

Remarque 1: Lorsque $\Lambda_0$ n'est pas saturé, on a $\Lambda_0 \subset \bar{\Lambda}_0 \subset \Lambda$, d'où

$$\mathscr{X}_0 \supset \overline{\mathscr{X}}_0 \supset \mathscr{X} \quad \text{et} \quad \mathscr{X}_0 \mid \overline{\mathscr{X}}_0 \sim (\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X})/(\overline{\mathscr{X}}_0 \mid \mathscr{X}).$$

$\mathscr{X}_0 \mid \overline{\mathscr{X}}_0$ est un groupe fini, tandis que $\overline{\mathscr{X}}_0 \mid \mathscr{X}$ est un tore; ainsi $\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}$ est une extension de ce tore par un groupe fini.

Remarque 2: Lorsque $\Lambda_0$ n'est pas saturé, on a encore $\Lambda_0$ saturé dans un $\Lambda_0^*$ de rang maximal:

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \Lambda \quad \text{et} \quad \mathscr{X}_0 \supset \mathscr{X}_0^* \supset \mathscr{X} \quad \text{avec} \quad \mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}_0^* \sim (\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X})/(\mathscr{X}_0^* \mid \mathscr{X}).$$

Le premier membre est un tore, tandis que $\mathscr{X}_0^* \mid \mathscr{X}$ est un groupe fini. $\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}$ contient ce groupe fini, avec un quotient toroïdal.

### 4.5 *Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$*

Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé du système $\Lambda$, et $\mathscr{X}_0$ son centre dans $R^l$; soit

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de $\Lambda$ en classes $\bmod \Lambda_0$. Soit $\mu \in \Lambda$; je pose

$$\mu^* = (\mu \mid \mathscr{X}_0) \bmod 1 .$$

C'est par définition le caractère de $\Lambda_0 \subset \Lambda$ associé à $\mu$; $\mu^*$ est une fonction définie sur $\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}$, à valeurs dans $T = R/\mathbf{Z}$.

Si $\mu, \mu' \in \Lambda_i$, on a

$$\mu' = \mu + \sum_1^r m_i \mu_i \qquad m_i \in \mathbf{Z}, \quad \mu_1, \dots, \mu_r \quad \text{base entière de } \Lambda_0 .$$

Sur $\mathscr{X}_0$ les $\mu_i$ sont entiers, d'où $\mu'^* = \mu^*$.
Réciproquement, si $\mu, \mu' \in \Lambda$ sont tels que $\mu^* = \mu'^*$, alors $\mu' - \mu$ est une forme linéaire

sur $R^l$ entière sur $\mathscr{X}_0$; d'après la proposition 2 de 4.3, on a

$$\mu' - \mu = \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z} \quad \text{d'où} \quad \mu, \mu' \in \Lambda_k .$$

Par ailleurs, si $\mu$, $\mu'$, $\mu + \mu' \in \Lambda$, on a $(\mu + \mu')^* = \mu^* + \mu'^*$.

PROPOSITION 4.6: *La loi $\mu \to \mu^*$ détermine un isomorphisme de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sur l'ensemble des caractères de $\Lambda_0 \subset \Lambda$.*

Lorsque $\Lambda_0$ est saturé, chaque caractère est défini sur le tore $T^{l-r}$.

## § 5. Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque $\Lambda_0$ est saturé dans $\Lambda$

### 5.1 *Détermination pratique de la loi-quotient*

PROPOSITION 5.1: *Soit $\Lambda_0$ un sous-système saturé dans $\Lambda$; pour que deux racines $\mu$, $\mu' \in \Lambda$ appartiennent à une même classe mod $\Lambda_0$, il faut et il suffit que leurs restrictions $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ au supplémentaire orthogonal $R^{l-r}$ du support de $\Lambda_0$ coïncident.*

Si $\mu$, $\mu' \in \Lambda_i$, $\mu' - \mu$ est une forme entière sur $\mathscr{X}_0$, entière sur $R^{l-r}$, donc nulle sur ce sous-espace.

Réciproquement, si $\bar{\mu} = \bar{\mu}'$, on a $\mu^* = \mu'^*$ sur le tore $\mathscr{X}_0 \mid \mathscr{X}$, et $\mu$, $\mu'$ sont dans une même classe mod $\Lambda_0$.

Ainsi, on déduit $\Lambda \mid \Lambda_0$ de $\Lambda$ en prenant les restrictions à $R^{l-r}$ des $\mu \in \Lambda$. Pratiquement, si

$$\Lambda = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_l, \ldots, \sum_1^l m_i \varphi_i, \ldots\}$$

il suffit de supprimer partout $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$

$$\Lambda \mid \Lambda_0 = \{\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l, \ldots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \ldots\} .$$

Les éléments de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont des $\mathbf{Z}$-combinaisons linéaires de $\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l$ à coefficients nuls ou tous de même signe.

### 5.2 *Ensemble des inclusions de suites fondamentales correspondant à $\Lambda_0 \subset \Lambda$*

PROPOSITION 5.2: *Soit $\Lambda_0$ un sous-système saturé dans $\Lambda$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ une suite fondamentale de $\Lambda_0$ et $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$ s classes de $\Lambda$* mod $\Lambda_0$. *Pour qu'il existe $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ de façon que $\varphi_1, \ldots, \varphi_2, \mu_1, \ldots, \mu_s$ soit une suite fondamentale de $\Lambda$, il faut et il suffit que*

1) *Pour tout couple $(i, j)$ $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, s$:* $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0$, et

2) $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$ *forment une base entière de* $\Lambda \mid \Lambda_0$, $(s = l - r)$.

*La condition est nécessaire:* Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_2, \mu_1, \ldots, \mu_s$ est une suite fondamentale de $\Lambda$ alors $\overline{\mu_i - \mu_j}$ n'est pas une classe vu que $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda$, et $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$ engendrent $\Lambda \mid \Lambda_0$ par combinaisons linéaires à coefficients entiers.

*La condition est suffisante:* soient $\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_s$, $s = l - r$ classes vérifiant 1) et 2). Prenons $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tel que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda, j=1,\dots,r$. On a par ailleurs $\mu_i - \mu_k \notin \Lambda (i \neq k)$, sinon $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_k$ serait une classe. Ainsi la différence des deux racines quelconques dans $\varphi_1,\dots,\varphi_r,\mu_1,\dots,\mu_s$ n'est pas une racine.

Soit $\mu \in \Lambda$; on a par hypothèse $\bar{\mu} = m_1 \bar{\mu}_1 + \cdots + m_s \bar{\mu}_s$, $m_i \in \mathbf{Z}$.

Alors $m_1 \mu_1 + \cdots + m_s \mu_s$ est de la forme

$$\mu - \sum_1^r n_i \varphi_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \sum_1^r n_i \varphi_i + \sum_1^s m_i \mu_i .$$

Ainsi $\varphi_1,\dots,\varphi_r,\mu_1,\dots,\mu_{l-r}$ est une base entière de $\Lambda$ telle que la différence de deux de ses éléments distincts quelconques ne soit pas dans $\Lambda$. D'après la proposition 2.3, $\varphi_1,\dots,\varphi_r,\mu_1,\dots,\mu_{l-r}$ est une suite fondamentale de $\Lambda$.

SCHOLIE: *Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ une suite fondamentale du sous-système $\Lambda_0$ saturé dans $\Lambda$, et $\varphi_1,\dots,\varphi_r,\dots,\varphi_l$ une suite fondamentale de $\Lambda$ contenant la précédente. On obtient toutes les suites fondamentales de $\Lambda$ qui contiennent $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ en constituant la loi-quotient:*

$$1) \qquad \pm \bar{\varphi}_{r+1},\dots, \pm \bar{\varphi}_l,\dots, \sum_{r+1}^{l} m_i \bar{\varphi}_i,\dots$$

*puis en déterminant les suites $\bar{\mu}_{r+1},\dots,\bar{\mu}_l$ extraites de 1) telles que*

a) $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0$ b) $\bar{\mu}_{r+1},\dots,\bar{\mu}_l$ base entière de $\Lambda \mid \Lambda_0$.

*Les $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tels que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda (j=1,2,\dots,r)$ constituent avec $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ une telle suite fondamentale $\varphi_1,\dots,\varphi_r,\mu_{r+1},\dots,\mu_1$ de $\Lambda$.*

5.3 *Caractérisation des domaines $\mathscr{D}_i$*

PROPOSITION 5.3: *Soit $\Lambda_0$ un sous-système saturé de $\Lambda$; toute chambre $\mathscr{D}$ de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est définie par des relations*

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_r = 0, \quad \varphi_{r+1} > 0,\dots,\varphi_l > 0$$

*où $\varphi_1,\dots,\varphi_l (\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ est une suite fondamentale de $\Lambda$ resp. $(\Lambda_0)$.*

Reprenons les notations de 4.2, avec $x \in \mathscr{D}_1$; on a

$$1) \qquad \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0, \qquad \varphi_{r+1}(x) > 0,\dots,\varphi_l(x) > 0 .$$

Par définition de $\mathscr{D}_1$, chaque racine de $\Lambda$ est ou bien nulle sur $\mathscr{D}_1$, ou bien garde un signe constant. Les relations 1) ont donc lieu pour tout $y \in \mathscr{D}_1$.

Réciproquement, soit $z \in R^l$ vérifiant

$$\varphi_1(z) = \cdots = \varphi_r(z) = 0; \ \varphi_{r+1}(z) > 0,\dots,\varphi_l(z) > 0 .$$

On a d'abord $z \in R^{l-r}$; sur le segment $(z, x)$, la forme $\varphi_{r+j} (1 \leqslant j \leqslant l-r)$, qui est positive aux extrémités, est positive sur tout le segment; il en est de même de $\bar{\varphi}_{r+j}$

Toutes les formes $\bar{\lambda} \in \Lambda \mid \Lambda_0$ gardent alors un signe constant sur $(z, x)$, d'où $(z, x) \subset D_1$, $z \in \mathscr{D}_1$.

Maintenant, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ est la base duale de $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$:

$$(\varepsilon_i, \varphi_j) = \delta_{ij}; \quad \text{on a}$$
$$z = \lambda_{r+1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + \lambda_l \varepsilon_l$$

car $R^{l-r}$ est engendré par $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$; $\varphi_\alpha(z) > 0$ $\alpha \in (r+1, \ldots, l)$ s'écrit alors $\lambda_\alpha > 0$.

COROLLAIRE: $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ *étant la base duale de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, *la chambre associée à cette suite dans* $R^{l-r}$ *est le premier quadrant relatif au repère* $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$ *de* $R^{l-r}$.

En écrivant

$$\bar{\varphi}_{r+j}(z) = (\bar{\varphi}_{r+j}, z), \qquad \text{on obtient sans peine.}$$

PROPOSITION: $\bar{\varphi}_{r+1}, \ldots, \bar{\varphi}_l$ *est la base duale de* $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_l$ *dans* $R^{l-r}$.

5.4 *$\Lambda$-systèmes modulo un sous-système saturé*

Soit $\Delta$ un $\Lambda$-système dans $R^l$, et $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$; *soit* $R^{l-r}$ *le supplémentaire orthogonal du support* $R^r$ *de* $\Lambda_0$. Je me propose d'étudier ici la projection orthogonale $\bar{\Delta}$ de $\Delta$ sur $R^{l-r}$; $\bar{\Delta}$ est le $\Lambda$-système $\Delta$ modulo $\Lambda_0$.

Si $\Delta = \mathscr{S}$ est un système de racines secondaires de $\Lambda$, $\mathscr{S}$ est dit système de racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Si $\Delta = \Lambda$, $\Lambda$ est dit système de racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Cette étude est surtout intéressante lorsque $\Lambda_0$ est saturé.

PROPOSITION 5.4: *Soit* $\Delta$ *un* $\Lambda$*-système dans* $R^l$, $\Lambda_0$ *un sous-système fermé de* $\Lambda$ *et* $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$ *la partition de* $\Delta$ *modulo* $\Lambda_0$. *Chaque face* $\Delta_i$ *se projette sur un point de* $R^{l-r}$*: le centre de cette face.*

Soient $\mu, \mu' \in \Delta_i$; $\mu' - \mu$ étant dans $R^r$, $\mu$ et $\mu'$ ont même projection sur $R^{l-r}$, et $\Delta_i$ se projette sur $\sigma_i \in R^{l-r}$.

Soit maintenant

$$\sigma_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{\alpha \in \Delta_i} \alpha, \quad n_i \text{ nombre d'éléments dans } \Delta_i$$

le centre de $\Delta_i$. Le groupe de Weyl $W_0$ associé à $\Lambda_0$ conserve $\Delta_i$ et conserve donc $\sigma_i^*$; cela implique $\sigma_i^* \in R^{l-r}$.

Ainsi, $\sigma_i^*$ est un point du support plan de $\Delta_i$ situé dans $R^{l-r}$, et on a vu que ce support se projette sur un point $\sigma_i$. On a $\sigma_i = \sigma^*$ cqfd.

COROLLAIRE: *Si* $\Lambda_0$ *est de rang maximum 1, les centres des faces de la partition d.* $\Delta$ *mod*$\Lambda_0$ *sont tous en* 0.
Ici $R^{l-r} = \{0\}$.

PROPOSITION 5.5: *Soit* $\Delta$ *un* $\Lambda$*-système connexe, et* $\Lambda_0$ *un sous-système saturé de rang*

*$r$ de $\Lambda$. Dans la projection orthogonale $R^l \to R^{l-r}$, deux faces distinctes de $\Delta$ modulo $\Lambda_0$ ont pour image deux points distincts.*

Soient $\tau, \tau' \in \Delta$ se projetant sur $\gamma \in R^{l-r}$.

On a:

1) $$\tau' = \tau + \sum_1^r m_i \alpha_i$$

en supposant que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_l)$ est une suite fondamentale de $\Lambda_0$ (resp. $\Lambda$).

Comme $\Delta$ est connexe, on peut écrire

$$\tau' = \tau + \sum b_i \beta_i, \quad b_i \in \mathbf{Z}, \quad \beta_i \in \Lambda$$

où

$$\beta_i = \sum_1^l b_{ik} \alpha_k, \quad b_{ik} \in \mathbf{Z}$$

d'où encore

$$\tau' - \tau = \sum_{i,k} b_i b_{ik} \alpha_k = \sum b'_k \alpha_k, \quad b'_k \in \mathbf{Z}$$

2) $$\tau' = \tau + \sum_1^l b'_k \alpha_k \quad b'_k \in \mathbf{Z}.$$

Comparant 1) et 2), on voit que $m_1, \ldots, m_r$ sont entiers, ce qui signifie que $\tau, \tau'$ sont dans une même face $\Delta_i$ de $\Delta \bmod \Lambda_0$.

Corollaire 1: *Pour $\Delta$ connexe et $\Lambda_0$ saturé, les centres des faces de $\Delta \bmod \Lambda_0$ sont distincts.*

Corollaire 2: *Lorsque $\Lambda_0$ est saturé, le système des racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\Lambda \bmod \Lambda_0$.*

Corollaire 3: *Soit $\mathcal{S}$ un système de racines secondaires de $\Lambda$, et $\Lambda_0$ un sous-système saturé de $\Lambda$. Le système $\overline{\mathcal{S}}$ des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\mathcal{S} \bmod \Lambda_0$.*

5.5 *Sous-systèmes saturés de $A_l$ et loi-quotient*

Pour étudier l'algèbre semi-simple $A_l$, on se sert du simplexe régulier fondamental

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(A_l) = \{\tau_1, \ldots, \tau_{l+1}\}$$

où

$$\sum_1^{l+1} \tau_i = 0, \quad (\tau_i, \tau_i) = l/(l+1), \quad (\tau_i, \tau_j) = -1/(l+1).$$

Le système des racines de $A_l$ est constitué par toutes les arêtes de $\mathcal{S}$.

Pour étudier un sous-système fermé quelconque de $A_l$ (toujours saturé), on se sert d'une partition

$$p_1 \cup \cdots \cup p_{s+1} \quad \text{de} \quad 1, 2, \ldots, l+1$$

où $p_i$ a $r_i$ éléments. Les faces de $\mathcal{S}$ mod $\Lambda_0$ sont les $s+1$ ensembles

$$P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = \{\tau_\alpha - \tau_\beta) \mid \alpha, \beta \in p_i;\, i = 1, \ldots, s+1\}.$$

Le polyèdre des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces $P_i$

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \left\{\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_{s+1} = \frac{1}{r_{s+1}} \sum_{\alpha \in p_{s+1}} \tau_\alpha\right\}.$$

Cela détermine les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ qui ne sont autres que les arêtes de $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$.

$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$ est un simplexe dans $R^{l-r}$, en général non régulier. Un calcul simple montre que $l-r=s$.

PROPOSITION 5.6: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes du simplexe constitué par les centres des faces de $\Lambda_0$.*

5.6 *Sous-systèmes saturés de $B_l$ et loi-quotient*

Si $\tau_1, \ldots, \tau_l$ est un repère orthonormal de $R^l$, on pose $\mathcal{S} = \mathcal{S}(B_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l, 0\}$ $2l+1$ points. Le système des racines de $B_l$ est formé de toutes les arêtes de $\mathcal{S}$ sauf les $\pm(\tau_i - (-\tau_i)) = \pm 2\tau_i$: on obtient:

$$\Lambda = \Lambda(B_l) = \{\pm\tau_i, \pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j;\, i, j = 1, \ldots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque $\Lambda_0$, il suffit de se donner une partition de $\{1, 2, \ldots, l\}$

$$(p_0) \cup p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_k, \qquad p_0 \text{ éventuellement vide}$$

$p_i$ ayant $r_i$ éléments, $r_1, \ldots, r_k > 0$, $r_0$ éventuellement nul. Les faces de $\Lambda_0$ sont alors

$$P_0 = \{0, \pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\}, \quad \begin{matrix} P_1 = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \\ P_1' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} P_k = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\} \\ P_k' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}. \end{matrix}$$

On a

$$\Lambda_0 = \text{ensemble de toutes les arêtes des } P_0, P_i, P_{i'}$$

sauf les $\pm(\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)) = \pm 2\tau_\alpha$, $\forall \alpha \in p_0$.

$$= \{\pm\tau_\alpha, \pm\tau_\alpha \pm \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_0\} \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_1\} \cup \cdots \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_k\}.$$

Le rang de $\Lambda_0$ est ici

$$r_0 + (r-1) + \cdots + (r_k - 1) = \sum r_i - k = l - k = r$$

d'où $l-r=k$.

Le supplémentaire orthogonal $R^{l-r} = R^k$ du support $R^r$ de $\Lambda_0$ est engendré par les centres des faces de $\mathscr{S}$ mod $\Lambda_0$:

$$\overline{\mathscr{S}} = \mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{0, \pm \mu_1, \ldots, \pm \mu_k\}; \; \mu_i = \frac{1}{r_i} \sum_{\alpha \in p_i} \tau_\alpha .$$

Notons que $\mu_1, \ldots, \mu_k$ est un repère orthogonal de $R^{l-r}$.

PROPOSITION 5.7: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire toutes les expressions $\pm \mu_i$, $\pm \mu_i \pm \mu_j$ et de plus toutes les $\pm 2\mu_j$ pour lesquelles $r_j > 1$.*

*Exemple:*

$$p_0 = \emptyset, \quad p_1 = \{1\}, \qquad p_2 = \{2, 3, 4\}$$

$$P_0 = \{0\} \begin{matrix} P_1 = \{\tau_1\} & P_2 = \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\} \\ P_1' = \{-\tau_1\} & P_2' = \{-\tau_2, -\tau_3, -\tau_4\} \end{matrix}$$

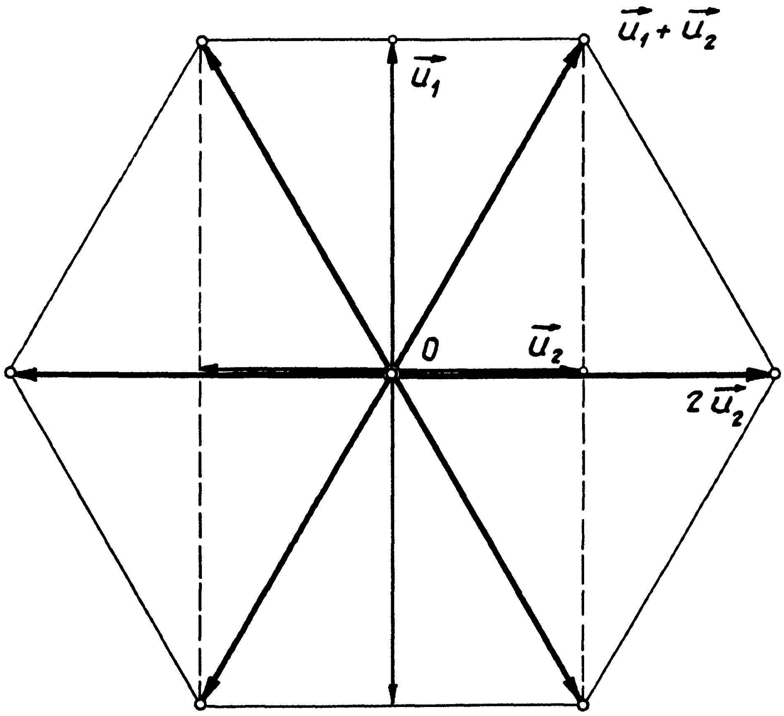
$\Lambda_0$ a pour racines: $\pm(\tau_2 - \tau_3)$, $\pm(\tau_3 - \tau_4)$, $\pm(\tau_2 - \tau_4)$ et est du type $A_2$.

$\Lambda \mid \Lambda_0$ est déterminée par

$$0, \quad \mu_1 = \tau_1, \qquad \mu_2 = (\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/3$$

et admet les racines:

$$0, \pm \mu_1, \pm \mu_2, \pm \mu_1 \pm \mu_2, \pm 2\mu_2 .$$




5.7 *Sous-systèmes saturés de $C_l$ et loi-quotient*

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_l$ un repère orthonormal de $R^l$, et

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(C_l) = \{\pm \tau_1, \ldots, \pm \tau_l\} \quad 2l \text{ points}.$$

Les racines de $C_l$ sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}$, sans exception:

$$\Lambda = \{\pm\tau_i \pm \tau_j, \pm 2\tau_i \mid i \neq j;\, i,j = 1, 2, \ldots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque, il suffit de se donner une partition $(p_0) \cup p_1 \cup \cdots \cup p_k$ $p_i$ ayant $r_i$ éléments, avec $r_0 \geqslant 0$; $r_1, \ldots, r_k > 0$.

On en déduit une partition de $\mathscr{S}$:

$$(P_0) = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\} \quad \begin{matrix} P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \\ P_i' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \end{matrix} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Les racines de $\Lambda_0$ sont toutes les arêtes de $(P_0)$, $P_1$, $P_1', \ldots, P_k$, $P_k'$; le rang de $\Lambda_0$ est $l-k$, d'où $l-r=k$. Le supplémentaire $R^k$ du support $R^r$ de $\Lambda_0$ est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

et

$$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_k\} \qquad (0 \text{ si } r_0 > 0).$$

PROPOSITION 5.8: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire les $\pm\mu_i \pm \mu_j$, $\pm 2\mu_j$ avec en plus les $\pm\mu_j$* si $r_0 > 0$.

### 5.8 *Sous-systèmes saturés de $D_l$ et loi-quotient*

Soit $\tau_1, \ldots, \tau_l$ un repère orthonormal de $R^l$ et

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(D_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l\} \quad 2l \text{ points}.$$

Les racines de $D_l$ sont toutes les arêtes de $\mathscr{S}$, sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha) = 2\tau_\alpha$:

$$\Lambda = \{\pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j;\, i,j = 1, \ldots, l\}.$$

Pour constituer un sous-système saturé $\Lambda_0$ quelconque, on se donne une partition

$$(p_0) \cup p_1 \cup \cdots \cup p_k \quad \text{de} \quad 1, 2, \ldots, l$$

$p_i$ ayant $r_i$ éléments: $r_0 \geqslant 0$; $r_1, \ldots, r_k > 0$. On en déduit une partition de $\mathscr{S}$:

$$(P_0) = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\} \quad \begin{matrix} P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \\ P_i' = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \end{matrix} \quad i = 1, \ldots, k$$

$P_0$ étant vide si $p_0 = \emptyset$.

Les racines de $\Lambda_0$ sont toutes les arêtes des faces $P_0$, $P_i$, $P_i'$, sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)$, $\forall \alpha \in p_0$.

Le rang de $\Lambda_0$ est $l-k$. Ici $R^{l-r} = R^k$ est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \ldots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

$$\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm\mu_1, \ldots, \pm\mu_k\}.$$

PROPOSITION 5.9: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont les arêtes de $\mathscr{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$*
a) si $r_0=0$: $\pm m_i \pm m_j$, et les $2\mu_j$ où $r_j>1$
b) si $r_0>0$: $\pm\mu_i\pm\mu_j$, $\pm\mu_j$, et les $\pm 2\mu_s$ où $r_s>1$ $(i\neq j;\, i,j=1,\dots l)$.

## § 6. Loi-quotient lorsque le sous-système $\Lambda_0$ est de rang maximum

Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$ ayant même rang $l$ que $L$. Le but de ce paragraphe est de donner le principe de la construction de tous les tels $\Lambda_0$ contenus dans un système $\Lambda$ donné.

Je me propose ensuite de donner la forme de la loi-quotient $\Lambda/\Lambda_0$ lorsque $\Lambda$ est simple, classique $(A_l, B_l, C_l, D_l)$.

Enfin, je crois utile d'étudier $\Lambda/\Lambda_0$ pour toutes les algèbres simples, le système $\Lambda_0$ étant minimal (de rang maximal $l$); il s'agit ici de l'étude des simplifiés de $\Lambda$. A tout simplifié de $\Lambda$, on peut associer un système de générateurs remarquables de $R^l$, permettant de donner à l'expression des racines une forme standard.

6.1 *Principe de la construction*

Soit:

1) $$\varphi_1,\dots,\varphi_{l_1};\ \varphi_{l_1+1},\dots,\varphi_{l_2};\ \dots;\ \varphi_{l_t+1},\dots,\varphi_{l_{t+1}}$$

une suite fondamentale de $\Lambda$, chaque suite partielle correspondant à une composante simple de $\Lambda$. Je construis les racines dominantes, respectivement:

2) $$\omega_1,\quad \omega_2,\dots,\quad \omega_{t+1}$$

puis la suite

3) $$\varphi_1\cdots\varphi_{l_1},\ -\omega_1;\ \varphi_{l_1+1},\dots,\varphi_{l_2},\ -\omega_2;\ \dots;\ \varphi_{l_t+1},\dots,\varphi_{l_{t+1}},\ -\omega_{t+1}\,.$$

En supprimant une racine quelconque dans chaque suite partielle de 3), on obtient une suite fondamentale d'un sous-système $\Lambda_0$ fermé de rang maximal.

On recommence sur la suite obtenue l'opération effectuée sur 1) etc, de toutes les façons possibles. Cela fournit tous les $\Lambda_0$ du type désiré, d'où possibilité d'étudier toutes les lois $\Lambda/\Lambda_0$.

Par ailleurs, à chaque tel $\Lambda_0$ est associée une partition:

4) $$\mathscr{S}=(\mathscr{S}_0)\cup\mathscr{S}_1\cup\cdots\cup\mathscr{S}_u$$

d'un système de racines secondaires $\mathscr{S}$ de $\Lambda$. Les centres des faces $\mathscr{S}_i$ sont tous en 0. En assimilant chaque $\mathscr{S}_i$ à un élément, on peut déduire de 4) la forme de la loi-quotient.

6.2 *Loi-quotient $\Lambda/\Lambda_0$ lorsque $\Lambda$ est simple du type $A_l$, $B_l$, $C_l$, $D_l$*

ALGÈBRE $A_l$: Tout sous-système $\Lambda_0$ de rang $l$ coïncide avec $\Lambda$.

ALGÈBRE $B_l$: Soit

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(B_l) = \{0, \pm\tau_1, \pm\tau_2, \ldots, \pm\tau_l\}$$

et

$$(p_0) \cup p_1 \cup \cdots p_k$$

une partition de $1, 2, \ldots, l$, $p_\iota$ ayant $r_i$ éléments, avec $r_0 \geqslant 0$, $r_1 > 0, \ldots, r_k > 0$. Les faces de $\Lambda_0$ sont:

$$P_0 = \{0, \pm\tau_a \mid \alpha \in P_0\}, P_1 = \{\pm\tau_a \mid \alpha \in p_1\}, \ldots, P_k = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in P_k\}$$

$\Lambda_0$ est de type

$$B_{r_0} \times D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_k}$$

avec les racines

$$\Lambda_0: \pm\tau_i, \quad \pm\tau_i \pm \tau_j; \quad \pm\tau_i \pm \tau_j; \quad \ldots; \quad \pm\tau_i \pm \tau_j, \quad \begin{matrix} i, j \in p_0 \\ i \neq j \end{matrix}, \quad \begin{matrix} i, j \in p_1 \\ i \neq j \end{matrix} \cdots \begin{matrix} i, j \in p_k \\ i \neq j \end{matrix}.$$

Les classes de $\Lambda$ mod $\Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{0\,i} = \{\pm\tau_k, \pm\tau_k \pm \tau_j \mid k \in p_i; j \in p_0\}$$
$$\Lambda_{i\,j} = \{\pm\tau_k \pm \tau_m \mid k \in p_i; m \in p_j\}$$

et la loi-quotient s'exprime par

$$2\Lambda_{i\,j} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h\,r} = \Lambda_{m\,r}$$
$$2\Lambda_{0\,i} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h' r = 0} \qquad (m, h, h', r \text{ distincts})$$

où $\Lambda_{i\,j} = \Lambda_{j\,i}$.

ALGÈBRE $C_l$: ici

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(C_l) = \{\pm\tau_1, \ldots, \pm\tau_l\}$$

et on prend une partition

$$p_1 \cup p_2 \cup \cdots \cup p_k \qquad (r_i \text{ éléments dans } p_i)$$

de $1, 2, \ldots, l$. Les faces de $\Lambda_0$ sont toutes de centre 0.

$$P_1 = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \ldots, P_k = \{\pm\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

$\Lambda_0$ est de type:

$$C_{r_1} \times \cdots \times C_{r_k}.$$

Les classes mod $\Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{m\,h} = \{\pm\tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \qquad \Lambda_{m\,h} = \Lambda_{h\,m}$$

avec les règles de calcul

$$2\Lambda_{m\,h} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h\,r} = \Lambda_{m\,r}$$
$$\Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h'\,r = 0} \qquad (m, h, h', r, \text{ distincts}).$$

ALGÈBRE $D_l$:

$$\mathscr{S} = (D_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\}.$$

Si $p_1 \cup \dots \cup p_k$ est une partition de $1, 2, \dots, l$ où $p_i$ a $r_i \geqslant 2$ éléments, on a les faces de $\Lambda_0$:

$$P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Ici

$$\Lambda_0 = \{\pm \tau_i \pm \tau_j; \dots; \pm \tau_i \pm \tau_j\}, \quad \underset{i \neq j}{i, j \in p_1} \dots \underset{i \neq j}{i, j \in p_k}$$

et

$$\Lambda_0 = D_{r_1} \times \dots \times D_{r_k}.$$

Les classes de $\Lambda$ mod $\Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{m\,h} = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \qquad L_{m\,h} = L_{h\,m}$$

avec les règles:

$$2\Lambda_{m\,h} = \Lambda_0 \qquad \Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h\,r} = \Lambda_{m\,r}$$
$$\Lambda_{m\,h} + \Lambda_{h'r} = 0 \qquad (m, h, h', r, \text{distincts}).$$

6.3 *Sous-systèmes $\Lambda_0$ minimaux de rang maximal*

6.3.1 SIMPLEXES DANS $R^s$

Prenons l'espace enclidien $R^{s+1}$ pourvu d'un repère

1) $\varrho\tau'_1, \dots, \varrho\tau'_{s+1}$ où $\tau'_1, \dots, \tau'_{s+1}$ est orthonormal. Posons $\varepsilon = \tau'_1 + \dots + \tau'_{s+1}$ et soit $R^s$ le s-plan orthogonal à $\varepsilon$. En projetant les vecteurs 1) orthogonalement sur $R^s$, on obtient

2) $$\tau_1 = \varrho(\tau'_1 - \varepsilon/(s+1)), \dots, \tau_{s+1} = \varrho(\tau'_{s+1} - \varepsilon/(s+1)). \qquad \varrho(\dots)$$

Les vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$ forment un système de générateurs remarquables de $R^s$; on a:

a) $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{s+1} = 0$

b) si $\sum_{i=1}^{s+1} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{s+1} y_i = 0$, on a $\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i \tau_i, \sum_{i=1}^{s+1} y_i \tau_i\right) = \varrho^2 \sum_1^{s+1} x_i y_i$

c) $(\tau_i, \tau_i) = \varrho^2 s/(s+1)$; $(\tau_i, \tau_j) = -\varrho^2/(s+1)\,(i \neq j)$

$$(\tau_i - \tau_j, \tau_i - \tau_j) = 2\varrho^2.$$

Les vecteurs $\tau_i - \tau_j$ forment le système des vecteurs-racines d'une algèbre simple $A_s$, de longeur $\varrho\sqrt{2}$. Les vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$ sont alors un système de racines secondaires de $A_s$.

6.3.2 LES SOUS-SYSTÈMES $\Lambda_0$ DE RANG MAXIMUM $l$ DANS $\Lambda$, minimaux de cette espèce, c'est à dire les simplifiés de $\Lambda$, sont tous du type $A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_q}$. Les vecteurs de $\Lambda$ sont

a) les racines des $A_{s_1}, \dots, A_{s_q}$

b) certaines combinaisons linéaires rationnelles de ces racines.

Lorsque $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i,s+1}$ est un système de racines secondaires de $A_{s_i}$, alors les racines du type a) s'écrivent:

a) $\tau_{1m} - \tau_{1m'}$; $\cdots$; $\tau_{qm} - \tau_{qm'}$ (racines de $\Lambda_0$)

Les autres racines de $\Lambda$ sont certaines combinaisons linéaires des $\tau_{ij}$, toujours de l'une des formes

$$2\tau, \quad \tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''$$

comme nous allons nous en assurer. Ci-dessous, je démontre ce fait pour les systèmes simples $\Lambda$ de l'un des types $D_l$, $E_6$, $E_7$, $E_8$, en donnant les expressions correspondant à chaque $\Lambda_0 \subset \Lambda$; le fait annoncé est ensuite directement vérifié pour $B_l$, $C_l$, $F_4$, $G_2$.

6.3.3 Prenons:

$$\Lambda_0 = \{A_{s_1}, \ldots, A_{s_q}\}$$

les racines de $A_{sj}$ étant les $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$; les vecteurs-racines ont ici tous la même longueur $\sqrt{2}$ et $\varrho = 1$.

On veut trouver tous les vecteurs du type

$$\omega = \sum_i x_{1i} \tau_{1i} + \cdots + \sum_i x_{qi} \tau_{qi} \quad \text{où} \quad \sum_i x_{1i} = 0, \ldots, \sum_i x_{qi} = 0$$

capables de former avec les $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$ un système de vecteurs-racines d'un $\Lambda$.

On a:

$$(\omega, \omega) = 2, \quad \frac{2(\tau_{1m} - \tau_{1m'}, \omega)}{(\omega, \omega)} \in \{0, \pm 1\}$$

d'où $x_{1m} - x_{1m'} \in \{0, \pm 1\}$. $x_{11} - x_{11}, x_{11} - x_{12}, x_{11} - x_{13}, \ldots, x_{11} - x_{1s_1+1}$ sont des entiers, ce qui implique $x_{11} = u_{11}/(s_1+1)$, $u_{11} \in \mathbf{Z}$; de même $x_{ij} = u_{ij}/(s_i+1)$, $u_{ij} \in \mathbf{Z}$.

$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1,s_1+1}$ sont des entiers dont les différences deux à deux ne peuvent prendre que l'une des valeurs $0, s_1+1, -s_1-1$.

Ils se partagent en deux classes d'entiers égaux à $u_1$, $u_1 + s_1 + 1$ et

$$\omega = [u_1(\tau_{11} + \cdots + \tau_{1r_1}) + (u_1 + s_1 + 1)(\tau_{1,r_1+1} + \cdots + \tau_{1,s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \cdots$$

En exprimant que $\sum x_{1i} = 0$, on obtient:

$$\omega = [(r_1 - s_1 - 1)(\tau_{11} + \cdots + \tau_{1,r_1}) + r_1(\tau_{1,r_1+1} + \cdots + \tau_{1,s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \cdots$$

Tenons compte de $\sum \tau_{1i} = 0$:

$$\omega = -(\tau_{11} + \cdots + \tau_{1r_1}) - \cdots - (\tau_{q1} + \cdots + \tau_{qr_q}).$$

Enfin, tenant compte encore de $\sum_i \tau_{ji} = 0$, on a:

$$\omega = \pm(\tau_{11} + \cdots + \tau_{1r_1}) \pm \cdots \pm (\tau_{q1} + \cdots + \tau_{qr_q}); \quad 2r_j \leqslant s_j + 1.$$

Il reste à vérifier que $\sum r_j = 3$ ou 4. On peut, pour la racine $\omega$ considérée, remplacer certains systèmes $\tau_{i1}, \ldots, \tau_{i,\, s_i+1}$ par les opposés, d'où

$$\omega = (\tau_{11} + \cdots + \tau_{1 r_1}) + \cdots + (\tau_{q1} + \cdots + \tau_{q r_q}) \qquad 2 r_j \leqslant s_j + 1$$
$$\omega = -(\tau_{1, r_1+1} + \cdots + \tau_{1, s_1+1}) - \cdots - (\tau_{q, r_q+1} + \cdots + \tau_{q, s_q+1})$$
$$(\omega, \omega) = \frac{r_1 (s_1 + 1 - r_1)}{s_1 + 1} + \cdots + \frac{r_q (s_q + 1 - r_q)}{s_q + 1}$$
$$(\omega, \omega) = \sum r_j - \sum \frac{r_j^2}{s_j + 1}.$$

En faisant usage de symétrie $S_{\tau_{im}} - \tau'_{im}$, on peut transformer les racines $\omega$ en

$$\omega' = (\tau_{1, r_1+1} + \cdots + \tau_{1, 2 r_1+1}) + \cdots + (\tau_{q, r_q+1} + \cdots + \tau_{q, 2 r_q+1}).$$

On supprime les termes pour lesquels $r_j = 0$. Alors

$$(\omega, \omega') = - \sum_j \frac{r_j^2}{s_j + 1}$$
$$(\omega, \omega) - (\omega, \omega') = \sum r_j.$$

Si $\omega' = -\omega$, on a

$$(\omega, \omega') = -(\omega, \omega) = -2 \quad \text{et} \quad \sum r_j = 4;$$

Si $\omega' \neq -\omega$, on a $(\omega, \omega') = -1$, et $\sum r_j = 3$.
Le fait annoncé est établi. Nous allons donner les expressions dans chaque cas.

### 6.3.4 Sous-systèmes minimaux de rang maximal des systèmes simples $D_l$, $E_6$, $E_7$, $E_8$

Algèbre $D_l$: $\pm\tau_i \pm \tau_j$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, l)$ étant les racines de $D_l$, on obtient tous les sous-systèmes désirés en prenant une solution $(k, k')$ quelconque de l'équation

$$3k + 2k' = l \qquad K, K' \text{ entiers} \geqslant 0$$

et une partition de $1, 2, \ldots, l$ du type $(k, k')$ notée:

$$11, 12, 13;\ 21, 22, 23;\ \ldots;\ k1, k2, k3;\ 1'1, 1'2;\ \ldots;\ k'1, k'2.$$

*Les racines secondaires du sous-système minimal de type $(K, K')$ sont alors:*

$$\begin{cases} \mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \\ \mu_{p2} = \tau_{p1} - \mu_{p1} \\ \mu_{p3} = \tau_{p2} - \mu_{p1} \\ \mu_{p4} = \tau_{p3} - \mu_{p1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\ \mu_{q'2} = -\mu_{q'1} \\ \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - \mu_{q'1} \\ \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - \mu_{q'1} \end{cases}.$$
$$p = 1, \ldots, k \qquad\qquad q' = 1, \ldots, k'$$

On en déduit les racines de $D_l$ sous la forme:

$$\begin{array}{ll} \mu_{p\,i}-\mu_{p\,j}, \mu_{q'\,i}-\mu_{q'\,j} & (\text{système } \Lambda_0) \\ \mu_{p\,i}+\mu_{p\,j}+\mu_{r\,m}+\mu_{r\,n} & KA_3\times 2K'A_1\subset D_l. \\ \mu_{p\,i}+\mu_{p\,j}+\mu_{r'\,m}+\mu_{r'\,n} & \\ \mu_{q'\,i}+\mu_{q'\,j}+\mu_{r'\,m}+\mu_{r'\,n} & \mu_{q'\,i}+\mu_{q'\,j}\neq 0 \end{array}$$

Notons ici que les racines secondaires de $D_l$: $\pm\tau_1,\dots,\pm\tau_l$ s'écrivent:

$$\mu_{p\,i}+\mu_{p\,j}, \quad \text{et} \quad \mu_{q'\,i}+\mu_{q'\,j}$$

cette dernière devant être $\neq 0$.

ALGÈBRE $E_6$: Les racines sont $\tau_i-\tau_j$, $\pm(\tau_i+\tau_j+\tau_k)$, $\pm\sum_i \tau_i$ ($i, j, k$ distincts $\in\{1, 2, \dots, 6\}$) avec $-3\varepsilon=\sum\tau_i$. On peut poser:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1=\tau_1-\tau_2 & \varphi_4=\tau_4-\tau_5 & \\ \varphi_2=\tau_2-\tau_3 & \varphi_5=\tau_5-\tau_6 & \\ \varphi_3=\tau_3-\tau_4 & \varphi_6=\tau_4+\tau_5+\tau_6 & (\text{suite fondamentale}). \end{array}$$

La racine dominante est ici:

$$-3\varepsilon=\varphi_1+2\varphi_2+3\varphi_3+2\varphi_4+\varphi_5. \\ +2\varphi_6$$

Par suppression de $\varphi_3$ dans la figure

$$\begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ 3\varepsilon \end{array}$$

on obtient une suite fondamentale d'un sous-système $\Lambda_0$ du type $3A_2$

$$\tau_1-\tau_2, \quad \tau_2-\tau_3; \quad \tau_4-\tau_5, \quad \tau_5-\tau_6; \quad \tau_4+\tau_5+\tau_6, \quad 3\varepsilon.$$

Posant:

$$\begin{array}{lll} \mu_1=\tau_1-\dfrac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{3} & \mu_4=-\tau_4+\dfrac{\tau_4+\tau_5+\tau_6}{3} & \mu_7=-\varepsilon-\frac{2}{3}(\tau_4+\tau_5+\tau_6) \\ \mu_2=\tau_2-\dfrac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{3} & \mu_5=-\tau_5+\dfrac{\tau_4+\tau_5+\tau_6}{3} & \mu_8=-\varepsilon+\frac{1}{3}(\tau_4+\tau_5+\tau_6) \\ \mu_3=\tau_3-\dfrac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{3} & \mu_6=-\tau_6+\dfrac{\tau_4+\tau_5+\tau_6}{3} & \mu_9=2\varepsilon+\frac{1}{3}(\tau_4+\tau_5+\tau_6) \end{array}$$

puis $\alpha, \alpha', \ldots\in\{1, 2, 3\}$ $\beta, \beta', \ldots\in\{4, 5, 6\}$ $\gamma, \gamma', \ldots\in\{7, 8, 9\}$, on peut écrire ainsi les racines de $E_6$

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'}; & \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) & & \end{matrix} \qquad 3A_2 \subset E_6 .$$

$E_6/3A_2$ est cyclique d'ordre 3.

Notons que les racines secondaires $-\tau_i+\varepsilon$, $-\tau_i-2\varepsilon$, $\tau_i+\tau_j+\varepsilon$ deviennent:

$$\mu_\beta - \mu_\gamma; \quad \mu_\gamma - \mu_\alpha; \quad \mu_\alpha - \mu_\beta .$$

Par suppression de $\varphi_6$, on obtient une suite fondamentale de $A_5+A_1 \subset E_6$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \qquad -3\varepsilon .$$

D'où les racines secondaires de $A_5+A_1$:

$$\mu_i = \tau_i + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \quad \mu_7 = 3\varepsilon/2, \quad \mu_8 = -3\varepsilon/2 .$$

Posant $\alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, \ldots, 6\}$; $\beta, \beta', \ldots \in \{7, 8\}$ on écrit les racines de $E_6$:

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} + \mu_{\alpha''} + \mu_\beta & \end{matrix} \qquad A_5 + A_1 \subset E_6 .$$

$E_6/(A_5+A_1)$ est cyclique d'ordre 2.

Algèbre $E_7$: Les racines sont $\tau_i-\tau_j$, $\tau_i+\tau_j+\tau_k+\tau_m$ où $i, j, k, m$ sont distincts, arbitraires dans $\{1, \ldots, 8\}$ avec $\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_8=0$. On peut poser

$$\begin{matrix} \varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 & \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 & \varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4 & \varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \\ \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 & \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 & \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 . & \end{matrix}$$

La racine dominante est ici:

$$\omega = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 3\varphi_5 + 2\varphi_6 + 2\varphi_7 = \tau_7 - \tau_8 .$$

Dans la figure $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_7, -\omega$, on peut procéder par suppression de divers éléments.

$A_7 \subset E_7$ est obtenue par suppression de $\varphi_7$, d'où la suite simple

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \ldots, \quad -\tau_7 + \tau_8 .$$

Les racines de $E_7$ correspondant à $A_7 \subset E_7$ sont ici précisément les expressions déjà données

$$\begin{matrix} \tau_i - \tau_j & i \neq j;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\} \\ \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m & i, j, k, m \text{ distincts} \in \{1, 2, \ldots, 8\} \end{matrix}$$

les racines secondaires sont les $\pm(\tau_i+\tau_j)$.

$E_7/A_7$ est cyclique d'ordre 2.

Par suppression de $\varphi_3$, on obtient:

$$A_2 + A_5 \subset E_7$$

$$\varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 \qquad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 \qquad \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$

$$\varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \qquad \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 \qquad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 \qquad -\omega = -\tau_7 + \tau_8$$

d'où:

$$\mu_1 = -\tau_1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \qquad \mu_2 = -\tau_2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_3 = -\tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \qquad \mu_4 = -2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_5 = \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \qquad \mu_6 = \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_7 = \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \qquad \mu_8 = \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_9 = \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

Si $\alpha, \alpha', \ldots, \in \{1, 2, 3\}$, $\beta, \beta', \ldots, \in \{4, 5, \ldots, 9\}$,
les racines de $E_7$ s'écrivent

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, & \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & \end{matrix} \qquad A_2 + A_5 \subset E_7.$$

$E_7/(A_2+A_5)$ est cyclique d'ordre 3.

Par suppression de $\varphi_2$, on obtient un $A_1+D_6$, qui fournit $A_1+2A_3$ et un $7A_1$

$$A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

La suite fondamentale est

$$-\tau_1 + \tau_2; \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_4 + \tau_5, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4;$$

$$\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_6 + \tau_7, \quad -\tau_7 + \tau_8$$

d'où les racines secondaires de $A_1+2A_3$:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2$$

$$\mu_3 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_4 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_5 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_6 = -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - 3(\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_7 = (\tau_1 + \tau_2)/4 - (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 \qquad \mu_8 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_6$$

$$\mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_7 \qquad \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_8.$$

Les racines de $E_7$ s'écrivent alors, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2,\}; \ \beta, \beta' \in \{3, 4, 5, 6\}; \qquad \gamma, \gamma' \in \{7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{matrix} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, & \mu_\beta - \mu_{\beta'}, & \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) & & \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} & & \end{matrix} \qquad A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

La loi $E_7/(A_1+2A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$$

$7A_1 \subset E_7$ La suite fondamentale est

$$-\tau_1+\tau_2,\quad -\tau_3+\tau_4,\quad -\tau_5+\tau_6,\quad -\tau_7+\tau_8;$$
$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4,\quad \tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6,\quad \tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6$$

d'où les racines secondaires de $7A_1$:

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = \tau_1 - (\tau_1+\tau_2)/2 & \mu_2 = \tau_2 - (\tau_1+\tau_2)/2 \\
\mu_3 = \tau_3 - (\tau_3+\tau_4)/2 & \mu_4 = \tau_4 - (\tau_3+\tau_4)/2 \\
\mu_5 = \tau_5 - (\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_6 = \tau_6 - (\tau_5+\tau_6)/2 \\
\mu_7 = \tau_7 - (\tau_7+\tau_8)/2 & \mu_8 = \tau_8 - (\tau_7+\tau_8)/2 \\
\mu_9 = (\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)/2 & \mu_{10} = -(\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)/2 \\
\mu_{11} = (\tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_{12} = -(\tau_1+\tau_2+\tau_5+\tau_6)/2 \\
\mu_{13} = (\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6)/2 & \mu_{14} = -(\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6)/2
\end{array}$$

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\};\quad \beta, \beta' \in \{3, 4\};\quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\};\quad \delta, \delta' \in \{7, 8\}$$
$$\varepsilon, \varepsilon' \in \{9, 10\};\quad \tau, \tau' \in \{11, 12\};\quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}.$$

Les racines de $E_7$ prennent la forme

$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'};\quad \mu_\beta - \mu_{\beta'};\quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'};\quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} & 7A_1 \subset E_7. \\
\mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'};\quad \mu_\tau - \mu_{\tau'};\quad \mu_\nu - \mu_{\nu'} & \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta & \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu & \\
\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu & \\
\mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\tau & \\
\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\tau & \\
\mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\tau + \mu_\nu & \\
\mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\nu &
\end{array}$$

$E_7/7A_1$ est un groupe, produit direct des trois sous-groupes

$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta\}$$
$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu\}$$
$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu\}.$$

ALGÈBRE $E_8$: On prend $\tau_1, \ldots, \tau_9$ dans $R^8$ avec $\sum \tau_i = 0$;

Les racines sont:

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k) \qquad i, j, k \text{ distincts}$$
$$i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 9\}.$$

Une suite fondamentale est

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1 = \tau_2 - \tau_3 & \varphi_4 = \tau_5 - \tau_6 & \varphi_7 = \tau_8 - \tau_9 \\
\varphi_2 = \tau_3 - \tau_4 & \varphi_5 = \tau_6 - \tau_7 & \varphi_8 = \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \\
\varphi_3 = \tau_4 - \tau_5 & \varphi_6 = \tau_7 - \tau_8 &
\end{array}$$

avec la racine dominante:

$$= 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 + 5\varphi_4 + 6\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_7 + 3\varphi_8 = -\tau_1 + \tau_2$$

d'où la figure initiale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6,$$
$$\tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9.$$

En appliquant le processus connu, on obtient les sous-systèmes simplifiés $\Lambda_0$ et les $\Lambda/\Lambda_0$. On constate que deux sous-systèmes $\Lambda_0$ de même type sont conjugués.

$2A_1 + 2A_3 \subset E_8$

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 & \mu_3 = (\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\
\mu_2 = (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 & \mu_4 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\
\mu_5 = \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_9 = (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 + 3\tau_9/4 \\
\mu_6 = \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{10} = \tau_6 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\
\mu_7 = \tau_3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{11} = \tau_7 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\
\mu_8 = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 + 3\tau_9/4 & \mu_{12} = \tau_8 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4.
\end{array}$$

Posons

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma', \ldots, \in \{5, 6, 7, 8\}$$
$$\delta, \delta', \ldots, \in \{9, 10, 11, 12\}.$$

Les racines de $E_8$ s'écrivent alors:

$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} & \text{racines de } \Lambda_0. \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} & \pm(\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta) \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_{\delta'} & \pm(\mu_\beta + \mu_\gamma - \mu_\delta) \\
\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'} &
\end{array}$$

$E_8/(2A_1+2A_3)$ a huit classes qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes:

$$\{A_0, (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta), \quad (\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'}), \quad (-\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta)\}$$
$$\{A_0, (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})\}.$$

Le premier est cyclique d'ordre 4.

$A_1 + A_2 + A_5 \subset E_8$

La suite fondamentale:

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9;$$
$$\tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

conduit aux expressions:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_3 = (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_8 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 \qquad \mu_4 = (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_9 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_5 = -2(\tau_1 + \tau_2)/3 - (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_6 = (\tau_1 + \tau_2)/6 + \tau_3 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_6 + (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_7 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_4 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_7 + (\tau_8 + \tau_9)/3$$
$$\mu_8 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_5 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \qquad \mu_{11} = (\tau_1 + \tau_2)/2 - 2(\tau_8 + \tau_9)/3.$$

Avec $\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}$; $\beta, \beta', \dots, \in \{3, 4, 5\}$; $\gamma, \gamma', \dots, \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ les racines de $E_8$ sont:

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } A_0.$$
$$\pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma)$$
$$\pm(-\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})$$
$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''}$$

$E_8/(A_1+A_2+A_5)$ est cyclique d'ordre 6, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma.$$

$A_1 + A_7 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9$$

conduit à:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 \qquad \mu_3 = \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 \qquad \mu_4 = \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_5 = \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_8 = \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_6 = \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_9 = \tau_9 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$
$$\mu_7 = \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \qquad \mu_{10} = -3(\tau_1 + \tau_2)/4$$

On pose:

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \qquad \gamma, \gamma', \ldots, \in \{3, 4, \ldots, 10\}.$$

Les racines de $E_8$ s'écrivent alors:

$$\begin{array}{ll} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} & \text{racines de } \Lambda_0. \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) & \\ \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} + \mu_{\gamma'''} & \end{array}$$

$E_8/(A_1 + A_7)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\gamma.$$

$4A_2 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6;$$
$$\tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

donne

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_1 & \mu_4 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_4 \\ \mu_2 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_2 & \mu_5 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_5 \\ \mu_3 = -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_3 & \mu_6 = -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_6 \\ \mu_7 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_7 & \mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 - (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 \\ \mu_8 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_8 & \mu_{11} = (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_9 = -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_9 & \mu_{12} = (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 - (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3. \end{array}$$

Avec

$$\begin{array}{ll} \alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, 3\}; & \beta, \beta', \ldots \in \{4, 5, 6\} \\ \gamma, \gamma', \ldots \in \{7, 8, 9\}; & \delta, \delta', \ldots \in \{10, 11, 12\}. \end{array}$$

Les racines de $E_8$ s'écrivent:

$$\begin{array}{ll} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} & \text{racines de } \Lambda_0 \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) & \\ \pm(\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta) & 4A_2 \subset E_8. \\ \pm(\mu_\alpha - \mu_\beta + \mu_\delta) & \\ \pm(\mu_\beta - \mu_\gamma + \mu_\delta) & \end{array}$$

$E_8/4A_2$ est un groupe d'ordre 9, produit direct des sous-groupes (cycliques d'ordre 3)

$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma, -\mu_\alpha - \mu_\beta - \mu_\gamma\}$$
$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta, -\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta\}.$$

$2A_4 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit à

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = \tau_1 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_6 = -3(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 \\
\mu_2 = \tau_2 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_7 = 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_6 \\
\mu_3 = \tau_3 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_8 = 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_7 \\
\mu_4 = \tau_4 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_9 = 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_8 \\
\mu_5 = \tau_5 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_{10} = 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_9 \\
\alpha, \alpha', \ldots \in \{1, 2, \ldots, 5\}; & \beta, \beta', \ldots \in \{6, 7, \ldots, 10\}
\end{array}$$

et les racines de $E_8$ sont

$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} & \text{racines de } \Lambda_0 \\
\pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & 2A_4 \subset E_8 . \\
\pm(\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta) &
\end{array}$$

$E_8/2A_4$ est un groupe cyclique d'ordre 5.

$A_8 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \ldots, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit aux expressions connues:

$$\begin{array}{ll}
\tau_i - \tau_j & \text{racines de } \Lambda_0 . \\
\pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k) &
\end{array}$$

$E_8/A_8$ est un groupe cyclique d'ordre 3.

$8A_1 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9; \quad \tau_3 - \tau_4; \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_9;$$
$$\tau_5 - \tau_6; \quad \tau_5 + \tau_6 + \tau_9; \quad \tau_7 - \tau_8; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

conduit aux expressions

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 = \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\
\mu_2 = \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 = \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\
\mu_5 = \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_7 = \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\
\mu_6 = \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_8 = \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\
\mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{11} = (\tau_3 + \tau_4)/2 + (\tau_9)/2 \\
\mu_{10} = -(\tau_1 + \tau_2)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{12} = -(\tau_3 + \tau_4)/2 - (\tau_9)/2 \\
\mu_{13} = (\tau_5 + \tau_6)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{15} = (\tau_7 + \tau_8)/2 + (\tau_9)/2 \\
\mu_{14} = -(\tau_5 + \tau_6)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{16} = -(\tau_7 + \tau_8)/2 - (\tau_9)/2 .
\end{array}$$

Les racines de $E_8$ s'écrivent, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\}$$
$$\lambda, \lambda' \in \{9, 10\}; \quad \mu, \mu' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}; \quad \varrho, \varrho' \in \{15, 16\}$$
$$\mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'} \quad \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \varrho\} \ \varepsilon' = -\varepsilon$$
$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho & \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\nu & \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\varrho \\
\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\mu & \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\lambda & \mu_\alpha + \mu_\mu + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\mu & \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\nu & \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\mu + \mu_\varrho \\
\mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\varrho & \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\mu + \mu_\nu
\end{array}$$
$$8A_1 \subset E_8 .$$

$E_8/8A_1$ n'est pas un groupe, car

$$(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho) + (\mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu)$$

n'est pas définie.

### 6.3.5 Systèmes minimaux de rang maximal des systèmes simples $B_l$, $C_l$, $F_4$

Algèbre $B_l$: Si $\pm\tau_i$, $\pm\tau_i \pm \tau_j$ sont les racines de $B_l$, on a des sous-algèbres semi-simples minimales de rang $l$ de deux types:

a) $(k, k')$ solution de $3k+2k'=l$

b) $(k, k')$ solution de $3k+2k'=l-1$.

*Dans le premier cas*, on a un sous-système $kA_3+k'2A_1=kD_3+k'D_2$, comme en 6.3.4 pour $D_l$;
les racines secondaires sont:

$$\begin{array}{ll}
\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
\quad p = 1, 2, \ldots, k & \quad q' = 1, 2, \ldots, k' .
\end{array}$$

*Les racines de $B_l$ s'écrivent:*

$\mu_{pi} - \mu_{pj}$; $\mu_{q'i} - \mu_{q'j}$ — racines de $kD_3 + k'D_2$

$i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ $i, j \in \{1, 2\}$ ou $i, j \in \{3, 4\}$

$\mu_{pi} + \mu_{pj}$ $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ — type $\pm\tau_{p1}$, $\pm\tau_{p2}$, $\pm\tau_{p3}$

$p = 1, 2, \ldots, k$

$\mu_{q'i} + \mu_{q'j} \quad i \neq j$ type $\pm \tau_{q'1}, \pm \tau_{q'2}$

$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} \quad i \neq j, \; m \neq n$ type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{rj}$

$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$ type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{r'j}$

$\mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$ type $\pm \tau_{q'i} \pm \tau_{r'j}$.

On a la classe $\Lambda_0$ et $k+k'$ classes génératrices

$$\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \quad \Lambda_{k+1}, \dots, \Lambda_{k+k'} \qquad \Lambda_p = \{\mu_{pi} + \mu_{pj}\}, \qquad \Lambda_{q'} = \{\mu_{q'i} + \mu_{q'j}\}$$

Dans le deuxième cas, on a un sous-système

$k D_3 + k' D_2 + B_1$, avec les racines secondaires:

$$\begin{array}{lll}
\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''1} = \tau_l/2 \\
\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''2} = -\tau_l/2 \\
\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \\
\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 &
\end{array}$$

Les racines de $B_l$ sont

$$\begin{array}{lll}
\mu_{pi} - \mu_{pj}; & \mu_{q'i} - \mu_{q'j}; & \mu_{r''1} - \mu_{r''2} = \pm 2\mu_{r''1} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj}; & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} & \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + 2\mu_{r''m} & \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + 2\mu_{r''m} & &
\end{array}$$

ALGÈBRE $C_l$: Il y a un seul sous-système semi-simple minimal de rang $l$: $lA_1 \subset C_l$. Les racines étant:

$$\pm 2\tau_i, \qquad \pm \tau_i \pm \tau_j$$

on prend $2l$ vecteurs:

$$\mu_1, \mu_2; \mu_3, \mu_4; \dots; \mu_{2l-1}, \mu_{2l} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \mu_{2p-1} = \tau_p \\ \mu_{2p} \quad = -\tau_p. \end{array}$$

Les racines de $C_l$ sont les

$$\begin{array}{lll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'} & \alpha, \alpha' \in \{2p-1, 2p\} & \text{racines de } \Lambda_0. \\
\mu_\alpha + \mu_\beta & &
\end{array}$$

ALGÈBRE $F_4$: Les racines étant: $\pm\tau_i, \pm\tau_i\pm\tau_j; \frac{1}{2}(\pm\tau_1\pm\tau_2\pm\tau_3\pm\tau_4)$ où $i\neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a une suite fondamentale complétée

$$\tau_1, \quad \tfrac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4), \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4.$$

On en déduit

$$4A_1 \subset F_4$$

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad +\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad \tau_3 + \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $4A_1$:

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 = \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_2 = -(\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 = \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_5 = (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_7 = \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_6 = -(\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_8 = \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2. \end{array}$$

Les racines de $F_4$ s'écrivent alors:

$$\begin{array}{l} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\beta + \mu_\gamma, \quad \mu_\alpha + \mu_\gamma \\ \mu_\beta + \mu_\delta, \quad \mu_\alpha + \mu_\delta, \quad \mu_\gamma + \mu_\delta \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta. \end{array}$$

Il y a 8 classes, toutes d'ordre 2 (sauf la classe nulle $\Lambda_0$), qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes

$$\{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta\}, \quad \{\Lambda_0, \mu_\gamma + \mu_\delta\}, \quad \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma\}.$$

$A_1 + A_3 \subset F_4$

La suite fondamentale est:

$$\frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}; \quad \tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $A_1 + A_3$:

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = (\tau_1 + \tau_4)/4 - (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_4 = -\tau_2 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_2 = -(\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_5 = -\tau_3 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_3 = \tau_1 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_6 = \tau_4 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4. \end{array}$$

Les racines de $F_4$ s'écrivent:

$$\begin{array}{l} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \qquad \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, \dots, 6\}. \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta) \\ \left\{\begin{array}{l} 2\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'} \\ \qquad \mu_\beta + \mu_{\beta'} \end{array}\right. \end{array}$$

$F_4/(A_1 + A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur $\mu_\alpha + \mu_\beta$.

$2A_2 \subset F_4$

La suite fondamentale est:

$$\tau_1, \quad \frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $2A_2$:

$$\mu_1 = \tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_4 = (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_2 - \tau_4/3$$
$$\mu_2 = -\tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_5 = (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_3 - \tau_4/3$$
$$\mu_3 = 2\tau_4/6 - 2(\tau_2 + \tau_3)/6 \qquad \mu_6 = (\tau_2 + \tau_3)/3 + 2\tau_4/3.$$

Les racines de $F_4$ ont pour expressions:

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \qquad \text{racines de } A_0$$
$$\mu_\alpha + \mu_\beta \qquad \alpha, \alpha' = 1, 2, 3$$
$$\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta \qquad \beta, \beta' = 4, 5, 6.$$

$F_4/2A_2$ est un groupe cyclique d'ordre 3.

6.3.6 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG 2 DANS $G_2$

Les racines sont: $\pm\tau_i$, $\tau_i - \tau_j$, avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Une suite fondamentale complétée est:

$$\tau_1, \quad -\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3 \quad \text{dont on tire}$$
$$-\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_1 + \tau_2 : A_2 \subset G_2$$

avec les racines secondaires:

$$\mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = \tau_2, \quad \mu_3 = \tau_3.$$

Les racines de $G_2$ sont ici:

$$\mu_i - \mu_j \quad \text{et} \quad \pm\mu_i$$

$G_2/A_2$ est cyclique d'ordre 3.

On obtient aussi:

$$-\tau_2 + \tau_3, \tau_1 \qquad A_1 + A_1 \subset G_2$$

d'où les racines secondaires

$$\mu_1 = \tau_2 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_3 = \tau_1/2 \quad \mu_2 = \tau_3 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_4 = -\tau_1/2$$

et les racines de $G_2$

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}$$
$$\mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\alpha + 3\mu_\beta$$

$G_2/2A_1$ est cyclique d'ordre 2.

## § 7. Decomposition d'algèbres de Lie semi-simples

7.1 *Sous-algèbre* $\mathfrak{g}_0$ *associée à un sous-système fermé* $A$

Soients

$\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps $\mathbf{K}$(§ 1)

$\Lambda$ le système des racines de $\mathfrak{g}$ sur une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, avec
$\Lambda' = \Lambda - \{0\}$,
$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\Lambda'\alpha \in} \mathbf{K} e_\alpha$

la décomposition de Cartan associée à $\mathfrak{h}$,
$\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$:

1) $$\Lambda_0 = - \Lambda_0; \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

et

2) $$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha$$

le sous-espace de $\mathfrak{g}$ associé à $\Lambda_0$. Les relations 1) impliquent que $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre réductive dont le centre est

$$\mathfrak{C} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Lambda'_0\}$$

Ainsi ad $h$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
$x \mapsto [h, x]$
où $h \in \mathfrak{G}$, est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$. Cela signifie que $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}_0$-module complètement réductible.

Par ailleurs, lorsque $\Lambda_0$ est de rang maximum $l$, $\mathfrak{G} = \{0\}$, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ est semi-simple.

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'étudier *l'insertion* de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$.

7.2 *Somme directe associée à une partition de $\Lambda$ mod $\Lambda_0$*

Soit $\Lambda_0$ un sous-système fermé de $\Lambda$, et

3) $$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

la partition de $\Lambda$ en classes mod $\Lambda_0$ (§ 2). On a

4) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$$

où $\mathfrak{g}_0$ est donné par 2) et où

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geqslant 1).$$

Le but de ce paragraphe 7 est l'étude des propriétés de la somme directe 4) associée à 3).

Je pose

$$\Lambda_0 = \{0, \pm \mu_{0\,1}, \ldots, \pm \mu_{0\,n_0}\}$$
$$\Lambda_i = \{\mu_{i\,1}, \ldots, \mu_{i\,n_i}\} \quad (i \geqslant 1).$$

De plus, je vais désigner par $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $[g_i, g_j]$, où $g_i, g_j$ décrivent $\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j$ respectivement.
$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ est engendré par les $[e_{\mu_{i\,m}}, e_{\mu_{j\,m'}}]$ si $i\geqslant 1, j\geqslant 1$.

PROPOSITION 7.1: *Les sous-espaces $\mathfrak{g}_i$ $(i\geqslant 1)$ sont des $\mathfrak{g}_0$ modules irréductibles et* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_i$

$$(\Lambda_0+\Lambda_i)\cap\Lambda\subset\Lambda_i \quad \text{implique}$$
$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i$$

ce qui prouve que $\mathfrak{g}_i$ est un $\mathfrak{g}_0$-module. Maintenant:

LEMME 7.1: *Tout sous-espace $H\subset\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$ stable pour* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ *est de la forme* $\sum ke_\alpha$, où $\alpha\in L\subset\Lambda'$.

Deux racines distinctes $\alpha$, $\beta\in\Lambda'$ étant données, on peut trouver $z\in\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(z)=1$, $\beta(z)=0$. Soit alors

$$x=k_\alpha e_\alpha+k_{\alpha'}e_{\alpha'}+\cdots+k_{\alpha\,(p)}e_{\alpha\,(p)}\in H$$
$$k_\alpha k_{\alpha'}\cdots k_{\alpha\,(p)}\neq 0.$$

On prend un $z\in\mathfrak{h}$ associé à $\beta=\alpha'$, d'où

$$x'=k_\alpha e_\alpha+k_{\alpha''}e_{\alpha''}+\cdots+k_{\alpha\,(p)}e_{\alpha\,(p)}\in H$$

etc. On obtient finalement $k_\alpha e_\alpha\in H$, d'où $Ke_\alpha\subset H$, et le lemme est établi.

Soit maintenant $H$ un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial, avec $H\subset\mathfrak{g}_i$. D'après $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_0$ et le lemme 7.1, on a

$$H=Ke_{\mu_{i\,1}}\oplus\cdots\oplus Ke_{\mu_{i\,v_i}} \qquad v_i\leqslant n_i$$

avec de bonnes notations. Comme $\Lambda_i$ est $\Lambda_0$-connexe, on a nécessairement $e_{\mu_{i\,t}}\in H$, $\forall t\in\{1,\dots,n_i\}$, ce qui implique $H=\mathfrak{g}_i$.

Les $\mathfrak{g}_0$-modules $\mathfrak{g}_1,\dots,\mathfrak{g}_s$ sont bien irréductibles.

On peut encore écrire:

$$[\mathfrak{g}_0[\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_i]]\subseteq[[\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_0]\mathfrak{g}_i]+[\mathfrak{g}_0[\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_i]]$$
$$\subseteq[\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i$$

et $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]$ est un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial dans $\mathfrak{g}_i$ qui est irréductible. Alors:

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_i.$$

PROPOSITION 7.2: *Soient $i,j\geqslant 1$: on a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]=0$ ou bien il existe $k\in\{0, 1,\dots, s\}$ tels que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_k$; lorsque $k\neq 0$, on a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]=\mathfrak{g}_k$.*

Si

$$(\Lambda_i+\Lambda_j)\cap\Lambda=\emptyset,\ \text{on a}\ [e_{\mu_{i\,m}}, e_{\mu_{j\,m'}}]=0, \quad \forall m, m' \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]=0.$$

Supposons $(\Lambda_i+\Lambda_j)\cap\Lambda\neq\emptyset$; il existe $k$ avec $(\Lambda_i+\Lambda_j)\cap\Lambda\subset\Lambda_k$, d'où $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_k$.

Or

$$[\mathfrak{g}_0[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]] \subseteq [[\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i] \mathfrak{g}_j] + [\mathfrak{g}_j[\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_j]] \subseteq [\mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j].$$

Ainsi $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$ est un $\mathfrak{g}_0$-module non trivial, contenu dans $\mathfrak{g}_k$. Si $k \neq 0$, $\mathfrak{g}_k$ est irréductible, et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$.

PROPOSITION 7.3: *Pour tout* $i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$ *il existe* $i' \in I$ *tel que* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$.

Soit $\Lambda_i$; il existe $i'$ tel que $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ (§ 3) ce qui entraine $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$. Il faut noter que le cas $i = i'$ n'est pas exclu.

Il convient de rassembler les résultats du présent numéro:

THÉORÈME 7.1: *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple sur le corps* $\mathbf{K}$ (§ 1), $\Lambda$ *le système des racines de* $\mathfrak{g}$ *sur une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$,

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

*la partition de* $\Lambda$ *en classes* mod $\Lambda_0$ *où* $\Lambda_0$ *est un sous-système fermé, et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

*la somme directe associée, où*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha \qquad \mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geqslant 1).$$

*Alors* $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$ *sont des* $\mathfrak{g}_0$*-modules irréductibles dans* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}_0$ *et*

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0 \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i \quad (i \geqslant 1);$$

*si* $i, j \geqslant 1$: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ *ou bien il existe* $k$ *tel que* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_k$ *avec* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$ *si* $k \neq 0$; *enfin* $\forall i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$, $\exists i' \in I$ *avec* $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subseteq \mathfrak{g}_0$. En bref, la somme directe $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$ vérifie $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_k \; \forall i, j$; je dirai que cette somme directe est la décomposition associée au sous-système fermé $\Lambda_0$. Elle fournit un produit de $\mathfrak{g}_0$-modules irréductibles régi par la loi $\Lambda/\Lambda_0$. Les résultats des paragraphes 5 et 6 peuvent en particulier être utilisés. On peut considérer $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$ comme une graduation de $g$ par le groupe local $\Lambda/\Lambda_0$.

### 7.3 *Sur-algèbre réductive de* $\mathfrak{g}_0$ *dans* $\mathfrak{g}$

Soient

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de $\Lambda$ modulo un sous-système fermé $\Lambda_0$;

$$Q = \{0, i_1, \dots, i_q\}, \quad S = \{0, 1, 2, \dots, s\} \quad Q \subset S,$$
$$\Lambda_Q = \Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \dots \cup \Lambda_{i_q}.$$

On a sans difficulté la

Proposition 7.4: *Pour que $\Lambda_Q$ soit un sous-système fermé de $\Lambda$, il faut et il suffit que*

1) $(\forall i, j \in Q)(\exists k \in Q)(\Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$ si $\Lambda_i + \Lambda_j \neq \emptyset$
2) $(\forall i \in Q)(\exists i' \in Q)(\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$

Alors, avec les notations connues $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q}$, où est $\Lambda_Q$ fermé dans $\Lambda$, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_0$; on a une sur-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, et, de cette manière on les obtient toutes:

Proposition 7.5: Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$ *la décomposition de l'algèbre semi-simple* $\mathfrak{g}$ *associée à la partition*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

*du système $\Lambda$ modulo un sous-système fermé $\Lambda_0$.*

Pour que

$$\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_q} \quad (Q = \{0, i_1, \ldots, i_q\})$$

*soit une sur-algèbre réductive de* $\mathfrak{g}_0$ *dans* $\mathfrak{g}$, *il faut et il suffit que*

$$(\forall i, j \in Q)(\Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \text{ ou } \exists\, k \in Q\colon \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$$

*et que* $(\forall i \in Q)(\exists i' \in Q)(\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$.

Les sur-algèbres réductives de $\mathfrak{g}_0$ correspondent aux systèmes $\Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_q}$ identiques à leurs opposés et stables pour l'addition.

### 7.4 *Sous-algèbres* $\mathfrak{g}_0$ *maximales*

Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_0$ sont maximales dans $\mathfrak{g}$ si elles n'admettent aucune sur-algèbre distincte de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}$; il s'agit ici uniquement d'algèbres réductives.

Considérons $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ et soit $\Lambda_1$ une classe arbitraire distincte de $\Lambda_0$; dans $\Lambda/\Lambda_0$ elle engendre un système de l'un des types suivants:

a) $$\Lambda^* = \{-p\Lambda_1, \ldots, -\Lambda_1, \Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \emptyset$

b) $$\Lambda^* = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$.

Pour que $\mathfrak{g}_0$ soit maximale, il est nécessaire que $\Lambda^* = \Lambda$, c'est à dire que $\Lambda/\Lambda_0$ soit monothétique, au sens a) ou au sens b).

De plus, dans le cas a) $-p\Lambda_1$, $\Lambda_0$, $p\Lambda_1$ détermine une sur-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$; on a nécessairement: $p=1$.

Dans le cas b), les classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, p\Lambda_1$ forment un groupe cyclique d'ordre $p+1$ et pour que $\mathfrak{g}_0$ soit maximale (réductive) il est nécessaire que $p+1$ soit premier. Ces conditions sont aussi suffisantes. D'où

**Proposition** 7.6: *Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$ la décomposition de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ associée à la partition $\Lambda=\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\cdots\cup\Lambda_s$ du système $\Lambda$ des racines de $\mathfrak{g}$ modulo le sous-système fermé $\Lambda_0$ de $\Lambda$.*

*Pour que $\mathfrak{g}_0$ soit réductive maximale dans $\mathfrak{g}$ il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée.*

a) $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_{1'}$, $2\Lambda_1 = \emptyset$

b) $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p$, $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$, $p+1$ premier.

cf. ([1]), théorème 6.

## 7.5 *Sur-algèbres réductives d'une algèbre $\mathfrak{g}_0$ semi-simple*

Lorsque le sous-système fermé $\Lambda_0$ est de rang maximal, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ correspondante est semi-simple; alors $\mathfrak{g}$ se présente comme extension d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}_0$ par «un groupe local» $\Lambda/\Lambda_0$. On a vu, dans le cas des algèbres simples exceptionnelles, que $\Lambda/\Lambda_0$ est toujours un groupe, avec une seule exception: $E_8/8A_1$.

Par exemple:

| | |
|---|---|
| $E_6$ | est extension de $3A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3. |
| $E_7$ | est extension de $A_2+A_5$ par un groupe cyclique d'ordre 3. |
| $E_8$ | est extension de $2A_4$ par un groupe cyclique d'ordre 5. |
| $F_4$ | est extension de $2A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3. |
| $G_2$ | est extension de $A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3. |
| $D_{2m}$, $B_{2m}C_l$ | sont extension de $lA_1$ par des groupes locaux à éléments d'ordre 2. ($l=2m$). |
| $B_l=B_{2m+1}$ | est extension de $B_1+(l-1)A_1$. |
| $D_l=D_{2m+1}$ | est extension de $A_3+2(m-1)A_1$. |

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Borel et J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv., *23* (1949), 200–221.

[2] Dynkin, E. B., *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, Mat. Sbornik. N.S. *30* (72) (1952), 349–462. Amer. Math. Soc. Translations (Série 2, *6*, p. 111–244).

[3] Jacobson, N., *Lie algebras* (Interscience Publishers, New York, London 1962).

[4] Tits, J., *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen* (Springer-Verlag, 1967 [Lecture Notes in Mathematics]).



L'aide du *Fonds National Suisse de la recherche scientifique* a rendu possible le présent travail (contrat no 2326).

Reçu le 12 juillet 1967.