Sur certaines propriétés des représentations unitaires des groupes localement compacts

A. Derighetti

Introduction

On sait que la représentation régulière ϱ d'un groupe localement compact G contient faiblement la représentation identité i_G (dans un C-espace de dimension 1) si et seulement si pour tout $f \in C_{00}(G)$ (ensemble des fonctions sur G complexes, continues et à support compact) la distance (pour la norme L^1) de 0 à l'enveloppe convexe des translatés de f est $|\int_G f(x)\,dx|$ (où dx est une mesure de Haar invariante à gauche). On s'intéresse dans ce travail à des résultats analogues concernant des représentations π unitaires continues arbitraires de G.

Munissons $C_{00}(G)$ de la semi-norme $f \mapsto \|\pi(f)\|$ où $\|\pi(f)\|$ est la norme de l'opérateur $\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx$. Sans qu'il s'agisse, à proprement parler, d'une généralisation du résultat énoncé ci-dessus, il résulte facilement de la proposition 15 ([1]) que π contient faiblement i_G si et seulement si la distance, pour la semi-norme $f \mapsto \|\pi(f)\|$, de 0 à l'enveloppe convexe des translatés de f est égale à $|\int_G f(x)\,dx|$. Nous montrons aussi (proposition 2) que π ne contient pas faiblement i_G si et seulement si la distance précédente est nulle pour tout $f \in C_{00}(G)$. Soit H un sous-groupe fermé arbitraire de G. On donne une estimation de la distance, pour la semi-norme précédente, de 0 à l'ensemble des translatés de f par H pour tout $f \in C_{00}(G)$ (corollaire de la proposition 4). On indique de plus, en termes de contenance faible, dans quelles circonstances cette distance est nulle pour tout $f \in C_{00}(G)$. Ceci nous conduit à tenter de caractériser certaines propriétés des représentations unitaires continues du sous-groupe fermé H par celles de $C_{00}(G)$ muni de semi-normes étroitement liées aux représentations induites sur G depuis H.

L'auteur tient à remercier Monsieur Eymard pour ses utiles suggestions. Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans les Notices of the Amer. Math. Soc. *20* (1973) p. A-273.

1. Contenance et non contenance faibles

Introduisons les notations suivantes:

Σ_G est la famille des représentations unitaires continues de G (toutes les représentations dont il s'agit dans ce travail sont supposées unitaires continues).

Δ_G est la fonction modulaire de G,

M_G est la moyenne biinvariante existant sur l'ensemble $B(G)$ des combinaisons linéaires complexes de fonctions sur G continues de type positif ([10] p. 59–61).

On pose de plus:

$$_a\Phi_b(x)=\Phi(axb) \quad \text{pour tout} \quad \Phi\in\mathbf{C}^G, \quad a,b,x\in G,$$

$$A_xf=\Delta_G(x)\,f_x \quad \text{et} \quad f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}\,\Delta_G(x^{-1}) \quad \text{pour tout} \quad f\in L^1(G).$$

On note $\mathscr{A}$ l'enveloppe convexe de $\{A_x \mid x\in G\}$. De plus pour tout $\pi\in\Sigma_G$, $\mathscr{H}_\pi$ désigne l'espace de Hilbert où π agit, $\omega_\pi(\xi,\eta)$ la fonction définie sur G par $\omega_\pi(\xi,\eta)(x)=(\pi(x)\,\xi,\eta)$ où $\xi,\eta\in\mathscr{H}_\pi$ et $x\in G$.

PROPOSITION 1. *Soit $\pi\in\Sigma_G$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *π contient faiblement i_G,*

(b) $\inf_{A\in\mathscr{A}}\|\pi(Af)\|=|\int_G f(x)\,dx|$ *pour tout $f\in L^1(G)$,*

(c) $\|\pi(f)\|=\int_G f(x)\,dx$ *pour tout $f\in C_{00}(G)$ avec $f\geqslant 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 15 ([1]) pour tout $\pi\in\Sigma_G$ et $f\in L^1(G)$ on a $\inf_{A\in\mathscr{A}}\|\pi(Af)\|\leqslant|\int_G f(x)\,dx|$. De plus d'après Fell ([5]) π contient faiblement i_G si et seulement si $\|\pi(f)\|\geqslant|\int_G f(x)\,dx|$ pour tout $f\in L^1(G)$. Il en résulte d'une part que (a) implique (c) et d'autre part que (a) et (b) sont équivalentes. De (c) on tire que pour tout $f\in C_{00}(G)$ réelle $|\int_G f(x)\,dx|\leqslant\|\pi(f)\|$ d'où pour $f\in C_{00}(G)$ quelconque $2|\int_G f(x)\,dx|\leqslant\|\pi(f)\|+\|\pi(\bar f)\|$ ou encore $2|\int_G f(x)\,dx|\leqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\|\pi(\overline{Af})\|+\|\pi(f)\|$. Le résultat cité au début de cette démonstration nous permet alors d'écrire $2|\int_G f(x)\,dx|\leqslant|\int_G f(x)|+\|\pi(f)\|$ et par suite la propriété (a) est satisfaite.

Remarque. A propos de l'équivalence de (a) et (c) et d'autres développements on pourra consulter [1] p. 234 à 237, [2] et [4] p. 83 à 91.

Soit $\pi\in\Sigma_G$. On désigne par $B_\pi(G)$ l'ensemble des fonctions u sur G complexes continues pour lesquelles il existe un réel positif K tel que $|\int_G fu\,dx|\leqslant K\,\|\pi(f)\|$ pour tout $f\in C_{00}(G)$, le plus petit de ces réels K étant noté $\|u\|$ ([3]).

PROPOSITION 2. *Soit $\pi\in\Sigma_G$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *π ne contient pas faiblement i_G,*

(b) $M_G(u)=0$ *pour tout $u\in B_\pi(G)$,*

(c) $\inf_{A\in\mathscr{A}}\|\pi(Af)\|=0$ *pour tout $f\in L^1(G)$.*

Démonstration. On vérifie tout d'abord que pour tout $\pi\in\Sigma_G$, $f\in L^1(G)$ et $u\in B_\pi(G)$ on a $f*u\in B_\pi(G)$, $\|f*u\|\leqslant\|\pi(\check f)\|\;\|u\|$ et $M_G(f*u)=(\int_G f(x)dx)M_G(u)$. Si π ne contient pas faiblement i_G d'après la proposition 1 pour tout $\varepsilon>0$ il existe $f\in C_{00}(G)$ avec $f\geqslant 0$, $\int_G f(x)\,dx=1$ et $\|\pi(f)\|<\varepsilon$. Soit $u\in B_\pi(G)$ avec $u\neq 0$. On a

$$\left|M_G\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right|=\left|M_G\left(f*\frac{u}{\|u\|}\right)\right|\leqslant\|\pi(\check f)\|<\varepsilon.$$

Il en résulte $M_G(u)=0$, on a ainsi montré que (a) entraîne (b). Supposons qu'il existe $f \in L^1(G)$ avec $\inf_{A \in \mathscr{A}} \|\pi(Af)\| = d > 0$. On peut alors trouver $u \in B_\pi(G)$ avec $\|u\| = 1/d$ et $\mathrm{Re} \int_G Af(x) u(x)\, dx \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. On en tire $|M_G(\check{f}^* * u)| \geqslant 1$ ou encore $|\int_G f(x)\, dx|\ |M_G(u)| \geqslant 1$. On obtient donc que (b) implique (c). Il est de plus banal que (c) entraîne (a).

Remarque. L'équivalence des assertions (a) et (b) de la proposition 2 a été motivée par le résultat suivant dû à Eymard ([4] p. 89 à 91]: π ne contient pas i_G si et seulement si $M_G(\omega_\pi(\xi, \eta)) = 0$ pour tout $\xi, \eta \in \mathscr{H}_\pi$.

Si le groupe G est compact la notion de contenance faible coïncide avec celle, usuelle, de contenance et la moyenne M_G n'est autre que la mesure de Haar normalisée. L'équivalence des assertions (a) et (b) de la proposition 2 est alors un cas particulier des relations d'orthogonalité. Il est ainsi permis de se demander s'il existe un analogue «faible» des relations d'orthogonalité. En fait cela semble peu probable car Fell a montré ([7] p. 508–509) que le groupe euclidien de $\mathbf{R}^3$ admet des représentations irréductibles faiblement inéquivalentes π_1 et π_2 telles que $\pi_1 \otimes \bar{\pi}_2$ contienne faiblement i_G. Remarquons toutefois que si π est une représentation de dimension finie d'un groupe localement compact quelconque G alors

$$M_G(\omega_\pi(\xi, \eta)\, \overline{\omega_\pi(\zeta, \mu)}) = \frac{1}{\dim \pi} (\xi, \zeta)\, \overline{(\eta, \mu)} \quad \text{pour tout} \quad \xi, \eta, \zeta, \mu \in \mathscr{H}_\pi.$$

PROPOSITION 3. *Si $\pi \in \Sigma_G$, π ne contient pas faiblement de représentation de dimension finie si et seulement si $M_G(|u|^2) = 0$ pour tout $u \in B_\pi(G)$.*

Démonstration. Si π contient faiblement une représentation de dimension finie, π en contiendra faiblement une π_1 irréductible de dimension finie. D'après l'observation précédente pour tout $\xi \in \mathscr{H}_{\pi_1}$ avec $\|\xi\| = 1$ on a

$$M_G(|\omega_{\pi_1}(\xi, \xi)|^2) = \frac{1}{\dim \pi_1} \quad \text{d'où} \quad M_G(|\omega_{\pi_1}(\xi, \xi)|^2) \neq 0,$$

or du fait que π_1 est faiblement contenue dans π, $\omega_{\pi_1}(\xi, \xi) \in B_\pi(G)$ ([3] p. 191). On vient ainsi de vérifier que si $M_G(|u|^2) = 0$ pour tout $u \in B_\pi(G)$ alors π ne contient pas faiblement de représentation de dimension finie. Inversement supposons que π ne contienne pas faiblement de représentation de dimension finie. On sait que $B_\pi(G)$ est l'ensemble des conbinaisons linéaires complexes de fonctions du type $u = \omega_{\pi'}(\xi, \xi)$ où π' décrit l'ensemble des représentations faiblement contenues dans π et ξ l'espace $\mathscr{H}_{\pi'}$. On sait aussi associer à une telle fonction u une représentation π_u et un vecteur ξ_u totalisateur avec $u = \omega_{\pi_u}(\xi_u, \xi_u)$. Du fait que π_u est faiblement contenue dans π, π_u ne contient pas de représentation de dimension finie. D'après Godement ([10] p. 61 à 64) ceci implique $M_G(|u|^2) = 0$. Soit à présent $v \in B_\pi(G)$ quelconque. On a $v = \sum_{j=1}^n c_j u_j$

où $c_1, \ldots c_n \in \mathbf{C}$ et les $u_1, \ldots, u_n$ sont du type précédent. De

$$M(|v|^2) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k M(u_j \bar{u}_k)$$

et

$$|M(u_j \bar{u}_k)| \leqslant (M(|u_j|^2))^{1/2} (M(|u_k|^2))^{1/2}$$

pour tout $1 \leqslant j, k \leqslant n$ on tire $M(|v|^2) = 0$.

Remarques. 1) Moyennant de banales modifications apportées à la démonstration du résultat de Godement, utilisé dans la seconde partie de la preuve de la proposition précédente, on peut montrer que π ne contient pas de représentation de dimension finie si et seulement si $M_G(\omega_\pi(\xi, \eta)\overline{\omega_\pi(\zeta, \mu)}) = 0$ pour tout ξ, η, ζ et $\mu \in \mathscr{H}_\pi$. On obtient alors une démonstration plus directe de la proposition 3.

2) Une autre façon, intéressante en soi, de formuler le résultat mentionné dans la remarque 1) est la suivante: π contient une représentation de dimension finie si et seulement si $\pi \otimes \bar{\pi}$ contient i_G. On aboutit ainsi à la conjecture: π contient faiblement une représentation de dimension finie si et seulement si $\pi \otimes \bar{\pi}$ contient faiblement i_G. Pour $\pi = \varrho$ la conjecture est vérifiée car $\varrho \otimes \bar{\varrho}$ est quasi-équivalente à ϱ. ([6] Corollary 1 p. 260 et aussi [11] p. 314).

2. Passage aux sous-groupes fermés

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, H désigne un sous-groupe fermé quelconque de G muni d'une mesure de Haar invariante à gauche $d\xi$. Soit q une fonction sur G continue strictement positive telle que $q(x\xi) = q(x)\Delta_H(\xi)\Delta_G(\xi^{-1})$ pour tout $x \in G$ et $\xi \in H$. Pour tout $x \in G$ on pose $\dot{x} = xH$. Soit $d\dot{x}$ la mesure sur G/H quasi-invariante correspondant à q, $d\xi$ et dx. On définit une application de $L^1(G)$ sur $L^1(G/H)$ en posant

$$T_H f(\dot{x}) = \int_H \frac{f(x\xi)}{q(x\xi)} d\xi \quad \text{pour tout} \quad f \in L^1(G) \quad \text{et} \quad x \in G.$$

Par ailleurs on note $\mathscr{A}_H$ l'enveloppe convexe de $\{A_h \mid h \in H\}$ et J_H l'ensemble des combinaisons linéaires complexes d'éléments de $\{A_h f - f \mid h \in H, f \in L^1(G)\}$.

PROPOSITION 4. *Pour tout $f \in L^1(G)$ et pour tout $\pi \in \Sigma_G$ on a*

$$\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| = \inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\|.$$

Démonstration. Compte tenu de $\mathscr{A}_H f \subset f + J_H$ on a

$$\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| \geqslant \inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\|.$$

Pour montrer l'inégalité inverse il suffit de considérer le cas d'un $f \in L^1(G)$ pour lequel $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| = d > 0$ (au cas où il n'existerait pas de tels f la proposition est banale). Soit $u \in B_\pi(G)$ avec $\|u\| = 1/d$ et $\mathrm{Re} \int_G Af(x)\, u(x)\, dx \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathscr{A}_H$. On a en particulier $\mathrm{Re} \check{f}^* * u(h) \geqslant 1$ pour tout $h \in H$. De $|\check{g}^* * u(h)| \leqslant \|u\|\ \|\pi(g)\|$ pour tout $g \in L^1(G)$ $h \in H$ et de $\mathrm{Res}_H \check{g}^* * u \in B(H)$ on tire $|M_H(\mathrm{Res}_H \check{g}^* * u)| \leqslant \|u\|\ \|\pi(g)\|$. Il existe donc $u' \in B_\pi(G)$ avec $\|u'\| \leqslant \|u\|$ et $M_H(\mathrm{Res}_H \check{g}^* * u) = \int_G g(x)\, u'(x)\, dx$ pour tout $g \in L^1(G)$. On obtient ainsi que pour tout $g \in \mathscr{A}_H f : \int_G g(x)\, u'(x)\, dx = \int_G f(x) u'(x)\, dx$ d'où $1 \leqslant \mathrm{Re} \int_G f(x)\, u'(x)\, dx \leqslant |\int_G f(x)\, u'(x)\, dx| \leqslant \|\pi(g)\|\ \|u\|$. Il en résulte $\int_G f(x)\, u'(x)\, dx = 1$ et par conséquent pour tout $g \in J_H$

$$1 = \int_G (g(x) + f(x))\, u'(x)\, dx \leqslant \|\pi(f+g)\|\ \|u'\| \leqslant \|\pi(f+g)\|\ \|u\|$$

c'est-à-dire

$$\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| \leqslant \inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\|.$$

Remarque. Nous n'avons fait, pour l'essentiel, qu'adapter au présent contexte des idées déjà utilisées par Glicksberg ([9]) et Reiter ([12] p. 181 à 183).

COROLLAIRE. *Pour tout $\pi \in \Sigma_G$ et pour tout $f \in L^1(G)$ on a*

$$\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| \leqslant \|T_H f\|_1.$$

Remarque. Ce corollaire généralise la proposition 15 de [1].

PROPOSITION 5. *Pour tout $\pi \in \Sigma_G$ les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *il n'existe pas de $\pi' \in \Sigma_G$ faiblement contenue dans π dont la restriction à H contienne i_H;*

(b) $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| = 0$ *pour tout $f \in L^1(G)$,*

(c) *J_H est dense dans $L^1(G)$ pour la semi-norme $f \mapsto \|\pi(f)\|$,*

(d) *il n'existe pas de $u \in B_\pi(G)$ avec $u \neq 0$ et $u_h = u$ pour tout $h \in H$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $f \in L^1(G)$ avec $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| = d > 0$. Soit $u \in B_\pi(G)$ tel que $\|u\| = 1/d$ et $\mathrm{Re} \int_G Af(x)\, u(x)\, dx \geqslant 1$ pour tout $A \in \mathscr{A}_H$. On sait d'après la démonstration de la proposition 4 que $M_H(\mathrm{Res}_H \check{f}^* * u) = 1$. De $\check{f}^* * u \in B_\pi(G)$ on tire l'existence de π' faiblement contenue dans π et de $\xi, \eta \in \mathscr{H}_{\pi'}$, avec $\check{f}^* * u = \omega_{\pi'}(\xi, \eta)$. Compte tenu de la remarque suivant la proposition 2 $\mathrm{Res}_H \pi'$, contient i_H; on obtient ainsi que (a) n'est pas satisfaite. En d'autres termes (a) entraîne (b). Pour montrer l'inverse supposons que $\inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\| = 0$ pour tout $f \in L^1(G)$ et qu'il existe π' faiblement contenue dans π telle que $\mathrm{Res}_H \pi'$ contienne i_H. Soit $\xi \in \mathscr{H}_{\pi'}$ avec

$\xi \neq 0$ et $\pi'(h)\,\xi = \xi$ pour tout $h \in H$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in J_H$ avec

$$\|\pi(f-g)\| < \frac{\varepsilon}{\|u\|} \quad \text{où} \quad u = \omega_{\pi'}(\xi, \xi).$$

On a

$$\left|\int_G f(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_G (f(x) - g(x))\,u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\pi(f-g)\|\;\|u\| < \varepsilon.$$

Il en résulte $\int_G f(x)\,u(x)\,dx = 0$ pour tout $f \in L^1(G)$ d'où $\|u\| = 0$, par ailleurs $\|u\| = \|\xi\|^2 \neq 0$. De cette contradiction résulte que (b) implique (a).

Vu la proposition 4 il est évident que (b) et (c) sont équivalentes. Posons $(B_\pi)_H\,(G) = \{u \in B_\pi(G) \mid u = u_h$ pour tout $h \in H\}$. Il est immédiat que $(B_\pi)_H\,(G) = \{u \in B_\pi(G) \mid \int_G f(x)\,u(x)\,dx = 0$ pour tout $f \in J_H\}$. On en tire que pour tout $f \in L^1(G)$

$$\sup\left\{\left|\int_G f u dx\right| \;\middle|\; u \in (B_\pi)_H(G),\ \|u\| \leqslant 1\right\} \leqslant \inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\|.$$

Il est clair que toute forme linéaire continue sur $L^1(G)/J_H$, muni de la semi-norme

$$f + J_H \mapsto \inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\|,$$

est du type $f + J_H \mapsto \int_G f(x)\,u(x)\,dx$ où $u \in (B_\pi)_H\,(G)$ et où $\|u\|$ est la norme de cette forme linéaire. On obtient ainsi pour tout $f \in L^1(G)$

$$\inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\| \leqslant \sup\left\{\left|\int_G f u dx\right| \;\middle|\; u \in (B_\pi)_H(G),\ \|u\| \leqslant 1\right\}.$$

En résumé pour tout $f \in L^1(G)$

$$\inf_{g \in J_H} \|\pi(f+g)\| = \sup\left\{\left|\int_G f u dx\right| \;\middle|\; u \in (B_\pi)_H(G),\ \|u\| \leqslant 1\right\}$$

et par suite (c) et (d) sont équivalentes.

Remarque. Si $\mathrm{Res}_H\,\pi$ ne contient pas faiblement i_H alors l'assertion (b) est vérifiée. On peut se demander si la réciproque est vraie. L'exemple suivant, dû à Eymard, montre que cela n'est en général pas le cas: soient $G = SL(2, \mathbf{R})$, $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbf{R}\right\}$ et $\pi = \varrho$ la représentation régulière de G. On sait qu'il existe pour tout $1 \leqslant p < 2$ une constante C_p telle que $\|\varrho(f)\| \leqslant C_p \|f\|_p$ pour tout $f \in C_{00}(G)$. Choisissons un réel p tel que $1 < p < 2$. Du fait que H n'est pas compact ([12] p. 184–185) $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|Af\|_p = 0$

et par suite $\inf_{A\in\mathscr{A}_H} \|\varrho(Af)\| = 0$. D'après Fell ([8] p. 445) $\mathrm{Res}_H \varrho$ contient faiblement la représentation régulière ϱ_H de H. Vu que H est abélien, i_H est faiblement contenue dans $\mathrm{Res}_H \varrho$.

PROPOSITION 6. *Soit* $\pi\in\Sigma_G$ *telle que* $\inf_{A\in\mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| \leqslant |\int_G f(x)\,dx|$ *pour tout* $f\in L^1(G)$. *Dans ce cas* π *ne contient pas faiblement* i_G *si et seulement si* π *ne contient pas faiblement de* π' *dont le restriction à* H *contienne* i_H.

Démonstration. Supposons que π contienne faiblement une représentation π', dont la restriction à H contient i_H. Montrons que π contient faiblement i_G. Soit $\xi\in\mathscr{H}_{\pi'}$ avec $\xi\neq 0$ et $\pi'(h)\,\xi=\xi$ pour tout $h\in H$. Par hypothèse pour tout $f\in J_G$ $\inf_{A\in\mathscr{A}_H} \|\pi(Af)\| = 0$. Vu la proposition 4 on a $\int_G f(x)\,u(x)\,dx = 0$ où $u=\omega_{\pi'}(\xi,\xi)$. De là on tire $u(x)=\|\xi\|^2$ pour tout $x\in G$ et par suite $1\in B_\pi(G)$.

Soit à présent $\pi\in\Sigma_H$ (en particulier $\pi=\mathrm{Res}_H\pi'$ où $\pi'\in\Sigma_G$). Pour tout $f\in C_{00}(G)$ et $x\in G$ désignons par $T_\pi f(x)$ l'opérateur borné de $\mathscr{H}_\pi$ défini par

$$\int_H \pi(h)\frac{f(xh)}{q(xh)}\,dh.$$

On obtient ainsi une généralisation de l'application T_H. On vérifie que

$$T_\pi f(xh) = \pi(h^{-1})\,T_\pi f(x),\ \|T_\pi f(xh)\| = \|T_\pi f(x)\| \leqslant \int_H \frac{|f(xh)|}{q(xh)}\,dh$$

pour tout $x\in G$, $h\in H$ et $f\in C_{00}(G)$.

PROPOSITION 7. *Si* $\pi\in\Sigma_H$, π *contient faiblement* i_H *si et seulement si* $\|T_H f\|_1 \leqslant \int_{G/H} \|T_\pi f(x)\|\,d\dot{x}$ *pour tout* $f\in C_{00}(G)$.

Demonstration. Si π contient faiblement i_H on a alors

$$\|T_\pi f(x)\| \geqslant \left|\int_H \frac{f(xh)}{q(xh)}\,dh\right|$$

pour tout $f\in C_{00}(G)$ et $x\in G$ et par suite $\int_{G/H} \|T_\pi f(x)\|\,d\dot{x} \geqslant \|T_H f\|_1$.

Montrons l'inverse. Soient $g\in C_{00}(H)$ et $u\in C_{00}(G)$ quelconques. Posons pour tout $x\in G$ $f(x)=\int_H u(x\xi)\,\Delta_G(\xi)\,g(\xi)\,d\xi$. Pour tout λ, $\eta\in\mathscr{H}_\pi$ et $x\in G$ on a

$$\begin{aligned}(T_\pi f(x)\,\lambda,\eta) &= \int_H u(x\xi)\,\Delta_G(\xi)\left(\int_H \frac{(\pi(h)\,\lambda,\eta)\,\Delta_G(h^{-1})\,g(h^{-1}\xi)\,dh}{q(xh)}\right)d\xi \\ &= \int_H \frac{u(x\xi)\,\Delta_G(\xi)}{q(x)}\left(\int_H (\pi(h)\,\lambda,\eta)\,g(h^{-1}\xi)\,\Delta_H(h^{-1})\,dh\right)d\xi.\end{aligned}$$

Or pour tout $\xi \in H$

$$\int_H (\pi(h)\lambda, \eta)\, g(h^{-1}\xi)\, \Delta_H(h^{-1})\, dh = \Delta_H(\xi^{-1})\, (\pi(\bar{g}^*)\lambda, \pi(\xi^{-1})\eta)$$

d'où

$$(T_\pi f(x)\lambda, \eta) = \int_H \frac{u(x\xi)}{q(x\xi)} (\pi(\bar{g}^*)\lambda, \pi(\xi^{-1})\eta)\, d\xi.$$

On aboutit finalement à $\|T_\pi f(x)\| \leqslant \|T_\pi u(x)\|\, \|\pi(\bar{g}^*)\|$ et par conséquent $\int_{G/H} \|T_\pi f(x)\|\, d\dot{x} \leqslant (\int_{G/H} \|T_\pi u(x)\|\, d\dot{x})\, \|\pi(\bar{g}^*)\|$. De façon analogue (mais plus simplement) on montre

$$T_H f(\dot{x}) = \left(\int_H \frac{u(x\xi)}{q(x\xi)}\, d\xi\right)\left(\int_H g(h)\, dh\right)$$

et par suite

$$\|T_H f\|_1 = \left|\int_H g(h)\, dh\right|\, \|T_H u\|_1.$$

Il suffit de choisir $u \in C_{00}(G)$ avec $u \geqslant 0$ et $\int_G u(x)\, dx = 1$ pour obtenir $|\int_H g(h)\, dh| \leqslant \|\pi(\bar{g}^*)\|$ pour tout $g \in C_{00}(H)$ c'est-à-dire $|\int_H g(h)\, dh| \leqslant \|\pi(g)\|$.

Remarques. 1) Cette proposition est une généralisation du cas où $H = G$.

2) De la démonstration précédente résulte que pour tout $\pi \in \Sigma_H$, $u \in C_{00}(G)$, $g \in C_{00}(H)$ et $x \in G$ on a

$$\left\| T_\pi \int_H u(x\xi)\, \Delta_G(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right\| \leqslant \|\pi(\bar{g}^*)\|\, \|T_\pi u(x)\|.$$

PROPOSITION 8. *Si $\pi \in \Sigma_H$, π ne contient pas faiblement i_H si et seulement si* $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \int_{G/H} \|T_\pi(Af)(x)\|\, d\dot{x} = 0$ *pour tout $f \in C_{00}(G)$.*

Démonstration. Montrons que si π ne contient pas faiblement i_H alors $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \int_{G/H} \|T_\pi Af(x)\|\, d\dot{x} = 0$ pour tout $f \in C_{00}(G)$. Considérons tout d'abord un f du type $f(x) = \int_H u(x\xi)\, \Delta_G(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$ où $g \in C_{00}(H)$ et $u \in C_{00}(G)$. Pour tout A de la forme $\sum_{j=1}^n c_j A_{h_j}$ avec $c_j > 0$, $\sum_{j=1}^n c_j = 1$, $h_j \in H (1 \leqslant j \leqslant n)$ on a

$$Af(x) = \int_H u(x\xi) \left(\sum_{j=1}^n c_{j_{h^{-1}j}}\, g(\xi)\right) \Delta_G(\xi)\, d\xi.$$

Compte tenu de la remarque 2 ci-dessus

$$\int_{G/H} \|T_\pi Af(x)\|\, d\dot{x} \leqslant \left\|\pi\left(\sum_{j=1}^n c_j \Delta_H(h_j)\, (\bar{g}^*)_{h_j}\right)\right\| \int_{G/H} \|T_\pi u(x)\|\, d\dot{x}.$$

Or en vertu de la proposition 2

$$\inf\left\{\left\|\pi\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\Delta_H(h_j)\,(\bar{g}^*)_{h_j}\right)\right\| \,\Big|\, h_j\in H,\ c_j>0,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \sum_{j=1}^{n} c_j=1,\ n\in N\right\}=0.$$

On obtient ainsi $\inf_{A\in\mathscr{A}_H}\int_{G/H}\|T_\pi Af(x)\|\,d\dot{x}=0$. Soit à présent $f\in C_{00}(G)$ quelconque. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $g\in C_{00}(H)$ avec $g\geqslant 0$, $\int_H g(h)\,dh=1$ et $\int_G |f(x)-\int_H f(xy)\,\Delta_G(y)\,g(y)\,dy|\,dx<\varepsilon$ (il suffit de choisir $g\in C_{00}(H)$ avec $g\geqslant 0$, $\int_H g(h)\,dh=1$ et supp$g\subset U\cap H$ où U est un ouvert de G contenant e pour lequel $\|f-f_y\Delta_G(y)\|_1<\varepsilon$ pour tout $y\in U$). Posons $f'(x)=\int_H f(xy)\,\Delta_G(y)\,g(y)\,dy$. Pour tout $A\in\mathscr{A}_H$ on a $|\int_{G/H}\|T_\pi Af(x)\|\,d\dot{x}-\int_{G/H}\|T_\pi Af'(x)\|\,d\dot{x}|<\varepsilon$. De $\inf_{A\in\mathscr{A}_H}\int_{G/H}\|T_\pi Af'(x)\|\,d\dot{x}=0$ on tire $\inf_{A\in\mathscr{A}_H}\int_{G/H}\|T_\pi Af(x)\|\,d\dot{x}<\varepsilon$.

PROPOSITION 9. *Pour tout* $\pi\in\Sigma_H$ *et* $f\in C_{00}(G)$ *on a* $\inf_{A\in\mathscr{A}_H}\int_{G/H}\|T_\pi Af(x)\|\,d\dot{x}\leqslant\|T_H f\|_1$.

Démonstration. Pour tout $\phi\in C_{00}(G)$, $\psi\in C_{00}(H)$, $x\in G$ et $y\in H$ posons $\phi_{x,H}(y)=\phi(xy)$ et $\phi_{x,H*H}\,\psi(y)=\int_H\phi(xyh)\,\psi(h^{-1})\,dh$. Montrons que pour tout $f\in C_{00}(G)$ et $\delta>0$ il existe $g\in C_{00}(H)$ avec $g\geqslant 0$, $\int_H g(h)\,dh=1$ et $\|\pi(f_{x,H*H}g)\|<\delta+|\int_H f_{x,H}(h)\,dh|$ pour tout $x\in G$. Soit K le support de f. D'après le corollaire 16 ([1]) il existe $g\in C_{00}(H)$ avec $g\geqslant 0$, $\int_H g(h)\,dh=1$ *et*

$$\max_{y\in K^{-1}K\cap H}\|\pi({}_{y^{-1}}g-g)\|<\frac{\delta}{M}\quad\text{où}\quad M=\sup_{x\in G}|f(x)|\int_{K^{-1}K\cap H}dh.$$

Soient $\xi,\eta\in\mathscr{H}_\pi$ arbitraires. Pour tout $x\in G$ on a

$$\begin{aligned}(\pi(f_{x,H*H}g)\,\xi,\eta)&-\left(\int_H f_{x,H}(h)\,dh\right)(\pi(g)\,\xi,\eta)\\&=\int_H f_{x,H}(h)\,(\pi({}_{h^{-1}}g-g)\,\xi,\eta)\,dh,\end{aligned}$$

d'où pour tout $x\in K$

$$\left\|\pi(f_{x,H*H}g)-\left(\int_H f_{x,H}(h)\,dh\right)\pi(g)\right\|<\delta$$

et par suite

$$\|\pi(f_{x,H*H}g)\|<\delta+\left|\int_H f_{x,H}(h)\,dh\right|.$$

De $\pi(f_{xh,H*H}g)=\pi(h^{-1})\,\pi(f_{x,H*H}\,g)$ pour tout $h\in H$ on déduit l'inégalité annoncée pour tout $x\in KH$ et par suite pour tout $x\in G$.

Soient à présent $f \in C_{00}(G)$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires. Il suffit de prouver l'existence de $A \in \mathscr{A}_H$ avec

$$\int_{G/H} \|T_\pi A f(x)\| \, d\dot{x} < \varepsilon + \|T_H f\|_1 .$$

Posons $f' = q^{-1} f$ et désignons par ω l'application de G sur G/H définie par $\omega(x) = xH$. Choisissons $g \in C_{00}(H)$ avec $g \geqslant 0$,

$$\int_H g(h)\, dh = 1 \quad \text{et} \quad \|\pi(f'_{x,H*H}\, g)\| < \frac{\varepsilon}{2} \Big(\int_{\omega(\operatorname{supp} f)} d\dot{y} \Big)^{-1} + \Big| \int_H f'_{x,H}(h)\, dh \Big| \quad \text{pour tout} \quad x \in G .$$

D'après Reiter ([12] p. 78–79) il existe $A \in \mathscr{A}_H$ avec

$$\int_G \Big| \int_H f(xh^{-1})\, \Delta_G(h^{-1})\, g(h)\, dh - (Af)(x) \Big| \, dx < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Pour tout $x \in G$ et $\xi, \eta \in \mathscr{H}_\pi$ on a

$$(\pi(f'_{x,H*H}\, g)\, \xi, \eta) - (T_\pi A f(x)\, \xi, \eta) = \int_H \frac{(\pi(y)\, \xi, \eta)}{q(xy)} \Big(\int_H f(xyh^{-1})\, \Delta_G(h^{-1})\, g(h)\, dh - (Af)(xy) \Big) dy$$

d'où

$$\|T_\pi A f(x)\| \leqslant \|\pi(f'_{x,H*H}\, g)\| + \int_H \frac{\Big| \int_H f(xyh^{-1})\, g(h)\, \Delta_G(h^{-1})\, dh - Af(xy) \Big|}{q(xy)} \, dy$$

et par suite

$$\int_{G/H} \|T_\pi A f(x)\| \, d\dot{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{G/H} \|\pi(f'_{x,H*H}\, g)\| \, d\dot{x}$$

d'où finalement

$$\int_{G/H} \|T_\pi A f(x)\| \, d\dot{x} < \varepsilon + \|T_H f\|_1 .$$

En analogie avec la proposition 1 on obtient ainsi:

PROPOSITION 10. *Soit $\pi \in \Sigma_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
(i) *π contient faiblement i_H,*
(ii) $\int_{G/H} \|T_\pi f(x)\| \, d\dot{x} = \int_G f(x) \, dx$ *pour tout* $f \in C_{00}(G)$ *avec* $f \geqslant 0$,
(iii) $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \int_{G/H} \|T_\pi A f(x)\| \, d\dot{x} = \|T_H f\|_1$ *pour tout* $f \in C_{00}(G)$.

Remarques. 1) dans les propositions 7 à 10 on aurait pu tout aussi bien considérer $L^1(G)$ au lieu de $C_{00}(G)$.

2) Pour tout $\pi \in \Sigma_G$ et $f \in C_{00}(G)$ on a $\|\pi(f)\| \leqslant \int_{G/H} \|T_{\mathrm{Res}_H \pi} f(x)\| \, d\dot{x}$. Reprenons l'example cité dans la remarque suivant la proposition 5: $G = SL(2, \mathbf{R})$, $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\right\}$ et $\pi = \varrho$. Nous avons d'une part $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|\varrho(Af)\| = 0$ et d'autre part, vu que $\mathrm{Res}_H \, \varrho$ contient faiblement i_H, $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \int_{G/H} \|T_{\mathrm{Res}_H \varrho} A f(x)\| \, d\dot{x} = \|T_H f\|_1$. Ceci montre que l'inégalité de la proposition 9, appliquée à $\mathrm{Res}_H \pi$ où $\pi \in \Sigma_G$, renforce effectivement celle du corollaire de la proposition 4.

3) La démonstration de la proposition 9, abstraction faite des difficultés causées par la présence de π, est analogue à celle utilisée par Reiter ([12] p. 112 à 116 et p. 173 à 175) pour montrer que si H a la propriété P_1 alors $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|Af\|_1 = \|T_H f\|_1$ pour tout $f \in L^1(G)$. Rappelons à ce sujet que l'on ne sait toujours pas, pour H sous-groupe fermé quelconque de G, si la condition $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \|Af\|_1 = \|T_H f\|_1$ pour tout $f \in L^1(G)$ entraîne que H satisfasse à la propriété P_1. Il résulte par contre de la proposition 10 que H possède la propriété P_1 si et seulement si $\inf_{A \in \mathscr{A}_H} \int_{G/H} \|T_{\varrho_H} A f(x)\| \, dx = \|T_H f\|_1$ pour tout $f \in C_{00}(G)$.

4) De par sa définition la semi-norme $L^1(G) \ni f \mapsto \int_{G/H} \|T_\pi f(x)\| \, d\dot{x}$, où $\pi \in \Sigma_H$, est en relation avec la représentation induite par π sur G. Il semble que cette relation mériterait d'être étudiée de façon plus précise.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DERIGHETTI, A., *On the Property P_1 of Locally Compact Groups*, Comment. Math. Helv. *46* (1971), 226–239.
[2] ——, *On Weak Containment II*, Notices of the Amer. Math. Soc. *18* (1971), 834.
[3] EYMARD, P., *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France, *92* (1964) 181–236.
[4] ——, *Moyennes invariantes et représentations unitaires*, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag, 1972).
[5] FELL, J. M. G., *The Dual Spaces of C*-Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *94* (1960), 365–403.
[6] ——, *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. J. Math. *14* (1962), 237–268.
[7] ——, *Weak Containment and Kronecker Products of Group Representations*, Pacific J. Math. *13* (1963), 503–510.
[8] ——, *Weak Containment and Induced Representations of Groups II*, Trans. Amer. Math. Soc. *110* (1964), 424–447.
[9] GLICKSBERG, I., *On Convex Hulls of Translates*, Pacific J. Math. *13* (1963), 97–113.
[10] GODEMENT, R., *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes*, Trans. Amer. Math. Soc. *63* (1948), 1–84.

[11] GREENLEAF, F. P., *Amenable Actions of Locally Compact Groups*, Journal of Functional Analysis *4* (1969), 295–315.
[12] REITER, H., *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, (Oxford, at the Clarendon Press, 1968).

Institut de Mathématiques, Université de Lausanne

Reçu le 24 avril 1973