Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Das Geschlecht des vollständigen dreifärbbaren Graphen.
Autor: Ringel, Gerhard / Youngs, J.W.T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34649

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das Geschlecht des vollständigen dreifärbbaren Graphen

GERHARD RINGEL und J. W. T. YOUNGS

Das Geschlecht $\gamma(G)$ eines Graphen G ist nach Definition das kleinstmögliche Geschlecht einer geschlossenen orientierbaren Fläche, in die sich der Graph G ohne Überschneidung der Kanten einbetten läßt. Dieser Begriff stammt bereits von Frobenius. 1930 hat Kuratowski [1] alle Graphen vom Geschlechte 0 charakterisiert. Das Geschlecht des n-dimensionalen Würfelgraphen [2] und des vollständigen paaren Graphen [3] wurde explizite bestimmt. Kürzlich gelang auch die Bestimmung des Geschlechtes des vollständigen Graphen mit n Knotenpunkten [4]. Dies führte dann unmittelbar zur Lösung des Karten-Färbungsproblems auf orientierbaren Flächen beliebigen Geschlechts >0.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Geschlecht des Graphen $K_{p,q,r}$, der wie folgt definiert sei. Die Menge der Knotenpunkte sei in drei Klassen P, Q, R eingeteilt; die Anzahl der Knotenpunkte in P sei $|P|=p$; entsprechend sei $|Q|=q$ und $|R|=r$. Je zwei Knotenpunkte, die in verschiedenen Klassen liegen, seien durch eine Kante verbunden; sonst sollen keine Kanten vorkommen. Somit besitzt der Graph $K_{p,q,r}$ genau $p+q+r$ Knotenpunkte und $pq+pr+qr$ Kanten.

Wir werden beweisen, daß

$$\gamma(K_{p,q,r}) \geqq \left\{\frac{(p-2)(q+r-2)}{4}\right\} \quad \text{für} \quad p \geqq q \geqq r \geqq 0 \quad \text{und} \quad q+r \geqq 2 \tag{1}$$

gilt. Hierbei bedeutet $\{a\}$ die kleinste ganze Zahl $\geqq a$.

Es wird vermutet, daß in (1) *stets das Gleichheitszeichen gilt.* In den folgenden Spezialfällen wird dies hier bewiesen bzw. ist dies schon früher gezeigt worden.

a) wenn $p=q=r=n$ ist, heißt $K_{n,n,n}$ der symmetrische vollständige dreifärbbare Graph. Für sein Geschlecht gilt (1) als Gleichung, nämlich

$$\gamma(K_{n,n,n}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geqq 1\,. \tag{2}$$

Der Beweis zu (2) wird in der vorliegenden Arbeit mit Methoden (current graph, Kirchhoffsches Gesetz vgl. [4]) geliefert, die bereits bei der Bestimmung des Geschlechtes des vollständigen Graphen K_n entscheidend waren.

b) Für $r=0$ wird $K_{p,q,r}$ zum vollständigen paaren Graphen $K_{p,q}$ und für diesen ist (1) als Gleichung in [3] bereits bewiesen worden.

c) Es ist

$$\gamma(K_{p,2,2}) \geqq \gamma(K_{p,4}), \tag{3}$$

weil $K_{p,4}$ ein Teilgraph von $K_{p,2,2}$ ist. Die Einbettung E von $K_{p,4}$ in die orientierbare Fläche F_g mit minimalem Geschlecht $g=\gamma(K_{p,4})$ enthält keine Dreiecke, weil $K_{p,4}$ ein paarer Graph ist. Es sei P_0 ein Punkt der einen Klasse P; er ist mit allen vier Knotenpunkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 der anderen Klasse durch je eine Kante verbunden – etwa in dieser zyklischen Reihenfolge.

Es lassen sich in E, sozusagen als Vierecksdiagonalen, die vier neuen Kanten Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_4Q_1 einfügen. Dabei entsteht der Graph $K_{p,2,2}$. Die drei Klassen sind jetzt P, $\{Q_1Q_3\}$, $\{Q_2Q_4\}$. Daher gilt in (3) das Gleichheitszeichen. Aus b) folgt dann

$$\gamma(K_{p,2,2}) = \gamma(K_{p,4}) = \left\{\frac{p-2}{2}\right\} \quad \text{für} \quad p \geqq 2.$$

d) Auf dieselbe Art, nur noch leichter, läßt sich zeigen

$$\gamma(K_{p,3}) \geqq \gamma(K_{p,1,1,1}) \geqq \gamma(K_{p,2,1}) \geqq \gamma(K_{p,3})$$
$$\gamma(K_{p,2}) \geqq \gamma(K_{p,1,1}) \geqq \gamma(K_{p,2}).$$

Somit folgt

$$\gamma(K_{p,1,1,1}) = \gamma(K_{p,2,1}) = \left\{\frac{p-2}{4}\right\} \quad \text{für} \quad p \geqq 2,$$
$$\gamma(K_{p,1,1}) = 0.$$

Weitere Ergebnisse über den vierfärbbaren vollständigen Graphen $K_{p,q,r,s}$ zu erhalten ist schwierig, weil die Menge der Dreiecke schlecht zu überblicken ist. Die Argumentation von § 1 ist jedenfalls nicht anwendbar. Die letzte Gleichung kann man auch wie folgt direkt nachweisen: Man wähle p Punkte auf der x-Achse, und zwar an den Stellen $x=1, 2, \ldots p$; dann den Punkt Q_1 mit den Koordinaten $x=\frac{1}{2}$, $y=1$ und R_1 mit $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$. Dann verbindet man Q_1 und R_1 untereinander und mit den p Punkten auf der x-Achse geradlinig. Dies ist eine Einbettung von $K_{p,1,1}$ in die Ebene, d.h. $\gamma(K_{p,1,1})=0$.

§ 1. Untere Schranke für $\gamma(K_{p,q,r})$

Es sei G ein zusammenhängender Graph und $g=\gamma(G)$ sein Geschlecht. Wir setzen voraus, daß G keine Schlingen und keine Zweiecke enthält, d.h. in G ist kein Knotenpunkt mit sich selbst durch eine Kante verbunden und keine zwei Knotenpunkte sind durch mehr als eine Kante verbunden. Es gibt eine Einbettung des Graphen G in die geschlossene orientierbare Fläche F_g vom Geschlechte g und g ist minimal. Diese hat nach [5] die Eigenschaft, daß jede Zusammenhangskomponente von $F_g - G$ das topologische Bild einer offenen Kreisscheibe ist (2-cell). Es läßt sich daher die Eulersche

Formel $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2-2g$ anwenden. Hierbei ist α_0, α_1 bzw. α_2 die Anzahl der Eckpunkte, Kanten bzw. Flächenstücke der polyedrischen Zerlegung von F_g. Es ist

$$\alpha_2 = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots,$$

wenn wir mit f_i die Anzahl der i-Ecke in der Einbettung bezeichnen. Wenn jedes i-Eck mit genau i Kanten inzidiert, dann inzidiert jede Kante mit genau zwei Elementarflächenstücken und es gilt

$$2\alpha_1 = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots. \tag{4}$$

Diese Formel gilt aber auch, wenn es vorkommt, daß ein i-Eck zu sich selbst benachbart ist etwa längs einer Kante; dann hat man die Kante nur doppelt zu zählen.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die bekannte Formel:

$$6\gamma(G) = \alpha_1 - 3\alpha_0 + 6 + f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \cdots. \tag{5}$$

Eine Kante im Graphen $K_{p,q,r}$ nennen wir eine PQ-Kante, wenn sie einen Knotenpunkt aus der Menge P mit einem aus der Menge Q verbindet. $K_{p,q,r}$ besitzt also nur PQ-Kanten PR-Kanten, QR-Kanten und sonst keine. Wenn P_0 ein Knotenpunkt aus P ist, so ist unter einer P_0Q-Kante eine solche zu verstehen, die P_0 mit einem Knotenpunkt von Q verbindet.

Nun sei eine Einbettung des Graphen $K_{p,q,r}$ in die geschlossene orientierbare Fläche F_g mit $g=\gamma(K_{p,q,r})$ gegeben. F_g wird durch $K_{p,q,r}$ in Elementarflächenstücke zerlegt, also Dreiecke, Vierecke usw. (Ein geschlossener aus drei Kanten bestehender Weg in $K_{p,q,r}$ ist nicht notwendig der Rand eines Dreiecks, d.h. wir verstehen hier unter Dreieck nur „flächenhafte Dreiecke"; auch bei den Vierecken usw.).

Unter einem Q_0-Dreieck verstehen wir ein Dreieck, welches mit dem Knotenpunkt Q_0 inzidiert. Ein Q-Dreieck ist ein Dreieck mit mindestens einem Eckpunkt in Q. Es ist aber klar, daß jedes Dreieck ein Q-Dreieck ist; denn jeder geschlossene aus drei Kanten bestehende Weg in $K_{p,q,r}$ enthält je einen Knotenpunkt aus P, aus Q und aus R. Die Anzahl der Q_0R-Kanten ist r. Jedes Q_0-Dreieck enthält eine Q_0R-Kante. Daher ist die Anzahl der Q_0-Dreiecke höchstens $2r$. Somit ist die Anzahl der Q-Dreiecke höchstens gleich $2qr$. Da aber jedes Dreieck ein Q-Dreieck ist, ist in der vorliegenden Einbettung $f_3 \leqq 2qr$.

Wir wenden (4) auf die nun vorliegende Einbettung von $G=K_{p,q,r}$ an. Hier ist $\alpha_1=pq+pr+qr$, daher folgt aus (4):

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 &\leqq 6qr + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \cdots \\ 2pq + 2pr - 4qr &\leqq 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \cdots \\ 2pq + 2pr - 4qr &\leqq 4f_4 + 8f_5 + 12f_6 + \cdots \\ pq + pr - 2qr &\leqq 2(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \cdots.) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir multiplizieren (5) auf beiden Seiten mit 2 und setzen $\alpha_1 = pq + pr + qr$ und $\alpha_0 = p + q + r$ ein: $12\gamma(K_{p,q,r}) = 2(pq + pr + qr) - 6(p + q + r) + 12 + 2(f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \cdots)$. Mit Hilfe von (6) ergibt sich

$$12\gamma(K_{p,q,r}) \geqq 3pq + 3pr - 6(p + q + r) + 12$$

$$\gamma(K_{p,q,r}) \geqq \frac{(p-2)(q+r-2)}{4}.$$

Damit ist (1) bewiesen, und zwar ohne die Voraussetzung $p \geqq q \geqq r$, so daß man in der Ungleichung (1) die drei Zahlen p, q, r beliebig permutieren kann. Da wir aber erwarten, daß in (1) sogar das Gleichheitszeichen gilt, ist es zweckmäßig, $p = \max(p, q, r)$ vorauszusetzen.

Einen zweiten Beweis zu (1) erhalten wir, wenn wir das Ergebnis der Arbeit [3] unmittelbar anwenden: Lassen wir in $K_{p,q,r}$ alle QR-Kanten weg, so bleibt als ein Teilgraph der Graph $K_{p,q+r}$ übrig. Daher ist $\gamma(K_{p,q,r}) \geqq \gamma(K_{p,q+r})$ und $\gamma(K_{p,q+r})$ ist gleich der rechten Seite der Ungleichung (1), wie in der Arbeit [3] gezeigt wurde.

§ 2. Das Geschlecht von $K_{n,n,n}$

Wir nehmen an, es sei eine Dreieckseinbettung von $K_{n,n,n}$ in eine orientierbare Fläche F_h vom Geschlechte h gegeben; damit meinen wir eine Zerlegung von F_h durch $K_{n,n,n}$ in lauter Dreiecke. Die Formeln von § 1 gelten entsprechend mit $f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \cdots = 0$. Der Formel (5) entspricht die Gleichung

$$6h = \alpha_1 - 3\alpha_0 + 6.$$

Setzen wir $\alpha_0 = 3n$ und $\alpha_1 = 3n^2$, so erhalten wir, h ist gleich der rechten Seite von (2). Aus (1) folgt, daß $\gamma(K_{n,n,n}) \geqq h$. Also ist dann $\gamma(K_{n,n,n}) = h$, womit die Gleichung (2) bewiesen ist.

Es kommt also nur darauf an, eine orientierbare Dreieckseinbettung von $K_{n,n,n}$ zu konstruieren. Dies geschieht nach einer bewährten Methode mit Hilfe eines Schemas; wir erläutern dies zunächst am Fall $n = 4$.

Nehmen wir an, es gibt eine orientierbare Dreieckseinbettung von $K_{4,4,4}$. Man bezeichne die Knotenpunkte von P mit 1, 4, 7, 10, die von Q mit 2, 5, 8, 11 und die von R mit w, x, y, z. Der Knotenpunkt 1 inzidiert mit 8 Kanten, die in der Einbettung aufgrund einer für die ganze Fläche fest gewählten Orientierung in einer bestimmten zyklischen Reihenfolge gegeben sind. Dies liefert eine zyklische Reihenfolge aller mit 1 verbundenen Knotenpunkte, z.B. 2 w 5 x 8 y 11 z. Schreiben wir diese Reihenfolge für jeden Knotenpunkt von $K_{4,4,4}$ auf, so erhalten wir ein Schema, das z.B. so aussehen könnte:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
1. & 2 & w & 5 & x & 8 & y & 11 & z \\
4. & 5 & w & 8 & x & 11 & y & 2 & z \\
7. & 8 & w & 11 & x & 2 & y & 5 & z \\
10. & 11 & w & 2 & x & 5 & y & 8 & z \\
2. & 1 & z & 4 & y & 7 & x & 10 & w \\
5. & 4 & z & 7 & y & 10 & x & 1 & w \\
8. & 7 & z & 10 & y & 1 & x & 4 & w \\
11. & 10 & z & 1 & y & 4 & x & 7 & w \\
w. & 10 & 11 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 \\
x. & 10 & 2 & 7 & 11 & 4 & 8 & 1 & 5 \\
y. & 10 & 5 & 7 & 2 & 4 & 11 & 1 & 8 \\
z. & 10 & 8 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 & 11
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Das Schema (7) würde gewiß schöner aussehen, wenn man anstatt w, x, y, z die Nummern 3, 6, 9, 12 gewählt hätte. Aus zwei Gründen wurde jedoch diese merkwürdige Bezeichnungsweise gewählt. Erstens lassen sich die Beweise besser darstellen und zweitens ordnet sich die Konstruktion so einem schon bei anderen Graphen erprobten Prinzip unmittelbar unter.

Dieses Schema (7) nennen wir ein zu $K_{4,4,4}$ gehöriges Schema, denn genau dann, wenn das Symbol i in der mit k benannten Zeile vorkommt, so ist in $K_{4,4,4}$ der Knotenpunkt i mit dem Knotenpunkt k durch eine Kante verbunden. Wenn wir annehmen, daß das Schema (7) aus einer gegebenen orientierbaren Dreieckseinbettung von $K_{4,4,4}$ wie eben beschrieben wurde, erzeugt worden ist, so gilt in ihm die

REGEL R*. *Wenn in der i-ten Zeile $i \ldots akb \ldots$ steht, so steht in der k-ten Zeile $k \ldots bia \ldots$.*

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß in der gegebenen orientierbaren Einbettung von $K_{4,4,4}$ nur Dreiecke auftreten. Diese Überlegungen gelten natürlich nicht nur für $n=4$.

Es gilt also: *Wenn eine orientierbare Dreieckseinbettung von $K_{n,n,n}$ existiert, so gibt es auch ein zu $K_{n,n,n}$ gehöriges Schema, das der Regel R* genügt.*

Wichtig ist nun, daß dieser Sachverhalt sich auch umkehren läßt: *Wenn ein zu $K_{n,n,n}$ gehöriges Schema mit Regel R* existiert, so gibt es auch eine orientierbare Dreieckseinbettung von $K_{n,n,n}$.* Der Beweis kann etwa aus [6] entnommen werden.

So bleibt uns nur noch zu zeigen, daß ein Schema für $K_{n,n,n}$ mit Regel R^* existiert. Es ist nicht sehr schwierig, eine Verallgemeinerung des Schemas (7) für beliebiges n anzugeben.

Wir wollen ein allgemeines Prinzip, welches schon in anderen Fällen [4] auf bequeme Art Schemata geliefert hat, benutzen. Die Kenntnis dieser in [7] dargestellten Theorie ist hier für den Leser nicht unbedingt erforderlich. Wir betrachten den folgenden gerichteten bewerteten Graphen C:

$$A \xrightarrow{1} \underset{z_1}{\circ} \xrightarrow{4} \underset{z_2}{\circ} \xrightarrow{7} \underset{z_3}{\circ} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{z_{n-1}}{\circ} \xrightarrow{3n-2} \underset{z_n}{\circ} \xrightarrow{1} A$$

Der Buchstabe A soll nur andeuten, daß die linke Kante 1 mit der rechten Kante 1 identisch ist. Der Graph ist also ein Kreis der Länge n mit den Knotenpunkten $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Die Kanten sind alle von links nach rechts gerichtet und sind der Reihe nach mit den Elementen $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$ aus der zyklischen Gruppe Z_{3n} bezeichnet (d.h. es wird bei Addition mod $3n$ gerechnet). Wir konstruieren jetzt zwei formale Zeilen [1] und [2], die zwar im fertigen Schema selbst nicht vorkommen, die aber die $3n$ Zeilen des zu konstruierenden Schemas in einfachster Weise erzeugen.

Den Kreis C kann man in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen. Die Durchlaufung von links nach rechts wird mit [1] bezeichnet und durch alle Bewertungen der Kanten und Knotenpunkte der Reihe nach beschrieben. Das ergibt

$$1 \quad z_1 \quad 4 \quad z_2 \quad 7 \quad z_3 \ldots 3n-2 \quad z_n \qquad [1]$$

Die 1-te, 4-te, 7-te... Zeile des zu konstruierenden Schemas ergibt sich aus [1] durch Addition aller Nummern mit 1, 4, 7 usw., wobei die z_i ungeändert bleiben. Also

$$\left.\begin{array}{l} 1. \quad 2 \quad z_1 \quad 5 \quad z_2 \quad 8 \quad z_3 \ \ldots \\ 4. \quad 5 \quad z_1 \quad 8 \quad z_2 \quad 11 \quad z_3 \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Betrachten wir jetzt die umgekehrte Durchlaufung von C; nämlich von rechts nach links. Hier werden alle Kanten entgegen ihrer Orientierung durchlaufen; daher geben wir jedem Wert der Kante das Vorzeichen. Das ergibt die formale Zeile

$$-1 \quad z_n \quad 2 \quad z_{n-1} \quad 5 \quad z_{n-2} \ \ldots \ -4 \quad z_1 \qquad [2]$$

Die 2-te, 5-te, 8-te... Zeile ergibt sich aus [2] durch Addition aller Nummern mit 2, 5, 8 usw; die z_i bleiben ungeändert:

$$\left.\begin{array}{l} 2. \quad 1 \quad z_n \quad 4 \quad z_{n-1} \quad 7 \quad z_{n-2} \ \ldots \\ 5. \quad 4 \quad z_n \quad 7 \quad z_{n-1} \quad 10 \quad z_{n-2} \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Das Schema ist zwar noch nicht fertig, aber wir können schon beweisen, daß zwischen den Zeilen (8) und (9) die Regel R^* gilt. Es sei in der i-ten Zeile ($i = 1, 4, 7 \ldots$)

$$i. \ \ldots \ z_s \quad k \quad z_{s+1} \ \ldots,$$

so folgt für die formale Zeile [1]. $\ldots z_s \quad k-i \quad z_{s+1} \ldots$, daher steht in der formalen Zeile [2]. $\ldots z_{s+1} \quad i-k \quad z_s \ldots$, somit folgt für die k-te Zeile

$$k. \ \ldots \ z_{s+1} \quad i \quad z_s \ \ldots.$$

Jetzt beachten wir, daß in jedem Knotenpunkt der Wert der auslaufenden Kante minus dem Wert der einlaufenden gleich 3 ist und $(3, 3n)=3$. Die allgemeine Theorie besagt, daß dann das Schema (8), (9) durch eine z_j-te Zeile ($j=1, 2, \ldots n$) komplettiert werden kann allein durch Anwendung von Regel R^*.

In den beiden formalen Zeilen steht [1]. $\ldots 3j-2 \quad z_j \quad 3j+1 \ldots$ und [2]. $-3j-1 \quad z_j \quad 2-3j \ldots$ daher steht in der 1-ten $(3j-1)$-ten und $(32j+)$-ten Zeile

$$\begin{array}{rlrrr}
1. & \ldots & 3j-1 & z_j & 3j+2 \ \ldots \\
3j-1. & \ldots & -2 & z_j & 1 \ \ldots \\
3j+2. & \ldots & 1 & z_j & 4 \ \ldots.
\end{array}$$

Das ergibt durch Anwendung der Regel R^* für die z_j-te Zeile

$$z_j. \ \ldots \ 4 \quad 3j+2 \quad 1 \quad 3j-1 \quad -2 \ \ldots. \tag{10}$$

So fortlaufend erhält man als z_j-te Zeile zwei ineinandergeschobene arithmetische Folgen, beide mit der Differenz -3. Die Zeilen (8), (9), (10) bilden zusammen ein Schema für den Graphen $K_{n,n,n}$, welches der Regel R^* genügt. Also gibt es eine Dreieckseinbettung von $K_{n,n,n}$ in eine orientierbare Fläche, womit (2) bewiesen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Kuratowski, C., *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fundamenta Math. *15* (1930), 271–283.

[2] Ringel, G., *Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *20* (1955), 10–19.

[3] Ringel, G., *Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *28* (1965), 139–150.

[4] Ringel, G. und J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood-Map-Coloring Problem*, Proceedings of the National Academy of Science, *60*, Nr. 2 (1968), 438–445.

[5] Youngs, J. W. T., *Minimal Imbeddings and the Genus of a Graph*, Journal of Mathematics and Mechanics *12* (1963), 303–316.

[6] Ringel, G., *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959), S. 69.

[7] Youngs, J. W. T., *The Heawood Map-Coloring Conjecture* in *Graph Theory and Theoretical Physics* (Academic Press, London and New York 1967), Kap. 12, S. 313–354.

Eingegangen den 30. Mai 1969