Eine Anwendung der K-Theorie in der Theorie der H-Räume

Eine Anwendung der K-Theorie in der Theorie der H-Räume

FRANÇOIS SIGRIST (Université de Neuchâtel) und

ULRICH SUTER (Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich)

Einleitung

In der Theorie der H-Räume ist die K-Theorie ein wichtiges Hilfsmittel, um Nicht-Existenzfragen zu beantworten. So ist zum Beispiel der berühmte Adams'sche Satz [1] über die Nicht-Existenz von H-Raumstrukturen auf den Sphären S^n, $n \neq 1$, 3 oder 7, von Adams und Atiyah [5] im Rahmen der K-Theorie auf einfache Weise neu bewiesen worden. Wir befassen uns in der vorliegenden Arbeit mit einem gleichartigen Problem. Es handelt sich um die folgende Frage, deren Beantwortung für die Klassifikation der H-Räume vom Rang 2 wesentlich ist: Welche S^3-Prinzipalbündel über S^7 sind H-Räume?

Die Prinzipalbündel mit Strukturgruppe S^3 und Basisraum S^7 werden klassifiziert durch Elemente aus $\pi_6(S^3) \cong \mathbf{Z}_{12}$. Das Blakers-Massey-Element ω ist ein Erzeugendes von $\pi_6(S^3)$, und es sei E_n der Totalraum des durch $n \cdot \omega$ klassifizierten Bündels. Man sieht leicht, dass es 7 verschiedene Homotopie-Typen von solchen Totalräumen gibt [12], nämlich $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ und E_6. Es ist $E_0 = S^3 \times S^7$ und $E_1 = Sp(2)$ (siehe [12]), d.h. E_0 und E_1 sind H-Räume. Hilton und Roitberg [12] haben gezeigt, dass E_5 eine Hopf-Multiplikation besitzt. Nach Stasheff [14] sind auch E_3 und E_4 H-Räume. Zabrodsky hat dann in [17] bewiesen, dass E_2 und auch E_6 *keine* H-Raumstruktur zulassen. Der Beweis von Zabrodsky benützt höhere Kohomologieoperationen (dritter Ordnung). Anlässlich der H-Raum-Konferenz in Neuchâtel (August 1970, siehe Springer Lecture Notes No. 196) wurde deshalb die Frage aufgeworfen, ob nicht, analog wie im Falle der Sphären, ein einfacherer Beweis mit Hilfe der K-Theorie gefunden werden könne. Die vorliegende Arbeit beantwortet diese Frage positiv.

Der Raum E_n besitzt die folgende CW-Struktur [12]:

$$E_n = (S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup e^{10}$$

Wir zeigen:

SATZ A. *Es sei X ein* CW-*Komplex der Form* $(S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup e^{10}$, $n\omega \in \pi_6(S^3)$. *Falls X eine* H-*Raumstruktur zulässt, so ist* $n \not\equiv 2 \pmod 4$.

Wie üblich in der Theorie der H-Räume beweisen wir diesen Satz, indem wir zunächst aus der Existenz einer Hopf-Multiplikation in $X=(S^3\cup_{n\omega}e^7)\cup e^{10}$ auf die Existenz eines CW-Komplexes Q_n mit speziellen Eigenschaften schliessen. (In unserem Fall ist Q_n ein Teilkomplex der projektiven Ebene von X.) Satz A ist dann eine Konsequenz von Satz B, der für sich selbst von Interesse ist.

SATZ B. *Es sei Q_n ein* CW-*Komplex, welcher den beiden folgenden Bedingungen unterworfen ist:*

(a) *Der ganzzahlige Kohomologiering von Q_n ist gegeben durch:*

$$H^*(Q_n)=\mathbf{Z}[x,y]/(x^3,x^2y,xy^2,y^3),\qquad x\in H^4(Q_n),\qquad y\in H^8(Q_n)$$

d.h. $H^*(Q_n)$ ist eine geschnittene Polynomalgebra mit zwei Erzeugenden.

(b) *Q_n enthält als Teilkomplex den Komplex $S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8=\Sigma(S^3\cup_{n\omega}e^7)$, der die Erzeugenden x und y von $H^*(Q_n)$ trägt, d.h. falls $i:S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8\to Q_n$ die Einbettung ist, so erzeugt das Element $i^*(x)$ bzw. $i^*(y)$ die Gruppe $H^4(S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8)$ bzw. $H^8(S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8)$.*

Die Bedingungen (a) *und* (b) *implizieren: $n\not\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$.*

Zum Beweis von Satz B genügt weder die KU- noch die KO-Theorie. Wir brauchen dazu den Funktor

$$\mathbf{L}(\ )=\mathbf{KO}(\ )\oplus\mathbf{KSP}(\ )$$

Das Tensorprodukt von reellen und quaternionalen Vektorbündeln definiert auf $\mathbf{L}(X)$ eine $\mathbf{Z}_2$-graduierte Ringstruktur; die für Vektorbündel definierten äusseren Potenzen induzieren auf $\mathbf{L}(X)$ λ-Operationen und somit auch ψ-Operationen. Mit Hilfe der ψ-Operationen auf $\mathbf{L}(Q_n)$ lässt sich Satz B beweisen.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert. In §1 stellen wir die wichtigsten Eigenschaften des λ-Rings $\mathbf{L}(X)$ zusammen. Im zweiten Abschnitt wird der CW-Komplex Q_n konstruiert. In §3 untersuchen wir den Ring $\mathbf{L}(S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8)$ und seine ψ-Operationen. Die Ergebnisse von §3 werden dann in §4 benützt, um $\mathbf{L}(Q_n)$ samt ψ-Operationen zu bestimmen. In §5 beweisen wir den Satz B.

Am Schluss der Arbeit gehen wir noch kurz auf eine andere Fragestellung ein. Wir zeigen mit unserer Methode: *Für ungerades n ist die Projektion $\pi:E_n\to S^7$ keine H-Abbildung, wie immer man auch die Hopf-Multiplikationen auf E_n und S^7 wählt.* (Damit beantworten wir teilweise eine der in [18] gestellten Fragen.)

§1. Der λ-ring $\mathbf{KO}(X)\oplus\mathbf{KSP}(X)$

Es sei $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)$ bzw. $\mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$ das Monoid der Isomorphieklassen von reellen bzw. quaternionalen Vektorbündeln über einem zusammenhängenden CW-Komplex

X. Das Tensorprodukt von Vektorbündeln induziert auf

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$$

eine kommutative, $\mathbf{Z}_2$-graduierte Semiring-Struktur. (Ist V ein reelles und sind W, W' quaternionale Vektorbündel, so ist $V \otimes W$ quaternional und $W \otimes W'$ reell; siehe Bott [7].) Eine Eins ist durch das reelle triviale Linienbündel gegeben.

Sowohl für reelle, als auch für quaternionale Vektorbündel sind äussere Potenzen Λ^k, $k=0, 1, 2,\ldots$ definiert. Für ein quaternionales Bündel W ist das Vektorbündel $\Lambda^k(W)$ reell, falls k gerade ist und quaternional, falls k ungerade ist (vgl. [4, 3.63]). Es gilt die Beziehung $\Lambda^k(V \oplus V') \cong \oplus_{j=0}^k \Lambda^j(V) \otimes \Lambda^{k-j}(V')$, V und V' reell oder V und V' quaternional. Man erhält somit auf $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$ eine $\mathbf{Z}_2$-graduierte λ-Semiring-Struktur. (Für „gemischte" Elemente $([V], [W]) \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$ sei λ^k durch $\lambda^k([V], [W]) = \sum_{j=0}^k \lambda^j([V], 0) \cdot \lambda^{k-j}(0, [W])$ definiert).

Es sei nun

$$\mathbf{L}(X) = \mathbf{KO}(X) \oplus \mathbf{KSP}(X)$$

der Grothendieck'sche Ring von $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X) \oplus \mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$. Es ist $\mathbf{L}(X)$ ein *kommutativer* $\mathbf{Z}_2$*-graduierter* λ*-Ring* (siehe [13, 12/1]). Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ induziert einen Ringhomomorphismus $f^!: \mathbf{L}(Y) \to \mathbf{L}(X)$.

Für einen CW-Komplex X mit Basispunkt, $pt \overset{i}{\hookrightarrow} X$, definieren wir wie üblich

$$\widetilde{\mathbf{L}}(X) = \widetilde{\mathbf{KO}}(X) \oplus \widetilde{\mathbf{KSP}}(X) = \ker i^!$$

und erhalten eine natürliche Zerlegung

$$\mathbf{L}(X) \cong \mathbf{L}(pt) \oplus \widetilde{\mathbf{L}}(X). \tag{1.0}$$

In (1.0) identifizieren wir den Ring $\mathbf{L}(pt) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ mit dem Unterring von $\mathbf{L}(X)$, der durch die trivialen Vektorbündel bestimmt ist. Dieser Unterring wird additiv erzeugt von der Eins und dem durch das triviale $\mathbf{H}$-Linienbündel repräsentierten Element $\varepsilon \in \mathbf{KSP}(X)$. Es gilt die Relation

$$\varepsilon^2 = 4 \in \mathbf{KO}(X). \tag{1.1}$$

Auf dem λ-Ring $\mathbf{L}(X) = \mathbf{KO}(X) \oplus \mathbf{KSP}(X)$ lassen sich wie üblich Adams'sche Operationen ψ^k, $k=0, 1, 2,\ldots$ definieren [13, 12/2]. Diese Operationen stimmen auf $\mathbf{KO}(X)$ mit den reellen Adams'schen ψ^k überein, und es ist $\psi^k(0, \beta) \in \mathbf{KO}(X)$ falls k gerade ist und $\psi^k(0, \beta) \in \mathbf{KSP}(X)$ falls k ungerade ist. Die Operationen sind mit der Zerlegung (1.0) verträglich. Auf ε sind sie bestimmt durch

$$\psi^k(\varepsilon) = \begin{cases} 2, & k \text{ gerade} \\ \varepsilon, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{1.2}$$

(Man beachte, dass $\lambda^2(\varepsilon) = 1$ und $\lambda^k(\varepsilon) = 0$, $k \geqslant 3$.)

Es sei $\mathbf{KU}(X)$ der Grothendieck-Ring der komplexen Vektorbündel über X. Auf

$$\mathbf{LU}(X) = \mathbf{KU}(X) \oplus \mathbf{KU}(X)$$

lässt sich eine $\mathbf{Z}_2$-graduierte λ-Ringstruktur definieren durch:

$$\begin{aligned}
&(\alpha, \beta)\cdot(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta', \beta\alpha' + \alpha\beta') \\
&\lambda^k(\alpha, 0) = (\lambda^k\alpha, 0) \\
&\lambda^k(0, \beta) = \begin{cases} (\lambda^k\beta, 0), & k \text{ gerade} \\ (0, \lambda^k\beta), & k \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die daraus resultierenden ψ-Operationen stimmen selbstverständlich, bis auf die Graduierung, mit den komplexen Adams'schen ψ^k überein. Speziell gilt also:

$$\left.\begin{aligned} \psi^k(\xi\cdot\eta) &= \psi^k(\xi)\cdot\psi^k(\eta) \\ \psi^k\circ\psi^l(\xi) &= \psi^{kl}(\xi) \end{aligned}\right. \quad \xi, \eta \in \mathbf{LU}(X). \tag{1.3}$$

Die kanonischen Homomorphismen (vgl. [4, 3.5] oder [7])

$$\begin{aligned}
&c: \mathbf{KO}(X) \to \mathbf{KU}(X), \quad && c': \mathbf{KSP}(X) \to \mathbf{KU}(X) \\
&r: \mathbf{KU}(X) \to \mathbf{KO}(X), \quad && q: \mathbf{KU}(X) \to \mathbf{KSP}(X)
\end{aligned}$$

induzieren die folgenden natürlichen Abbildungen

$$\begin{aligned}
a &= c \oplus c': \mathbf{L}(X) \to \mathbf{LU}(X) \\
b &= r \oplus q: \mathbf{LU}(X) \to \mathbf{L}(X)
\end{aligned}$$

Es ist a ein λ-Ringhomomorphismus, d.h. insbesondere:

$$a \text{ ist mit den } \psi\text{-Operationen verträglich}. \tag{1.4}$$

Im allgemeinen ist b nur ein Gruppenhomomorphismus (siehe aber [11, §12]). Aus $b\circ a = 2$ (vgl. [4, 3.6]) folgt mit (1.4) und (1.3): Falls $\mathbf{L}(X)$ keine Torsion besitzt, so ist a injektiv; für die ψ-Operationen auf $\mathbf{L}(X)$ gilt dann

$$\left.\begin{aligned} \psi^k(\xi\cdot\eta) &= \psi^k(\xi)\cdot\psi^k(\eta) \\ \psi^k\circ\psi^l(\xi) &= \psi^{k\cdot l}(\xi) \end{aligned}\right. \quad \xi, \eta \in \mathbf{L}(X). \tag{1.5}$$

1.6. *Bemerkung.* Die Beziehungen (1.5) sind allgemein gültig, d.h. auch wenn $\mathbf{L}(X)$ Torsion besitzt. Der Beweis von Adams [2] für $\mathbf{KU}(X)$ und $\mathbf{KO}(X)$ lässt sich auf $\mathbf{L}(X)$ übertragen.

Die natürliche Transformation a kann oft dazu benützt werden, um den Ring $\mathbf{L}(X)$ samt ψ-Operationen zu bestimmen. Wir tun dies z.B. für die Sphäre S^4. (Im folgenden identifizieren wir Elemente $\alpha \in \mathbf{KO}(X)$ bzw. $\beta \in \mathbf{KSP}(X)$ mit ihren Bildern $(\alpha, 0)$ bzw. $(0, \beta)$ in $\mathbf{L}(X)$.)

1.7. HILFSSATZ. *Der Ring* $\widetilde{\mathbf{L}}(S^4)=\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4)\oplus\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ *wird additiv erzeugt durch ein Element* $v\in\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)$ *und das Element* $\varepsilon v\in\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4)$. *Es ist* $v^2=0$. *Die* ψ*-Operationen sind gegeben durch* (1.2) *und*

$$\psi^k(v)=\begin{cases}\dfrac{k^2}{2}\varepsilon v, & k \text{ gerade}\\ k^2 v, & k \text{ ungerade}.\end{cases}$$

Beweis. Es seien $v_{\mathbf{R}}\in\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4)$, $v_{\mathbf{C}}\in\widetilde{\mathbf{KU}}(S^4)$ und $v=v_{\mathbf{H}}\in\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)$ die kanonischen Erzeugenden; d.h. als stabile Vektorbündelklassen werden $v_{\mathbf{R}}$, $v_{\mathbf{C}}$ und $v_{\mathbf{H}}$ durch das entsprechende zum Hopf-Bündel $S^7\to S^4$ assoziierte Vektorbündel repräsentiert. Es ist $c(v_{\mathbf{R}})=2v_{\mathbf{C}}$ [7, 3.15] und $c'(v_{\mathbf{H}})=v_{\mathbf{C}}$ [7, 3.14]. Somit erhält man

$$a(v_{\mathbf{H}})=(0, v_{\mathbf{C}}), \qquad a(v_{\mathbf{R}})=(2v_{\mathbf{C}}, 0).$$

Mit $a(\varepsilon)=(0, 2)$ folgt nun

$$a(v_{\mathbf{R}})=(0,2)\cdot(0, v_{\mathbf{C}})=a(\varepsilon)\cdot a(v_{\mathbf{H}})=a(\varepsilon v_{\mathbf{H}})$$

d.h. $v_{\mathbf{R}}=\varepsilon v_{\mathbf{H}}$, denn a ist injektiv.

Für die ψ-Operationen berechnet man mit (1.4), falls k gerade ist:

$$a\circ\psi^k(v_{\mathbf{H}})=\psi^k(0, v_{\mathbf{C}})=(\psi^k(v_{\mathbf{C}}), 0)=(k^2 v_{\mathbf{C}}, 0)=a\left(\frac{k^2}{2}v_{\mathbf{R}}\right),$$

also

$$\psi^k(v_{\mathbf{H}})=\frac{k^2}{2}\varepsilon v_{\mathbf{H}}.$$

Analog wird der Fall k ungerade behandelt, und 1.7 ist somit bewiesen.

Nach Bott [7] gibt es einen Isomorphismus $B:\widetilde{\mathbf{KSP}}(X)\cong\widetilde{\mathbf{KO}}^4(X)=\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4\wedge X)$. (Es sei $X\wedge Y$ das „smashed" Produkt von X und Y.) Mit Hilfe von Bott's Beweis in [7] prüft man leicht nach, dass B einen natürlichen *Ring*-Homomorphismus

$$\mathbf{L}(X)=\mathbf{KO}(X)\oplus\mathbf{KSP}(X)\cong\mathbf{KO}^0(X)\oplus\mathbf{KO}^4(X)\subset\mathbf{KO}^*(X) \tag{1.9}$$

bewirkt. Zur Bestimmung der Ringstruktur von $\mathbf{L}(X)$ kann somit die $\mathbf{KO}$-Theorie herangezogen werden.

Die Gerüst-Filtrierung $pt\subset X^0\subset\cdots\subset X^j\subset\cdots\subset X^l=X$ von X induziert Filtrierungen von $\mathbf{L}(X)$ und $\mathbf{KO}^0(X)\oplus\mathbf{KO}^4(X)$, welche mit dem Isomorphismus (1.7) verträglich sind. Man erhält somit einen Isomorphismus der assoziierten graduierten Ringe,

$$\mathfrak{G}\mathbf{L}(X)\cong\mathfrak{G}(\mathbf{KO}^0(X)\oplus\mathbf{KO}^4(X)). \tag{1.10}$$

Der folgende Hilfssatz gibt die Beziehung zwischen den ψ-Operationen auf $\widetilde{\mathbf{KSP}}(X)$ und den reellen ψ-Operationen auf $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X)$.

1.11 HILFSSATZ. *Es sei* $\mathbf{L}(X)$ *torsionsfrei. Dann sind die beiden folgenden Diagramme kommutativ:*

k gerade

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{\mathbf{KSP}}(X) \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Bott}"'] \arrow[dl, "\psi^k"'] & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X) \arrow[dd, "\psi^k"] \\
\widetilde{\mathbf{KO}}(X) \arrow[dr, "(k^2/2)\,\varepsilon"'] & & \\
& \widetilde{\mathbf{KSP}}(X) \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Bott}"'] & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X)
\end{tikzcd}$$

k ungerade

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{KSP}}(X) \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Bott}"'] \arrow[d, "k^2\psi^k"] & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X) \arrow[d, "\psi^k"] \\
\widetilde{\mathbf{KSP}}(X) \arrow[r, "\cong", "\mathrm{Bott}"'] & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X)
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Der obige Hilfssatz gilt auch wenn $\mathbf{L}(X)$ Torsion besitzt. Wir setzen hier lediglich Torsionsfreiheit voraus, um (1.5) anwenden zu können (siehe Bemerkung 1.6).

Beweis des Hilfssatzes: Es seien $p_1 : S^4 \times X \to S^4$, $p_2 : S^4 \times X \to X$, $f : S^4 \times X \to S^4 \wedge X$ die kanonischen Projektionen, und es sei $\nu \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4) \cong \mathbf{Z}$ das Erzeugende (siehe 1.7). Wir betrachten

$$\widetilde{\mathbf{L}}(X) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\mathbf{L}}(S^4 \times X) \xleftarrow{f^!} \widetilde{\mathbf{L}}(S^4 \wedge X),$$

dabei sei φ definiert durch

$$\varphi(\xi) = p_1^!(\nu) \cdot p_2^!(\xi), \qquad \xi \in \widetilde{\mathbf{L}}(X).$$

Nach Bott [7, Th. 1] ist φ ein Isomorphismus von $\widetilde{\mathbf{L}}(X)$ auf das Bild der Injektion $f^!$, mit anderen Worten: $B = (f^!)^{-1} \circ \varphi : \widetilde{\mathbf{L}}(X) \cong \widetilde{\mathbf{L}}(S^4 \wedge X)$ ist der Bott'sche Isomorphismus.

Es sei nun k gerade, und es seien $\beta \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(X)$, $\gamma \in \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge X)$ zwei Elemente, so dass $f^!(\gamma) = \varphi(\beta)$, d.h. $\gamma = B(\beta)$. Man berechnet mit Hilfe von (1.5), (1.7) und der Natürlichkeit von ψ^k:

$$\begin{aligned} f^! \psi^k(\gamma) &= \psi^k(\varphi(\beta)) = \psi^k[p_1^!(\nu) \cdot p_2^!(\beta)] = \frac{k^2}{2} \varepsilon p_1^!(\nu) \cdot p_2^! \psi^k(\beta) \\ &= p_1^!(\nu) \cdot p_2^! \left(\frac{k^2}{2} \varepsilon \psi^k(\beta) \right) = \varphi \left(\frac{k^2}{2} \varepsilon \psi^k(\beta) \right), \end{aligned}$$

also ist

$$\psi^k(B(\beta)) = B\left(\frac{k^2}{2} \varepsilon \psi^k(\beta) \right).$$

Der Fall k ungerade ist analog und 1.11 somit bewiesen.

§ 2. Konstruktion von Q_n

Es sei ω das Blakers-Massey Erzeugende von $\pi_6(S^3) \cong \mathbf{Z}_{12}$, und es sei E_n, $n=0, 1, 2, \ldots, 11$, der Totalraum des durch $n \cdot \omega$ klassifizierten S^3-Prinzipalbündels über S^7. (Das Element ω ist durch $E_1 = Sp(2)$ charakterisiert). Nach [12, Prop. 2.1] kann E_n mit der Zellenstruktur $(S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup e^{10}$ versehen werden.

Wir betrachten nun allgemein einen CW-Komplex der Form

$$X = (S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup e^{10}, \qquad n\omega \in \pi_6(S^3),$$

(d.h. die anheftende Abbildung von e^{10} ist beliebig) und nehmen an, dass X eine Hopf-Multiplikation

$$m: X \times X \to X$$

besitze. Es sei PX die durch diese Multiplikation bestimmte projektive Ebene [8]. Wir identifizieren den Raum PX mit dem Abbildungskegel der Hopfkonstruktion $H(m)$ von m (siehe [15]),

$$X * X \xrightarrow{f = H(m)} \Sigma X \xrightarrow{f_1} C_f = PX \tag{2.0}$$

(Es sei $X * X$ der „join" von X mit sich selbst, und Σ sei die reduzierte Suspension.)

Der ganzzahlige Kohomologiering von PX kann nach [8] zerlegt werden in

$$H^*(PX) = A \oplus S,$$

wobei A ein Unterring der Form

$$A \cong \mathbf{Z}[x, y]/(x^3, x^2y, xy^2, y^3), \qquad x \in H^4(PX), \qquad y \in H^8(PX) \tag{2.1}$$

ist, d.h. A ist eine geschnittene Polynomalgebra mit zwei Erzeugenden. Mit der exakten Kohomologiefolge von f (siehe (2.0)) ergibt sich überdies [8]

$$A = \bigoplus_{r=0}^{4} H^{4r}(PX); \tag{2.2}$$

(d.h. S enthält keine Elemente in den Dimensionen 0, 4, 8, 12 und 16).

Leider lässt sich der Ring $\mathbf{KO}^*(PX)$ und damit $\mathbf{L}(PX)$ nicht ohne weiteres berechnen; das Vorhandensein von S erschwert die Bestimmung der Differentiale in der Atiyah-Hirzebruch-Spektralreihe der $\mathbf{KO}$-Theorie. Wir konstruieren deshalb einen CW-Komplex, dessen ganzzahliger Kohomologiering mit A identisch ist.

Es sei $Z_n = S^3 \cup_{n\omega} e^7$. Im Blick auf (2.0) bewirkt die Einbettung $j: Z_n \subsetneq X$ ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma Z_n \arrow[d, "\Sigma j"'] \arrow[dr, "i"] & \\
Z_n * Z_n \arrow[r, "g=H(m)\circ(j*j)"] \arrow[d, "j*j=k"] & \Sigma X \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "="] & C_g = Q_n \arrow[d, "l"] \\
X * X \arrow[r, "f=H(m)"] & \Sigma X \arrow[r, "f_1"] & C_f = PX,
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

dabei sei $C_g = Q_n$ der Abbildungskegel von g, l die induzierte Abbildung und g_1, f_1 die kanonischen Inklusionen. Die Abbildung $i = g_1 \circ \Sigma_j$ bettet den CW-Komplex $\Sigma Z_n = \Sigma(S^3 \cup_{n\omega} e^7) = S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8$ als Teilkomplex in Q_n ein (wir nehmen an, dass $H(m)$ zellulär sei). Q_n ist der von uns gesuchte CW-Komplex.

2.4. SATZ. *Falls der* CW-*Komplex* $(S^3 \cup_{n\omega} e^7) \cup e^{10}$ *eine Hopf-Multiplikation besitzt, so gibt es einen* CW-*Komplex* Q_n, *der den beiden folgenden Bedingungen unterworfen ist:*

(a) *Der ganzzahlige Kohomologiering von* Q_n *ist gegeben durch:*

$$H^*(Q_n) \cong \mathbf{Z}[x, y]/(x^3, x^2y, xy^2, y^3); \qquad x \in H^4(Q_n), \qquad y \in H^8(Q_n).$$

(b) Q_n *besitzt* $\Sigma Z_n = S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8$ *als Teilkomplex. Ist* $i: \Sigma Z_n \hookrightarrow Q_n$ *die Einbettung, so erzeugt das Element* $i^*(x)$ *bzw.* $i^*(y)$ *die Gruppe* $H^4(\Sigma Z_n) \cong \mathbf{Z}$ *bzw.* $H^8(\Sigma Z_n) \cong \mathbf{Z}$.

Beweis. Wir zeigen (a) und (b) für den vorhin konstruierten CW-Komplex $Q_n = C_g$ mit Teilkomplex ΣZ_n. Aus (2.3) erhalten wir einen Homomorphismus der exakten Kohomologiefolge von f in diejenige von g.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{r-1}(\Sigma X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "="] & H^{r-1}(X * X) \arrow[r] \arrow[d, "k^*"] & H^r(C_f) \arrow[r] \arrow[d, "l^*"] & H^r(\Sigma X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "="] & H^r(X * X) \arrow[r] \arrow[d, "k^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{r-1}(\Sigma X) \arrow[r, "g^*"] & H^{r-1}(Z_n * Z_n) \arrow[r] & H^r(C_g) \arrow[r] & H^r(\Sigma X) \arrow[r, "g^*"] & H^r(Z_n * Z_n) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Der Homomorphismus k^* ist vollständig bekannt, und man beweist leicht mit Hilfe des Fünfer-Lemmas, dass

$$\bigoplus_{s=1}^{4} H^{4s}(C_f) \cong \bigoplus_{s=1}^{4} H^{4s}(C_g) = \tilde{H}^*(C_g)$$

Mit (2.2) erhält man dann einen Ringisomorphismus

$$l^* \mid A: \quad A \cong H^*(C_g),$$

und es folgt (a) unseres Satzes aus (2.1).

Es bleibt zu zeigen, dass die Elemente $i^*(x)$ und $i^*(y)$ die entsprechenden Kohomologiegruppen von ΣZ_n erzeugen; dies folgt aus der exakten Sequenz von g und $i = g_1 \circ \Sigma_j$. Somit ist 2.4 bewiesen.

§3. Die ψ-Operationen auf $\mathbf{L}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$

In diesem Abschnitt soll der L-Ring samt ψ-Operationen für $\Sigma Z_n = S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8$, $n\Sigma\omega \in \pi_7(S^4)$, bestimmt werden. Diese Ergebnisse werden dann in §4 benützt, um Information über die ψ-Operationen auf $\mathbf{L}(Q_n)$ zu erhalten.

Bemerkung. Wir verzichten auf eine allgemeine Betrachtung der ψ-Operationen auf $\mathbf{L}(S^{2q} \cup e^{2m})$; im Sinne von [3] würde dies ein Studium der quaternionalen e-Invariante e_H nach sich ziehen. Die reelle e-Invariante e_R und e_H sind durch Hilfssatz 1.11 miteinander verknüpft.

Die Kofaserung $S^4 \overset{j}{\hookrightarrow} S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8 \xrightarrow{p} S^8$ induziert exakte Sequenzen

$$\begin{array}{l} 0 \to \underset{\cong \mathbf{Z}}{\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)} \xrightarrow{p^!} \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8) \xrightarrow{j^!} \underset{\cong \mathbf{Z}}{\widetilde{\mathbf{KO}}(S^4)} \to 0 \\ 0 \to \underset{\cong \mathbf{Z}}{\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^8)} \xrightarrow{p^!} \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8) \xrightarrow{j^!} \underset{\cong \mathbf{Z}}{\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)} \to 0 \end{array} \tag{3.1}$$

Der Ring $\mathbf{L}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8) = \mathbf{KO}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8) \oplus \mathbf{KSP}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ ist also torsionsfrei, und es lassen sich in ihm spezielle Erzeugende auszeichnen.

3.2 SATZ. *Es sei $\nu \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ ein Element, das under $j^!$ auf ein Erzeugendes von $\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)$ abgebildet wird, und es sei $\mu \in \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ das $p^!$-Bild eines Erzeugenden von $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)$. Dann gilt:*

(i) *ν, $\varepsilon\nu$, μ, $\varepsilon\mu$ bilden eine Basis der freien abelschen Gruppe $\widetilde{\mathbf{L}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ (ε ist das vom trivialen $\mathbf{H}$-Linienbündel repräsentierte Element; μ, $\varepsilon\nu \in \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ und ν, $\varepsilon\mu \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$).*

(ii) $\nu^2 = \nu\mu = \mu^2 = 0$

$$\text{(iii)} \quad \psi^k(\nu) = \begin{cases} \dfrac{k^2}{2}\varepsilon\nu + q(n)\cdot\dfrac{k^2(k^2-1)}{6}\mu, & k \text{ gerade} \\[2ex] k^2\nu + q(n)\cdot\dfrac{k^2(k^2-1)}{12}\varepsilon\mu, & k \text{ ungerade}, \end{cases}$$

dabei ist $q(n)$ eine ganze Zahl der Form: $q(n) = n \cdot m + 12l$, m teilerfremd zu 12.

(iv) $\psi^k(\mu) = k^4\mu$

Beweis. Es seien $\nu_{\mathbf{R}} \in \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4)$, $\nu_{\mathbf{H}} \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)$, $\mu_{\mathbf{R}} \in \widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)$ und $\mu_{\mathbf{H}} \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^8)$ erzeugende Elemente. In $\mathbf{L}(S^4)$ gilt nach (1.6):

$$\nu_{\mathbf{R}} = \pm\, \varepsilon \nu_{\mathbf{H}} \tag{3.3}$$

Analog wie im Beweis von (1.6) zeigt man

$$\mu_{\mathbf{H}} = \pm\, \varepsilon \mu_{\mathbf{R}} \tag{3.4}$$

(Wir identifizieren die Elemente $\alpha \in \mathbf{KO}(X)$ bzw. $\beta \in \mathbf{KSP}(X)$ mit ihren Bildern $(\alpha, 0)$ bzw. $(0, \beta)$ in $L(X)$). Sei $\nu \in \mathbf{KSP}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ ein Element mit $j^!(\nu) = \nu_{\mathbf{H}}$. Aus (3.2), (3.3) und (3.4) folgt nun, dass die Elemente

$$\nu, \quad \varepsilon\nu, \quad \mu = p^!(\mu_{\mathbf{R}}), \quad \varepsilon\mu = p^!(\varepsilon\mu_{\mathbf{R}})$$

eine Basis von $\mathbf{L}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)$ bilden. Die Aussage (ii) ergibt sich, weil $S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8 = \Sigma Z_n$ eine Suspension ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die ψ-Operationen durch (iii) und (iv) gegeben sind. Dazu betrachten wir die $\widetilde{\mathbf{KO}}$-Theorie der Kofaserungen

$$S^8 \overset{j}{\hookrightarrow} S^8 \cup_\alpha e^{12} \overset{p}{\to} S^{12}, \qquad \alpha \in \pi_{11}(S^8) = \pi_3^S \cong \mathbf{Z}_{24}$$

In $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8 \cup_\alpha e^{12}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ können wir wiederum Erzeugende ξ und η so wählen, dass ξ von $j^!$ auf ein Erzeugendes von $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)$ abgebildet wird und η das $p^!$-Bild eines Erzeugenden von $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^{12})$ ist. Für die ψ-Operationen gilt nach Adams [3]:

$$\psi^k(\xi) = k^4 \xi + \lambda(\alpha) \cdot k^4 (k^2 - 1)\eta,$$

dabei ist $\lambda(\alpha)$ eine von k unabhängige rationale Zahl; $\lambda(\alpha) \pmod 1$ ist die sogenannte e_R-Invariante von α [3, §5]. Der Homomorphismus

$$\begin{aligned} e'_R : \pi_{11}(S^8) &\to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \alpha &\mapsto \lambda(\alpha) \pmod 1 \end{aligned}$$

ist injektiv (siehe [3, 7.17]), und nach Toda [16, (5.5)] hat das Element $\Sigma^5 \omega \in \pi_{11}(S^8) \cong$ $\cong \mathbf{Z}_{24}$ die Ordnung 12. Es ergibt sich somit:

$$\lambda(n\Sigma^5\omega) = n \cdot \frac{m}{12} + l; \qquad m, l \in \mathbf{Z} \quad \text{und} \quad m \text{ teilerfremd zu } 12.$$

Wir setzen

$$q(n) = n \cdot m + 12 l$$

und erhalten für die ψ-Operationen auf $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8 \cup_{n\Sigma^5\omega} e^{12})$

$$\psi^k(\xi) = k^4\xi + q(n)\cdot\frac{k^4(k^2-1)}{12}\eta \tag{3.5}$$

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^8) & \to & \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8) & \to & \widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4) & \to 0 \\
& \cong\downarrow B & & \cong\downarrow B & & \cong\downarrow B & \\
0 \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge S^8) & \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge (S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8)) & \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^4 \wedge S^4) & \to 0 \\
& \| & & \| & & \| & \\
0 \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^{12}) & \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^8 \cup_{n\Sigma^5\omega} e^8) & \to & \widetilde{\mathbf{KO}}(S^8) & \to 0
\end{array}$$

ist kommutativ, und es folgt, dass (3.5) insbesondere für $\xi = B(\nu)$, $\eta = (\varepsilon\mu)$ richtig ist.

Mit (1.10), (3.5) und (1.1) berechnet man nun, falls k gerade ist:

$$B\left(\frac{k^2}{2}\varepsilon\psi^k(\nu)\right) = \psi^k(B(\nu)) = k^4 B(\nu) + q(n)\frac{k^4(k^2-1)}{12}B(\varepsilon\mu)$$
$$= B\left(k^4\nu + q(n)\frac{k^4(k^2-1)}{12}\varepsilon\mu\right)$$

d.h.

$$\varepsilon\psi^k(\nu) = 2k^2\nu + q(n)\frac{k^2(k^2-1)}{6}\varepsilon\mu$$

und durch Multiplikation mit ε erhält man

$$\psi^k(\nu) = \frac{k^2}{2}\varepsilon\nu + q(n)\frac{k^2(k^2-1)}{6}\mu.$$

Der Fall k ungerade wird analog behandelt.

Nach [2, 5.2] ist $\psi^k(\mu_{\mathbf{R}}) = k^4\mu_{\mathbf{R}}$, und es folgt $\psi^k(\mu) = k^4\mu$. Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

§4. Bestimmung des Ringes $\mathbf{L}(Q_n)$ und seiner ψ-Operationen

Es sei Q_n der in §2 konstruierte CW-Komplex mit Teilkomplex $\Sigma Z_n = S^4 \cup_{n\Sigma\omega} e^8$. Nach Satz 2.4 gilt für die ganzzahlige Kohomologie:

(a) $H^*(Q_n) \cong \mathbf{Z}[x, y]/(x^3, x^2y, xy^2, y^3)$; $x \in H^4(Q_n)$, $y \in H^8(Q_n)$.

(b) Der Teilkomplex $\Sigma Z_n \overset{i}{\subset} Q_n$ trägt die Erzeugenden x und y von $H^*(Q_n)$, d.h. das Element $i^*(x)$ bzw. $i^*(y)$ erzeugt die Gruppe $H^4(\Sigma Z_n) \cong \mathbf{Z}$ bzw. $H^8(\Sigma Z_n) \cong \mathbf{Z}$.

Die $\mathbf{L}$-Theorie von Q_n ist im folgenden Satz beschrieben.

4.1. SATZ. *Der Ring* $\mathbf{L}(Q_n)$ *ist torsionsfrei und es gibt in ihm Elemente* $\alpha \in \widetilde{\mathbf{KSP}}(Q_n)$, $\beta \in \widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)$ *mit den Eigenschaften*:

(i) *Es ist* $\mathbf{L}(Q_n) \cong \mathbf{L}(pt) \otimes \mathbf{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3)$; *insbesondere bilden die Elemente* $\varepsilon\alpha$, β, α^2, $\varepsilon\alpha\beta$, β^2 *bzw.* α, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\alpha^2$, $\alpha\beta$, $\varepsilon\beta^2$ *eine Basis der freien abelschen Gruppe* $\widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)$ *bzw.* $\widetilde{\mathbf{KSP}}(Q_n)$.

$$\text{(ii)}\quad \psi^k(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{k^2}{2}\,\varepsilon\alpha + q(n)\,\dfrac{k^2(k^2-1)}{6}\,\beta + s_k\alpha^2 + t_k\varepsilon\alpha\beta + u_k\beta^2, & k \text{ gerade} \\[2ex] k^2\alpha + q(n)\,\dfrac{k^2(k^2-1)}{12}\,\varepsilon\beta + s_k\varepsilon\alpha^2 + t_k\alpha\beta + u_k\varepsilon\beta^2, & k \text{ ungerade}, \end{cases}$$

dabei sind s_k, t_k, $u_k \in \mathbf{Z}$ *und* $q(n)$ *ist eine ganze Zahl der Form:* $q(n) = n \cdot m + 12l$, m *teilerfremd zu* 12.

$$\text{(iii)}\quad \psi^k(\beta) = k^4\beta + v_k\varepsilon\alpha\beta + w_k\beta^2, \qquad v_k, w_k \in \mathbf{Z}.$$

Beweis. Nach (1.9) gibt es einen Ringisomorphismus $\mathbf{L}(Q_n) \cong \mathbf{KO}^0(Q_n) \oplus \mathbf{KO}^4(Q_n)$, und wir betrachten deshalb die Atiyah-Hirzebruch-Spektralreihe [6] von Q_n für die $\mathbf{KO}$-Theorie. Weil $H^*(Q_n)$ torsionsfrei ist, erhält man für den E_2-Term:

$$E_2(Q_n) \cong H^*(Q_n) \otimes \mathbf{KO}^*(pt).$$

Aus der besonderen Struktur von $H^*(Q_n)$ und der Derivationseigenschaft der Differentiale [10] folgt leicht, dass die Spektralreihe zusammenbricht. (Est ist $d_n(x \otimes 1) = d_n(y \otimes 1) = 0$, $n \geqslant 2$, und trivialerweise gilt $d_n(1 \otimes \xi) = 0$, $\xi \in \mathbf{KO}^*(pt)$.) Somit ist

$$E_\infty^{r,s}(Q_n) \cong H^r(Q_n) \otimes \mathbf{KO}^s(pt), \qquad r \in \mathbf{Z}, \qquad s \in \mathbf{Z}_8,$$

und als Ring ist

$$E_\infty(Q_n) \cong H^*(Q_n) \otimes \mathbf{KO}^*(pt).$$

Für den zum filtrierten Ring $\mathbf{KO}^0(Q_n) \oplus \mathbf{KO}^4(Q_n)$ (Gerüstfiltrierung) assoziierten graduierten Ring ergibt sich daher

$$\mathfrak{G}(\mathbf{KO}^0(Q_n) \oplus \mathbf{KO}^4(Q_n)) \cong H^*(Q_n) \otimes (\mathbf{KO}^0(pt) \oplus \mathbf{KO}^4(pt))$$

(Man beachte, dass $H^*(Q_n)$ nur in den Dimensionen $4m$ von null verschieden ist.) Auf Grund von (1.10) ist dann

$$\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n) \cong (\mathbf{Z}[x, y]/(x^3, x^2y, xy^2, y^3)) \otimes (\mathbf{KO}^0(pt) \oplus \mathbf{KO}^4(pt)), \tag{4.2}$$

und es folgt insbesondere, dass $\mathbf{L}(Q_n)$ keine Torsion besitzt.

Wir wählen nun ein Element $\alpha\in\widetilde{\mathbf{KSP}}(Q_n)\subset\mathbf{L}(Q_n)$ bzw. $\beta\in\widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)\subset\mathbf{L}(Q_n)$, welches $x\otimes 1\in\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$ bzw. $y\otimes 1\in\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$ repräsentiert. (Wir fassen $x\otimes 1$, $y\otimes 1$ über (4.2) als Elemente von $\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$ auf.) Das Element $\varepsilon\in\widetilde{\mathbf{KSP}}(Q_n)\subset\mathbf{L}(Q_n)$ repräsentiert $1\otimes\varepsilon'\in\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$, wobei ε' ein geeignet gewähltes Erzeugendes von $\mathbf{KO}^4(pt)\cong\mathbf{Z}$ ist. Man sieht nun leicht, dass α, $\beta\varepsilon$, $\alpha^2\varepsilon$, $\alpha\beta$, $\beta^2\varepsilon$ bzw. $\alpha\varepsilon$, β, α^2, $\alpha\beta\varepsilon$, β^2 eine Basis der freien abelschen Gruppe $\widetilde{\mathbf{KSP}}(Q_n)$ bzw. $\widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)$ bilden; denn die durch (4.3) gegebene Multiplikation auf $\mathfrak{G}(\mathbf{KO}^0(Q_n)\oplus\mathbf{KO}^4(Q_n))\cong\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$ stimmt überein mit derjenigen, die durch das Produkt in $\mathbf{L}(Q_n)$ auf $\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$ induziert wird [10] (d.h. $\alpha\varepsilon, \alpha^2,\ldots\in\mathbf{L}(Q_n)$ repräsentieren die Elemente $x\otimes\varepsilon', x^2\otimes 1,\ldots\in\mathfrak{G}\mathbf{L}(Q_n)$). Der Ringhomomorphismus $a:\mathbf{L}(Q_n)\to\mathbf{LU}(Q_n)$ ist injektiv und in $\widetilde{\mathbf{LU}}(Q_n)$ verschwinden Produkte mit drei Faktoren (es ist $\mathbf{KU}^*(Q_n)\otimes\mathbf{Q}\cong H^*(Q_n;\mathbf{Q})=\mathbf{Q}[x,y]/(x^3, x^2y, y^2x, y^3)$); somit erhält man $\alpha^3=\alpha^2\beta=\alpha\beta^2=\beta^3=0$, und (i) von 4.1 ist bewiesen.

Wir betrachten nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^4 \overset{j}{\hookrightarrow} & S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8 & \overset{i}{\longrightarrow} Q_n \\ & \downarrow{\scriptstyle p} & \\ & S^8 & \end{array}$$

Man schliesst ohne Schwierigkeit (z.B. mit dem Spektralreihen-Homomorphismus $\{E_r(i):E_r(Q_n)\to E_r(S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8)\}$), dass das Element $j^!\circ i^!(\alpha)$ ein Erzeugendes von $\widetilde{\mathbf{KSP}}(S^4)$ ist, und dass $i^!(\beta)=p^!(\mu_{\mathbf{R}})$ für ein Erzeugendes $\mu_{\mathbf{R}}$ von $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)$. D.h. die Elemente $i^!(\alpha)$ und $i^!(\beta)$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3.2. Wir erhalten nun die ψ-Operationen auf α mit $\psi^k\circ i^!=i^!\circ\psi^k$, 3.1 (ii) und $i^!(\alpha^2)=i^!(\alpha\beta)=i^!(\beta^2)=0$. (Es ist $S^4\cup_{n\Sigma\omega}e^8$ eine Suspension).

Es bleibt die Aussage (iii) von 4.1 zu beweisen. Auf Grund der obigen Betrachtungen und 3.2 (iii) ist es klar, dass

$$\psi^k(\beta)=k^4\beta+m_k\alpha^2+v_k\varepsilon\alpha\beta+w_k\beta^2\,;\qquad m_k, v_k, w_k\in\mathbf{Z}.$$

Wir haben $m_k=0$ zu zeigen. Dies folgt aus der Tatsache, dass β und α^2 in $\mathbf{KO}(Q_n)$ denselben Filtrationsgrad haben. (Weil $\widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)$ keine Torsion besitzt, sind sowohl das Komplexifizieren $c:\widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n)\to\widetilde{\mathbf{KU}}(Q_n)$, als auch der Chern'sche Charakter $ch:\widetilde{\mathbf{KU}}(Q_n)\to H^*(Q_n;\mathbf{Q})$ injektiv. Mit [2, 5.1 (vi)] berechnet man nun:

$$ch\circ\psi^k\circ c(\beta)=k^4ch_8[c(\beta)]+\text{höhere Terme}$$
$$ch\circ c\circ\psi^k(\beta)=k^4ch_8[c(\beta)]+m_kch_8[c(\alpha^2)]+\text{höhere Terme}$$

d.h. es ist $m_k=0$, denn $ch_8(c(\alpha^2)\neq 0$ [6, 2.5 (i)]). Satz 4.1 ist somit bewiesen.

§5. Beweis von Satz B

Es soll nun der in der Einleitung formulierte Satz B mit Hilfe des Ringes $\mathbf{L}(Q_n)$ und seiner ψ-Operationen bewiesen werden. Die L-Theorie eines CW-Komplexes Q_n, welcher den Bedingungen (a) und (b) von Satz B genügt ist durch Satz 4.1 gegeben.

Mit (1.2) und (4.1) erhalten wir für die Elemente ε, α, β aus $\mathbf{L}(Q_n)$:

$$\begin{aligned}
\psi^2(\varepsilon) &= 2\\
\psi^2(\beta) &= 2^4\beta + v_2\varepsilon\alpha\beta + w_2\beta^2\\
\psi^2(\alpha) &= 2\varepsilon\alpha + 2q(n)\beta + s_2\alpha^2 + t_2\varepsilon\alpha\beta + u_2\beta^2,\\
\psi^3(\varepsilon) &= \varepsilon\\
\psi^3(\beta) &= 3^4\beta + v_3\varepsilon\alpha\beta + w_3\beta^2\\
\psi^3(\alpha) &= 9\alpha + 6q(n)\varepsilon\beta + s_3\varepsilon\alpha^2 + t_3\alpha\beta + u_3\varepsilon\beta^2
\end{aligned}$$

Es gilt allgemein $\psi^2(\xi)=\xi^2-2\lambda^2(\xi)$ [13, 12 (2.6)], d.h. für den Koeffizienten w_2 von β^2:

$$w_2 \equiv 1 \pmod 2 \tag{5.1}$$

Wir werden im folgenden die Relation $\psi^2\circ\psi^3=\psi^3\circ\psi^2$ ausnützen (siehe (1.5)) und berechnen dazu:

$$\begin{aligned}
\psi^2\circ\psi^3(\beta) &= 2^4\cdot 3^4\beta + (3^4v_2 + 2^6v_3)\varepsilon\alpha\beta + (3^4w_2 + 2^6q(n)v_3 + 2^8w_3)\beta^2\\
\psi^3\circ\psi^2(\beta) &= 2^4\cdot 3^4\beta + (2^4v_3 + 3^6v_2)\varepsilon\alpha\beta + (2^4w_3 + 2^3 3^5 q(n)v_2 + 3^8w_2)\beta^2
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $\varepsilon\alpha\beta$ bzw. β^2 erhalten wir die beiden Gleichungen

$$2v_3 = 3^3v_2, \qquad 30w_3 + 2^3q(n)v_3 = 10\cdot 3^4w_2 + 3^5q(n)v_2$$

und damit

$$3w_3 = 3^4w_2 + q(n)v_3$$

Mit (5.1) und der Tatsache, dass $q(n)\equiv n \pmod 2$ (siehe 4.1 (ii)) folgt daraus

$$w_3 \equiv 1 + n\cdot v_3 \pmod 2 \tag{5.2}$$

Für das Element α berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\psi^2\circ\psi^3(\alpha) &= 18\varepsilon\alpha + 210q(n)\beta + A\alpha^2 + B\varepsilon\alpha\beta\\
&\quad + (3^2u_2 + 2^2\cdot 3q(n)w_2 + 2^3q(n)^2s_3 + 2^5q(n)t_3 + 2^9u_3)\beta^2\\
\psi^2\circ\psi^2(\alpha) &= 18\varepsilon\alpha + 210q(n)\beta + C\alpha^2 + D\varepsilon\alpha\beta\\
&\quad + (2^3u_3 + 2q(n)w_3 + 2^3\cdot 3^3q(n)^2s_2 + 2^3\cdot 3^5q(n)t_2 + 3^8u_2)\beta^2
\end{aligned}$$

dabei sind die Koeffizienten A, B, C, D gewisse Ausdrücke, die uns im folgenden nicht interessieren werden. Wir vergleichen die Koeffizienten von β^2 modulo 8 und erhalten:

$$2^2 \cdot 3q(n) w_2 \equiv 2q(n) w_3 + (3^8 - 3^2) u_2 \equiv 2q(n) w_3 \pmod 8,$$

denn $3^8 - 3^2 \equiv 0 \pmod 8$. Es ist also:

$$6q(n) w_2 \equiv q(n) w_3 \quad \pmod 4,$$

und damit, weil $q(n) \equiv n$ oder $3n \pmod 4$ (siehe 4.1 (ii)):

$$n w_3 \equiv 2n w_2 \quad \pmod 4$$

Aus (5.1) folgt:

$$n \cdot w_3 \equiv 2n \quad \pmod 4. \tag{5.3}$$

Die Kongruenzen (5.2) und (5.3),

$$\begin{aligned} w_3 + n \cdot v_3 &\equiv 1 \quad \pmod 2 \\ n \cdot w_3 &\equiv 2n \quad \pmod 4, \end{aligned}$$

implizieren nun $n \not\equiv 2 \pmod 4$, und Satz B ist somit bewiesen.

Appendix

In diesem Abschnitt wenden wir uns kurz der Frage zu: Für welche n ($n \not\equiv 2 \pmod 4$) gibt es auf E_n und S^7 Hopf-Multiplikationen, sodass die Bündelprojektion $\pi: E_n \to S^7$ eine H-Abbildung ist?

Wir erhalten das folgende negative Ergebnis:

SATZ. *Die Projektion $\pi: E_n \to S^7$ ist für ungerades n keine H-Abbildung, wie immer man auch die H-Raumstrukturen auf E_n und S^7 wählt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\pi: E_n \to S^7$ eine H-Abbildung sei (für gewisse Multiplikationen auf E_n und S^7) und erhalten das folgende homotopie-kommutative Diagramm (Bezeichnungen wie in § 2):

$$\begin{tikzcd} & & \Sigma Z_n \arrow[dl, "\Sigma j"'] \arrow[dr, "i"] & \\ Z_n * Z_n \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma E_n \arrow[rr, "g_1"] \arrow[d, "\Sigma\pi"] & & Q_n \arrow[d, "\sigma"] \\ S^7 * S^7 \arrow[r] & \Sigma S^7 \arrow[rr, "h_1"] & & PS^7 \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Die Komposition $\Sigma\pi \circ \Sigma j$ fällt mit der Projektion p der Kofaserung $S^4 \hookrightarrow \Sigma Z_n \xrightarrow{p} S^8 = \Sigma S^7$

zusammen. Nach Browder-Thomas [8] ist $H^*(PS^7; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[z]/(z^3)$; dabei ist $z \in H^8(PS^7, \mathbf{Z})$ und $h_1^*(z)$ erzeugt die Gruppe $H^8(S^8; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Es folgt:

$\mathbf{KO}(PS^7) \cong \mathbf{Z}[\gamma]/(\gamma^3)$, wobei $h_1^!(\gamma)$ ein Erzeugendes von $\widetilde{\mathbf{KO}}(S^8)$ ist.
Mit $i^! \circ \sigma^!(\gamma) = p^! \circ h_1^!(\gamma)$ schliesst man nun (siehe Beweis von Satz 4.1):

$$\sigma^!(\gamma) = \pm \beta + a\alpha^2 + b\varepsilon\alpha\beta + c\beta^2 \in \widetilde{\mathbf{KO}}(Q_n), \qquad a, b, c \in \mathbf{Z}; \tag{6.2}$$

dabei sind α und β die in § 4 definierten Erzeugenden von $\mathbf{L}(Q_n)$. Wir können γ so wählen, dass das Vorzeichen von β in (6.2) positiv wird.

Es ist $\psi^3(\gamma) = 3^4\gamma + d \cdot \gamma^2$, $d \in \mathbf{Z}$, und wir berechnen mit (6.2) und den in § 5 zusammengestellten Formeln für $\psi^3(\alpha)$ und $\psi^3(\beta)$:

$$\sigma^! \circ \psi^3(\gamma) = 3^4\beta + 3^4 a\alpha^2 + 3^4 b\varepsilon\alpha\beta + (3^4 + d)\beta^2$$
$$\psi^3 \circ \sigma^!(\gamma) = 3^4\beta + 3^4 a\alpha^2 + (v_3 + 2^2 3^3 q(n)\, a + 3^6 b)\varepsilon\alpha\beta + A\beta^2$$

(A ist ein Ausdruck der uns im folgenden nicht interessiert). Aus $\psi^3 \circ \sigma^! = \sigma^! \circ \psi^3$ folgt durch Vergleich der Koeffizienten von $\varepsilon\alpha\beta$:

$$v_3 + 2^2 3^3 q(n) a + (3^6 - 3^4) b = 0$$

d.h. es ist

$$v_3 \equiv 0 \pmod 2. \tag{6.3}$$

Wir betrachten nun die Kongruenzen (5.2) und (5.3),

$$w_3 + n \cdot v_3 \equiv 1 \pmod 2$$
$$n \cdot w_3 \equiv 2n \pmod 4.$$

Falls *n ungerade* ist, erhält man damit

$$v_3 \equiv 1 \pmod 2.$$

Zu dieser letzteren Tatsache steht (6.3) im Widerspruch, und unser Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Die Frage, ob die Projektion $\pi: E_4 \to S^7$ eine H-Abbildung ist, bleibt mit unserer Methode unbeantwortet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS, J. F., *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. *72* (1960), 20–104.

[2] ADAMS, J. F., *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. *75*, No. 3 (1962), 603–632.

[3] ADAMS, J. F., *On the groups J(X) IV*, Topology *5* (1966), 21–71.

[4] ADAMS, J. F., *Lectures on Lie groups* (W. A. Benjamin, 1969).

[5] ADAMS, J. F. and ATIYAH, M. F., *K-theory and the Hopf invariant*, Quart. J. Math. Oxford *17* (1966), 31–38.

[6] ATIYAH, M. F. and HIRZEBRUCH, F., *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proc. Sympos. pure Math. Vol. III. Am. Math. Soc. (1961), 7–38.
[7] BOTT, R., *Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité*, Bull. Soc. math. France *87* (1959), 293–310.
[8] BROWDER, W. and THOMAS, E., *On the projective plane of an H-space*, Ill. J. of Math. *7* (1963), 492–502.
[9] CURTIS, M. and MISLIN, G., *H-spaces which are bundles over* S^7, preprint (1970).
[10] DOLD, A., *Relation between ordinary and extraordinary cohomology*, Coll. Alg. Topology (Aarhus, 1962).
[11] END, W., *Über Adams-Operationen I*, Inventiones Math. *9* (1969), 45–60.
[12] HILTON, P. J. and ROITBERG, J., *On principal* S^3*-bundles over spheres*, Ann. of Math. *90* (1969), 91–107.
[13] HUSEMOLLER, D., *Fibre bundles* (Mc Graw-Hill, 1966).
[14] STASHEFF, J. D., *Manifolds of the homotopy type of (Non-Lie) groups*, Bull. AMS *75* (1965), 998–1000.
[15] STASHEFF, J. D., *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Mathematics No. 161 (Springer, 1970).
[16] TODA, H., *Composition methods in the homotopy groups of spheres*, Ann. of Math. Studies, No. 49 (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962).
[17] ZABRODSKY, A., *The classification of simply connected H-spaces with three cells I*, to appear.
(18) STASHEFF, I. D., *H-Space problems*, siehe Lecture Notes in Mathematics No. 196, (Springer, 1971).

Eingegangen der 7. Juli 1971