Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$

von H.-P. BUTZMANN

Für einen Limesraum X bezeichne $\mathscr{C}_c(X)$ die **R**-Algebra aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz und $P(\mathscr{C}_c(X))$ die Menge aller stetigen Halbnormen auf $\mathscr{C}_c(X)$. Die von $P(\mathscr{C}_c(X))$ auf $\mathscr{C}_c(X)$ induzierte Topologie – die feinste lokalkonvexe Topologie, die gröber ist als die Limitierung der stetigen Konvergenz – heisst die zur Limitierung der stetigen Konvergenz assoziierte lokalkonvexe Topologie. Wir werden im 1. Teil dieser Arbeit zeigen, dass sie mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen zusammenfällt, wenn X zu der Klasse von Limesräumen gehört, die wir nach [1] c-einbettbar nennen.

Für einen Limesvektorraum E bezeichne $\mathscr{L}_c E$ die Menge aller linearen, stetigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und der Raum E soll c-reflexiv heissen, wenn der natürliche Homomorphismus von E in $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_c E$ ein Homöomorphismus ist. Im 2. Teil werden wir die c-Reflexivität von $\mathscr{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X beweisen.

Im 3. Teil werden wir schliesslich zeigen, dass $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_c E$ die (topologische) Vervollständigung von E ist, wenn E ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum ist. Also ist E in diesem Falle genau dann c-reflexiv, wenn E vollständig ist. Die Resultate der Teile 1 und 2 entstammen der Dissertation des Autors. Viele Beweise sind jedoch vereinfacht und verkürzt wiedergegeben. Die Anwendungen dieser Ergebnisse auf topologische insbesondere lokalkonvexe, topologische Vektorräume wurden zusammen mit E. Binz gefunden.

I. Die assoziierte lokalkonvexe Topologie von $\mathscr{C}_c(X)$

Es sei (E, Λ) ein Limesvektorraum und $P(E)$ die Menge aller stetigen Halbnormen auf (E, Λ). Die Menge $P(E)$ induziert auf E eine lokalkonvexe Topologie τ, die gröber als Λ ist. In der Tat ist τ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, die gröber ist als Λ, und daher heisst (E, τ) der zu (E, Λ) assoziierte lokalkonvexe Vektorraum. Für $(E, \Lambda)=\mathscr{C}_c(X)$ soll er $\mathscr{C}_{\tau c}(X)$ genannt werden. Bezeichnen wir mit $\mathscr{C}_k(X)$ die Menge $\mathscr{C}(X)$, versehen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X, so ist die Identität von $\mathscr{C}_c(X)$ in $\mathscr{C}_{\tau k}(X)$ immer stetig. Nun soll in diesem Teil gezeigt werden, dass sie für einen c-einbettbaren Limesraum X ein Homöomorphismus ist, d.h. in diesem Falle ist der zu $\mathscr{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $\mathscr{C}_k(X)$.

Es sei X ein Limesraum und $K \subseteq X$ kompakt. Definiert man

$$p_K : \mathscr{C}_c(X) \to \mathbf{R}$$

durch

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in \mathscr{C}(X),$$

so ist p_K eine stetige Halbnorm auf $\mathscr{C}_c(X)$. Weiterhin erzeugt das System $\{p_K \mid K \subseteq X,$ K kompakt$\}$ die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen auf $\mathscr{C}(X)$. Es bezeichne P wiederum die Menge aller stetigen Halbnormen auf $\mathscr{C}_c(X)$, dann ist die Homöomorphie von

$$\mathrm{id} : \mathscr{C}_{\tau c}(X) \to \mathscr{C}_k(X)$$

äquivalent zu der Aussage: Zu jedem $p \in P$ existieren eine kompakte Menge $K \subseteq X$ und eine reelle Zahl $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft: $p \leqslant \alpha p_K$.

Es sei $\tilde{P}$ die Menge aller Halbnormen $p \in P$, für die gilt:

(i) $p(f) = p(|f|)$ für alle $f \in \mathscr{C}(X)$

(ii) $p(f) \leqslant p(g)$ für alle f und g aus $\mathscr{C}(X)$ mit $|f| = f \leqslant g$.

Wir werden zunächst zeigen, dass die von P und $\tilde{P}$ erzeugten Topologien übereinstimmen. Dazu brauchen wir die beiden folgenden Lemmata:

LEMMA 1. *Es sei X ein Limesraum. Definiert man für eine beliebige Teilmenge $F \subseteq \mathscr{C}(X)$*

$$\Gamma_0 F = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid \text{ es existiert ein } g \in F \quad \text{mit} \quad |f| \leqslant |g|\},$$

dann konvergiert ein Filter θ auf $\mathscr{C}_c(X)$ genau dann gegen Null, wenn $\Gamma_0\theta$ gegen Null konvergiert, dabei sei $\Gamma_0\theta$ der von $\{\Gamma_0 F \mid F \in \theta\}$ erzeugte Filter.

Den Beweis führt man durch einfaches Ausrechnen.

LEMMA 2. *Es sei ψ eine positiv homogene, in Null stetige Abbildung von $\mathscr{C}(X)$ in* **R**, *dann ist ψ beschränkt, d.h. für jedes $f_0 \in \mathscr{C}(X)$ ist die folgende Menge beschränkt:*

$$\psi\{f \in \mathscr{C}(X) \mid -f_0 \leqslant f \leqslant f_0\}.$$

Beweis. Es sei $f_0 \in \mathscr{C}(X)$ und $A_{f_0} = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid -f_0 \leqslant f \leqslant f_0\}$. Nehmen wir an, dass $\psi(A_{f_0})$ nicht beschränkt ist, dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathrm{N}$ eine Funktion $g_n \in A_{f_0}$ mit:

$$|\psi(g_n)| \geqslant n, \quad \text{also} \quad \left|\psi\left(\frac{g_n}{n}\right)\right| \geqslant 1.$$

Andererseits gilt aber

$$-f_0 \leqslant g_n \leqslant f_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{f_0}{n} \leqslant \frac{g_n}{n} \leqslant \frac{f_0}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N},$$

woraus folgt, dass die Folge (g_n/n) gegen Null konvergiert. Da ψ in Null stetig ist, erhalten wir daraus die Konvergenz von $\psi(g_n/n)$ gegen Null, also einen Widerspruch.

Nun definieren wir für jedes $p \in P$

$$\tilde{p}: \mathscr{C}_c(X) \to \mathbf{R}$$

durch:

$$\tilde{p}(f_0) = \sup\{p(f) \mid f \in \mathscr{C}(X), |f| \leqslant |f_0|\} \quad \text{für alle} \quad f_0 \in \mathscr{C}(X).$$

Nach Lemma 2 ist $\tilde{p}$ wohldefiniert, und es ist nicht schwer zu verifizieren, dass $\tilde{p}$ eine Halbnorm auf $\mathscr{C}(X)$ ist. Wir beweisen daher nur die Stetigkeit von $\tilde{p}$:

Es konvergiere θ gegen Null in $\mathscr{C}_c(X)$, dann konvergiert nach Lemma 1 auch $\Gamma_0\theta$ gegen Null. Da p stetig ist, gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $F_\varepsilon \in \theta$ mit den Eigenschaften:

$$F_\varepsilon = \Gamma_0 F_\varepsilon \quad \text{und} \quad p(F_\varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Sei $f_0 \in F_\varepsilon$ und $|f| \leqslant |f_0|$, dann gilt $f \in F_\varepsilon$ und daher $p(f) < \varepsilon$, woraus wir $\tilde{p}(f_0) \leqslant \varepsilon$ erhalten. Also gilt: $\tilde{p}(F_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Daher gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $p \in P$ eine stetige Halbnorm $\tilde{p} \in \tilde{P}$ mit der Eigenschaft: $p \leqslant \tilde{p}$, woraus folgt, dass P und $\tilde{P}$ in der Tat dieselbe Topologie auf $\mathscr{C}(X)$ erzeugen.

Das folgende, sehr einfach zu beweisende, Lemma bildet den Schlüssel des Beweises dafür, dass P die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathscr{C}(X)$ erzeugt:

LEMMA 3. *Für jedes $p \in \tilde{P}$ ist der Kern von p ein abgeschlossenes Ideal in $\mathscr{C}_c(X)$.*

Beweis. Der Kern jeder stetigen Halbnorm auf $\mathscr{C}_c(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{C}_c(X)$, also bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Ker} p$ gegen Multiplikation mit Elementen aus $\mathscr{C}(X)$ abgeschlossen ist.

Sei also $p \in \tilde{P}$, $f_0 \in \operatorname{Ker} p$ und $g \in \mathscr{C}(X)$. Definiert man

$$g_n = (-\underline{n} \vee g) \wedge \underline{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N},$$

so konvergiert die Folge (g_n) gegen g und die Folge $(g_n f_0)$ gegen $g f_0$. (Dabei bezeichne „$\vee$" bzw. „$\wedge$" das (punktweise definierte) Supremum bzw. Infimum zweier Funktionen und $\underline{n}$ die konstante Funktion mit dem Wert n.) Weiterhin gilt:

$$|f_0 g_n| \leqslant n|f_0| \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}$$
$$\Rightarrow p(f_0 g_n) \leqslant p(n f_0) = n p(f_0) = 0.$$

Also liegen alle $f_0 g_n$ im Kern von p. Da p stetig ist, folgt, dass $f_0 g \in \operatorname{Ker} p$ gilt.

Für ein Ideal $I \subseteq \mathscr{C}(X)$ definiere man

$$N(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in I\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $N(\mathrm{Ker}\,p)$ kompakt sein muss, wenn sich $p \in \tilde{P}$ durch das Vielfache einer Supremumsnorm über eine kompakte Menge majorisieren lässt. Beim Beweis dieser Kompaktheit müssen wir uns jedoch (wegen Lemma 5) auf die Klasse der c-einbettbaren Limesräume beschränken, die wir deshalb hier kurz beschreiben wollen:

Für einen Limesraum Y bezeichne $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(Y)$ die Menge aller reellwertigen, unitären $\mathbf{R}$-Algebrenhomomorphismen auf Y, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und

$$i_Y : Y \to \mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(Y)$$

werde definiert durch $i_Y(y)(f) = f(y)$ für alle $y \in Y$ und alle $f \in \mathscr{C}(Y)$. In [3] wurde gezeigt, dass i_Y stets surjektiv ist. Wenn i_Y sogar ein Homöomorphismus ist, nennen wir Y, der Terminologie von [3] folgend, c-einbettbar. Als Beispiele c-einbettbarer Limesräume erwähnen wir hier die vollständig regulären topologischen Räume und $\mathscr{C}_{\mathscr{C}}(Y)$ für jeden Limesraum Y. Ferner sind Unterräume c-einbettbarer Limesräume wieder c-einbettbar.

Unser Ziel ist es nun, für jeden c-einbettbaren Limesraum zu beweisen, dass $N(\mathrm{Ker}\,p)$ für alle $p \in \tilde{P}$ kompakt ist und $p \leqslant p(\underline{1})\, p_{N(\mathrm{Ker}\,p)}$ gilt. Zum Beweis der Kompaktheit brauchen wir die folgende Definition und die sich anschliessenden beiden Lemmata (s. [8]):

DEFINITION. Ein System $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen eines Limesraumes X heisst Überdeckungssystem von X, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem gegen x konvergenten Filter Φ ein $U_{x,\Phi} \in \mathfrak{U}$ gibt mit $x \in U_{x,\Phi}$ und $U_{x,\Phi} \in \Phi$.

LEMMA 4. *Ein hausdorffscher Limesraum ist genau dann kompakt, wenn es zu jedem Überdeckungssystem* $\mathfrak{U}$ *von* X *ein endliches Teilsystem* $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ *gibt, dessen Elemente* X *überdecken.*

LEMMA 5. *Es sei* X *ein* c*-einbettbarer Limesraum und* $\mathfrak{X}$ *die von* $\mathscr{C}(X)$ *auf* X *induzierte Topologie. Weiter sei* $\mathfrak{U}$ *ein Überdeckungssystem von* X. *Dann gibt es ein Überdeckungssystem* $\mathfrak{W}$ *von* X *mit den Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{W}$ *ist Verfeinerung von* $\mathfrak{U}$

(ii) $V \in \mathfrak{W} \Rightarrow X \setminus V \in \mathfrak{X}$

Nun können wir die Kompaktheit von $N(\mathrm{Ker}\,p)$ im c-einbettbaren Fall beweisen:

LEMMA 6. *Es sei* X *ein* c*-einbettbarer Limesraum,* $p \in \tilde{P}$ *und* $K = N(\mathrm{Ker}\,p)$, *dann ist* K *kompakt.*

Beweis. OBdA sei $K \neq \emptyset$. Nach Lemma 4 reicht es, zu zeigen, dass jedes Überdeckungssystem von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Sei also $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein Überdeckungssystem von K. Da K abgeschlossen ist, bildet das System $\mathfrak{U} = \{U \cup (X \setminus K) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ ein Überdeckungssystem für X. Sei nun $\mathfrak{W}$ ein Überdeckungssystem von X, für das die Bedingungen (i) und (ii) des Lemmas 5 gelten. Für jedes $V \in \mathfrak{W}$ und jede positive reelle Zahl ε definiere man:

$$F_{V,\varepsilon} = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid f(V) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Es gilt $\underline{0} \in F_{V,\varepsilon}$ für alle $V \in \mathfrak{W}$ und alle $\varepsilon > 0$, also ist

$$\{F_{V,\varepsilon} \mid V \in \mathfrak{W}, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0\}$$

eine Filtersubbasis, der erzeugte Filter heisse θ. Da $\mathfrak{W}$ ein Überdeckungssystem von X ist, konvergiert θ gegen $\underline{0}$ und wegen der Stetigkeit von p konvergiert $p(\theta)$ gegen 0. Also gibt es Mengen $V_i \in \mathfrak{W}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ mit:

$$p(F_{V_1,\varepsilon} \cap \ldots \cap F_{V_n,\varepsilon}) \subseteq [-1, 1].$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \supseteq K$$

gilt. Nehmen wir an, dass es ein $x_0 \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ gibt. Da alle V_i in $(X, \mathfrak{X})$ abgeschlossen sind, existiert eine stetige Funktion $f_0 \in \mathscr{C}(X)$, für die gilt: $f_0(\bigcup V_i) = \{0\}$ und $f_0(x_0) = 1$, es folgt:

$$k f_0 \in F_{V_i,\varepsilon} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und alle } k \in \mathbf{N},$$

also

$$p(k f_0) \leqslant 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N}$$
$$\Rightarrow p(f_0) = 0.$$

Nach [4], Thm 2 gilt für jedes abgeschlossene Ideal $I \subseteq \mathscr{C}(X)$:

$$f \in I \Leftrightarrow f(N(I)) = \{0\}.$$

Da Ker$p$ nach Lemma 3 ein abgeschlossenes Ideal ist, folgt wegen $f_0(K) \neq \{0\}$ also $f_0 \notin$ Ker$p$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mathfrak{W}$ und daher auch $\mathfrak{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von K enthalten.

Das folgende Lemma beschliesst den 1. Teil:

LEMMA 7. *Es sei X ein c-einbettbarer Limesraum, und K wie oben. Dann gilt:*

$$p \leqslant p(\underline{1})\, p_K.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass K nach Lemma 6 kompakt ist. Nun sei $f \in \mathscr{C}(X)$ und $f(K) \subseteq [-1, 1]$. Definiert man $g = (f \wedge \underline{1}) \vee (-\underline{1})$, so folgt $(f-g)(K) = \{0\}$ und $|g| \leqslant \underline{1}$. Aus $(f-g)(K) = \{0\}$ folgt $p(f-g) = 0$ und wir erhalten:

$$p(f) \leqslant p(f-g) + p(g) \leqslant p(\underline{1}).$$

Da $p(f) = 0$ äquivalent zu $p_K(f) = 0$ ist, folgt aus der positiven Homogenität von p die Behauptung. Zusammenfassend können wir also sagen:

SATZ 1. *Es sei X ein c-einbettbarer Limesraum, dann ist der zu $\mathscr{C}_c(X)$ assoziierte lokalkonvexe Vektorraum $\mathscr{C}_k(X)$.*

Beweis. Für $p \in P$ definiere man $\tilde{p}$ und K durch:

$$\tilde{p}(f_0) = \sup\{p(f) \mid f \in \mathscr{C}(X), |f| \leqslant |f_0|\} \quad \text{für alle } f_0 \in \mathscr{C}(X)$$

und $K = N(\operatorname{Ker} \tilde{p})$.

Nach den obigen Ausführungen ist $\tilde{p}$ eine stetige Halbnorm auf $\mathscr{C}_c(X)$, die Menge K kompakt, und es gilt: $p \leqslant \tilde{p}(\underline{1})\, p_K$.

II. Die c-Reflexivität von $\mathscr{C}_c(X)$

Für einen Limesvektorraum E bezeichne $\mathscr{L}_c E$ die Menge aller linearen, stetigen Funktionale auf E, versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz, und

$$j_E : E \to \mathscr{L}_c \mathscr{L}_c E$$

werde definiert durch $j_E(f)(\psi) = \psi(f)$ für alle $f \in E$ und alle $\psi \in \mathscr{L}_c E$. Offenbar ist j_E ein stetiger Homomorphismus. Wenn j_E sogar ein Homöomorphismus ist, dann nennen wir E c-reflexiv. In diesem Teil wollen wir die c-Reflexivität von $\mathscr{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X beweisen. Dazu betrachten wir die stetige Abbildung

$$i_X : X \to \mathscr{L}_c \mathscr{C}_c(X)$$

definiert durch $i_X(p)(f) = f(p)$ für alle $p \in X$ und alle $f \in \mathscr{C}(X)$. Unser Ziel ist es, zunächst zu zeigen, dass die lineare Hülle von $i_X(X)$ (im folgenden kurz mit $[i_X(X)]$ bezeichnet) dicht in $\mathscr{L}_c \mathscr{C}_c(X)$ liegt. Dazu brauchen wir den folgenden, von M. Schroder bewiesenen

SATZ 2. *Für jeden topologischen Vektorraum E ist $\mathscr{L}_c E$ lokalkompakt, d.h. jeder konvergente Filter enthält eine kompakte Menge.*

Zum Beweis sei Φ ein in $\mathscr{L}_c E$ gegen 0 konvergenter Filter, $\mathfrak{U}$ der Nullumgebungsfilter in E und $\omega : \mathscr{L}_c E \times E \to \mathbf{R}$ die Auswertung. Dann gibt es Mengen $U \in \Phi$ und $F \in \mathfrak{U}$, so dass gilt:

$$\omega(U \times F) \subseteq [-1, 1],$$

woraus $\tilde{U}=\{\psi\in\mathscr{L}E \mid \psi(F)\subseteq[-1, 1]\}\in\Phi$ folgt. Wir wollen nun die Kompaktheit von $\tilde{U}$ zeigen. Sei also Ψ ein Ultrafilter auf $\tilde{U}$ und $f\in E$. Da F absorbierend ist, gibt es eine natürliche Zahl $k\in\mathbf{N}$, so dass gilt:

$$\omega(\tilde{U}\times\{f\})\subseteq[-k, k],$$

also konvergiert der Ultrafilter $\omega(\Psi\times f)$ in $[-k, k]$ und daher auch in $\mathbf{R}$ gegen eine Zahl $\chi(f)$. Es ist nicht schwer zu verifizieren, dass $\chi\in\mathscr{L}_c E$ gilt und dass Ψ gegen χ konvergiert. Da $\tilde{U}$ abgeschlossen ist, folgt auch $\chi\in\tilde{U}$. Daraus leiten wir jetzt den folgenden, für unsere Arbeit fundamentalen Satz her. Der ursprüngliche Beweis verwendete eine Integraldarstellung für lineare, stetige Funktionale auf $\mathscr{C}_c(X)$, die man aus dem Teil (ii) des Beweises von Satz 3 leicht herleiten kann. Der hier wiedergegebene Beweis stützt sich auf eine Idee von E. Binz und K. Kutzler.

SATZ 3. *Für einen Limesraum X liegt $[i_X(X)]$ dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$.*

Der Beweis zerfällt in drei Teile:

(i) X sei kompakt und topologisch

In diesem Falle stimmt die Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathscr{C}_c(X)$ mit der üblichen Supremumsnormtopologie überein, mithin ist $\mathscr{C}_c(X)$ ein Banachraum. Den Dualraum $\mathscr{L}\mathscr{C}_c(X)$ versehen wir einerseits mit der üblichen Normtopologie und schreiben dafür $\mathscr{L}_n\mathscr{C}_c(X)$, andererseits mit der schwachen Topologie bezüglich $\mathscr{C}_c(X)$, was wir mit $\mathscr{L}_\sigma\mathscr{C}_c(X)$ bezeichnen wollen. Für diese Räume sind die folgenden Identitäten stetig:

$$\mathscr{L}_n\mathscr{C}_c(X)\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathscr{L}_\sigma\mathscr{C}_c(X).$$

Es sei U die Einheitskugel in $\mathscr{L}_n\mathscr{C}_c(X)$. Dann konvergiert der von $((1/n)\,U)_{n\in N}$ erzeugte Filter in $\mathscr{L}_n\mathscr{C}_c(X)$ und daher auch in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$ gegen 0, enthält also nach Satz 2 eine kompakte Menge. Folglich ist U in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$ selbst kompakt. Wir schreiben im folgenden U_c bzw. U_σ, wenn wir U als Unterraum von $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$ bzw. $\mathscr{L}_\sigma\mathscr{C}_c(X)$ auffassen. Als Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes ist U_c selbst c-einbettbar. Da der Raum U_c kompakt ist, muss er nach [2], Satz 4 sogar topologisch sein und daher homöomorph zu U_σ. Nun ist aber U_σ die abgeschlossene konvexe Hülle von $i_X(X)\cup(-i_X(X))$ (s. [6], V8.6) und daher ist es auch U_c. Also lässt sich jedes $\psi\in U$ in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$ durch Elemente aus $[i_X(X)]$ approximieren. Da U absorbierend ist, folgt die Behauptung des Satzes im kompakten, topologischen Fall.

(ii) X sei c-einbettbar

Es sei $\psi\in\mathscr{L}\mathscr{C}_c(X)$, dann ist $|\psi|$ eine stetige Halbnorm auf $\mathscr{C}_c(X)$, also gibt es nach Satz 1 eine reelle Konstante $\alpha>0$ und eine kompakte Menge $K\subseteq X$ mit:

$$|\psi(f)|\leqslant\alpha p_K(f)\quad\text{für alle } f\in\mathscr{C}(X).$$

Daher gibt es eine lineare, stetige Abbildung χ, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_c(X) \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathscr{C}_c(K) \arrow[dl, "\chi"] \\ & \mathbf{R} & \end{tikzcd}$$

Dabei sei r die Restriktionsabbildung. Weil K kompakt, topologisch ist (s. [2], Satz 4), lässt sich χ in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(K)$ durch Elemente aus $[i_K(K)]$ approximieren und daher in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$ durch Elemente aus $[i_X(K)]$.

(iii) Für einen beliebigen Limesraum X bezeichne $\tilde{X}$ den Raum $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(X)$. Wir erinnern daran, dass $i_X: X \to \tilde{X}$ definiert ist durch $i_X(p)(f) = f(p)$ für alle $p \in X$ und alle $f \in \mathscr{C}(X)$. Das folgende Diagramm ist nun kommutativ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{i}_X"] \arrow[d, "i_X"] & \tilde{X} \arrow[d, "i_{\tilde{X}}"] \\ \mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X) \arrow[r, "\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(\tilde{i}_X)"] & \mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(\tilde{X}) \end{tikzcd}$$

Nach [3], Satz 1 ist $\tilde{i}_X$ surjektiv. Da $\tilde{X}$ ausserdem c-einbettbar ist, folgt die Behauptung des Satzes aus (ii).

Die c-Reflexivität von $\mathscr{C}_c(X)$ lässt sich nach diesen Vorbereitungen sehr leicht beweisen:

SATZ 4. *Für jeden Limesraum X ist $\mathscr{C}_c(X)$ ein c-reflexiver Limesvektorraum.*

Beweis. Man definiere die Abbildung

$$i^*: \mathscr{L}_c\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X) \to \mathscr{C}_c(X)$$

durch $i^*(T) = T \circ i_X$ für alle $T \in \mathscr{L}\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$, d.h. man setze $i^* = \mathscr{C}_c(i_X) \,|\, \mathscr{L}\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X)$. Mit Hilfe des Satzes 3 verifiziert man sehr leicht, dass i^* invers zu $j_{\mathscr{C}_c(X)}$ ist.

III. Lokalkonvexe, topologische Vektorräume

Es sei E ein topologischer Vektorraum, dann ist $\mathscr{L}_cE$ nach Satz 2 lokalkompakt, und daher sind $\mathscr{C}_c(\mathscr{L}_cE)$ und $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$ lokalkonvex, topologisch (s. [8]). Liegt weiterhin $j_E(E)$ dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$, so ist $\mathscr{L}_c(j_E)$ die inverse Abbildung zu $j_{\mathscr{L}_cE}$ und $\mathscr{L}_cE$ daher c-reflexiv. Ist umgekehrt $j_E(E)$ nicht dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein nichttriviales Funktional ψ auf $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$, das auf $j_E(E)$ verschwindet. Man sieht leicht, dass $\psi \notin j_{\mathscr{L}_cE}(\mathscr{L}_cE)$ gilt, $\mathscr{L}_cE$ also nicht c-reflexiv sein kann. Damit haben wir bewiesen:

SATZ 5. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, dann ist $\mathscr{L}_cE$ genau dann c-reflexiv, wenn $j_E(E)$ dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$ liegt.*

Ist E sogar lokalkonvex, so ist E nach [7], S. 252 homöomorph und isomorph zu einem Unterraum von $\mathscr{C}(X)$, wobei X ein geeigneter lokalkompakter Raum ist und $\mathscr{C}(X)$ die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen trägt, die jedoch in diesem Falle mit der Limitierung der stetigen Konvergenz zusammenfällt (s. [8]). Das folgende Lemma zeigt, dass j_E in diesem Falle stets ein Homöomorphismus auf $j_E(E)$ ist:

LEMMA 8. *Es sei X ein Limesraum und $A \subseteq \mathscr{C}_c(X)$ ein Unterraum. Dann ist j_A ein Homöomorphismus auf $j_A(A)$.*

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad e \quad} & \mathscr{C}_c(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_{\mathscr{C}_c(X)}} \\ \mathscr{L}_c\mathscr{L}_cA & \xrightarrow{\mathscr{L}_c\mathscr{L}_ce} & \mathscr{L}_c\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(X) \end{array}$$

Die Behauptung folgt dann aus der Homöomorphie von $j_{\mathscr{C}_c(X)}$.

Bevor wir die c-Reflexivität von $\mathscr{L}_cE$ beweisen, wollen wir bemerken, dass ein Limesvektorraum vollständig heisst, wenn in ihm jeder Cauchy-Filter konvergiert. Abgeschlossene Unterräume vollständiger Limesvektorräume sind vollständig und vollständige Unterräume separierter Limesvektorräume sind abgeschlossen. Weiterhin ist $\mathscr{C}_c(X)$ für jeden Limesraum X vollständig (s. [5], Satz 2) und daher auch $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$ für jeden Limesvektorraum E, woraus folgt, dass c-reflexive Limesvektorräume vollständig sind. Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

SATZ 6. *Ein Limesvektorraum E ist genau dann c-reflexiv, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:*

(i) *j_E ist ein Homöomorphismus auf $j_E(E)$;*

(ii) *E ist vollständig;*

(iii) *Jedes lineare, stetige Funktional auf $\mathscr{L}_cE$ lässt sich linear und stetig auf $\mathscr{C}_cE$ fortsetzen.*

Zum Beweis betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad i_E \quad} & \mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(E) \\ & {\scriptstyle j_E}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathscr{L}_ce} & \\ & \mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE & \end{array}$$

dabei bezeichne e die Einbettung von $\mathscr{L}_cE$ in $\mathscr{C}_c(E)$ und i_E sei wie im ersten Teil definiert.

Da die Bedingung (iii) äquivalent mit der Surjektivität von $\mathscr{L}_ce$ ist, ist die Notwendigkeit von (i)–(iii) klar. Umgekehrt liegt nach Satz 3 die lineare Hülle von

$i_E(E)$ dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{C}_c(E)$, mit (iii) folgt dann, dass $\mathscr{L}_c(e)(i_E(E))$, also $j_E(E)$ dicht in $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$ liegt. Nach (ii) und (i) ist $j_E(E)$ abgeschlossen und daher $j_E(E)=\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$, woraus mit (i) die Behauptung folgt.

Wenn nun E lokalkonvex, topologisch ist, dann ist $\mathscr{C}_c(\mathscr{L}_cE)$ topologisch und daher gilt für $\mathscr{L}_cE$ die Bedingung (iii) des Satzes 6. Da $\mathscr{L}_cE$ als abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{C}_c(E)$ vollständig ist und da j_E nach Lemma 7 ein Homöomorphismus auf $j_E(E)$ ist, folgt aus Satz 5 und Satz 6 der

SATZ 7. *Es sei E ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum. Dann ist $\mathscr{L}_cE$ ein c-reflexiver Limesvektorraum, und j_E ist ein Homöomorphismus auf einen dichten Teilraum von $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$.*

Als Korollare erhalten wir:

SATZ 8. *Für einen lokalkonvexen, topologischen Vektorraum E ist $\mathscr{L}_c\mathscr{L}_cE$ die (topologische) Vervollständigung von E.*

SATZ 9. *Ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum ist genau dann c-reflexiv, wenn er vollständig ist.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BINZ, E. und KELLER, H. H., *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, (1966), 383.
[2] BINZ, E., *Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren*, Comment. Math. Helv. *43* (1968), 195.
[3] ——, *Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesräumen und ihren Funktionenalgebren.* Math. Ann. *181* (1969), 45.
[4] ——, *On closed Ideals in Convergence Function Algebras*, Math. Ann. *182* (1969), 145.
[5] ——, *Notes on a Characterization of Function Algebras*, Math. Ann. *186* (1970), 314.
[6] DUNFORD, N. und SCHWARTZ, J., *Linear Operators Part I* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1967).
[7] KÖTHE, G., *Topologische Lineare Räume I* (Springer Verlag, Berlin, 1966).
[8] SCHRODER, M., *Doctoral thesis* Queen's University, Kingston/Ont., 1971.

Eingegangen den 8. Juni 1971