

# Komplexe Basen zu quasieigentlichen holomorphen Abbildungen

Autor(en): **Kuhlmann, Norbert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **48 (1973)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37159>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Komplexe Basen zu quasieigentlichen holomorphen Abbildungen

NORBERT KUHLMANN

Meinem Lehrer, Heinrich Behnke, zum 75. Geburtstag.

### 1. Einleitung

$X$  und  $Y$  seien irreduzible komplexe Räume,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine surjektive, holomorphe Abbildung. Der Körper  $\mathfrak{R}(Y)$  der auf  $Y$  meromorphen Funktionen läßt sich als Unterkörper des Körpers  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  der auf  $X$  meromorphen Funktionen, die von  $\tau$  analytisch abhängig sind, auffassen. – Es interessiert, unter welchen Bedingungen  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  ein algebraischer Funktionenkörper über  $\mathfrak{R}(Y)$  ist.

Probleme dieses Types wurden schon von Weierstraß untersucht. Die wohl am weitest gehenden allgemeinen Resultate in dieser Hinsicht finden sich in [2].

In einer Reihe von Spezialfällen löste K. Stein dieses Problem, in dem er zunächst die Existenz einer komplexen Basis  $(Z, \phi)$  zu  $\tau$  nachwies. – In [2] wurde vermutet, daß es möglich sein müsse, die in [2], §9 und §10, dargestellten Resultate zu gewinnen, indem man ebenfalls zunächst die Existenz einer komplexen Basis sichert.

Dies führen wir u.a. in der vorliegenden Arbeit durch. Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen nicht, wie in [2], die quasieigentlichen, sondern (die von mir so genannten)  $N$ -quasieigentlichen holomorphen Abbildungen (die mit den quasieigentlichen holomorphen Abbildungen in einem sehr engen Zusammenhang stehen). Zentral in der vorliegenden Arbeit ist

**SATZ 1.** *Es seien  $X$  ein irreduzibler normaler komplexer Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine  $N$ -quasieigentliche holomorphe Abbildung mit der Entartungsmenge  $E_\tau$ .  $\tau(E_\tau)$  sei in  $Y$  analytisch. Dann besitzt  $\tau$  eine komplexe Basis  $(Z^*, \phi^*)$ .  $Z^*$  ist normal. Die durch  $\tau = \psi^* \circ \phi^*$  definierte holomorphe Abbildung  $\psi^*: Z^* \rightarrow Y$  ist eigentlich und diskret.  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$  ist eine komplexe Basis von  $\tau|_{\tilde{X}}$ ; hierbei seien  $\tilde{X} = X - \tau^{-1}(\tau(E_\tau))$ ,  $\tilde{\phi} = \phi^*|_{\tilde{X}}$ ,  $\tilde{Z} = Z^* - \psi^{*-1}(\tau(E_\tau))$ .  $\phi^*$  ist ebenfalls  $N$ -quasieigentlich.*

Die Voraussetzungen von Satz 1 sind z.B. bei einer quasieigentlichen holomorphen Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  eines irreduziblen normalen komplexen Raumes  $X$  gegeben.

Satz 1 wird in Abschnitt 3 bewiesen. – In Abschnitt 4 betrachten wir (als Beispiel zu Satz 1) gewisse  $r$ -konkave holomorphe Abbildungen. – In Abschnitt 5 beweisen wir die Hauptresultate aus [2], §10, mit Hilfe von Satz 1. – Als Ergänzung weisen wir noch in Abschnitt 6 die Existenz komplexer Basen bei  $N$ -vollen holomorphen

Abbildungen normaler komplexer Räume nach (der Begriff der  $N$ -vollen holomorphen Abbildung steht in enger Beziehung zum in [2] geprägten Begriff der vollen holomorphen Abbildung).

## 2. Vorbereitungen

a. Sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt, seien die auftretenden komplexen Räume reduziert und von abzählbarer Topologie. Ist  $N$  eine analytische Untermenge einer offenen Menge  $U$  eines komplexen Raumes  $X$ , so sei  $N$  (wenn nichts anderes vereinbart ist) mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_N := ((\mathcal{O}_X | U) / \mathcal{N} | N$  versehen; hierbei sei  $\mathcal{N}$  die Idealgarbe aller auf  $N$  verschwindenden holomorphen Funktionskeime.

Unter einer Niveaumenge einer holomorphen Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  versteht man eine Zusammenhangskomponente einer Faser  $\tau^{-1}(Q)$ ,  $Q \in Y$ . – Eine holomorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow T$  heißt von  $\tau$  analytisch abhängig, wenn auf  $X$  eine offene, dichte Menge  $U$  existiert, so daß  $\mu | U$  auf den Niveaumengen von  $\tau | U$  konstant ist. *Ist  $X$  irreduzibel, so ist  $\mu$  bereits von  $\tau$  analytisch abhängig, wenn auf  $X$  eine offene Menge  $\tilde{U} \neq \emptyset$  existiert, so daß  $\mu | \tilde{U}$  auf den Niveaumengen von  $\tau | \tilde{U}$  konstant ist.*  $\mu$  nennt man strikt analytisch abhängig von  $\tau$ , wenn  $\mu$  auf allen Niveaumengen von  $\tau$  konstant ist. –  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \tilde{Z}$  majorisiert die holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$ , wenn (genau) eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  mit  $\tau = \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$  existiert.

Ein Paar  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$  heißt eine komplexe Basis von  $\tau$ , wenn gilt:  $\tilde{Z}$  ist ein komplexer Raum,  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \tilde{Z}$  ist eine von  $\tau$  strikt analytisch abhängige holomorphe Abbildung, die jede von  $\tau$  strikt analytisch abhängige holomorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow T$  majorisiert.

Eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \tilde{Z}$  heißt maximal, wenn sie jede von ihr strikt analytisch abhängige holomorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow T$  majorisiert;  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$  ist eine komplexe Basis von  $\tau$ , wenn  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \tilde{Z}$  maximal ist und  $\tilde{\phi}$  von  $\tau$  sowie  $\tau$  von  $\tilde{\phi}$  strikt analytisch abhängen.

Wichtig ist: *Es seien  $X$  ein irreduzibler normaler komplexer Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine nirgends entartete holomorphe Abbildung. Dann besitzt  $\tau$  eine komplexe Basis  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$ .*

b.  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung. Das Supremum  $\sup_{P \in X} (\dim_P X - \dim_P \tau^{-1}(\tau(P)))$  nennt man den Rang von  $\tau$ . – Der Rang von  $\tau$  stimmt mit der halben topologischen Dimension von  $\tau(X)$  überein.

$X$  sei ein irreduzibler komplexer Raum. Die Menge  $E_\tau$  aller Punkte  $P \in X$  mit  $\dim_P \tau^{-1}(\tau(P)) > \dim X - \text{rang } \tau$  ist auf  $X$  analytisch und  $X - E_\tau$  liegt auf  $X$  dicht.  $E_\tau$  heißt die Entartungsmenge von  $\tau$ . – Ist  $E_\tau = \emptyset$ , so nennen wir  $\tau$  nirgends entartet.

Eine eigentliche, holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  heißt eine eigentliche Modifikationsabbildung, wenn auf  $X$  eine offene, dichte Menge existiert, die vermöge  $\tau$  biholomorph auf eine in  $Y$  offene und dichte Menge abgebildet wird.

Wichtig ist der sogenannte „Hauptsatz von Zariski“:  *$Y$  sei ein normaler komplexer*

*Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine eigentliche Modifikationsabbildung. Dann ist  $\tau$  bereits biholomorph, wenn die Entartungsmenge  $E_\tau$  von  $\tau$  leer ist.*

$X$  sei ein komplexer Raum. Eine Abbildung  $\mu$  von  $X$  in die Potenzmenge von  $Y$  heißt eine meromorphe Abbildung von  $X$  in  $Y$ , wenn gilt: Der Graph  $G_\mu := \{(x, y) \mid x \in X, y \in \mu(x)\}$  ist analytisch in  $X \times Y$ ; die Projektion  $G_\mu \rightarrow X$  ist eine eigentliche Modifikationsabbildung. – Im Fall einer meromorphen Abbildung  $\mu$  schreiben wir unter Mißbrauch der Bezeichnungsweise auch  $\mu: X \rightarrow Y$ . – Eine meromorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  nennen wir eine meromorphe Funktion auf  $X$ , wenn  $\mu^{-1}(\mathbb{P}^1 - \{\infty\})$  auf  $X$  dicht liegt.

**c.** Eine holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  heißt semieigentlich, wenn es zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  und eine kompakte Menge  $K$  in  $X$  mit  $\tau(X) \cap V = \tau(K) \cap V$  gibt.

$\tau$  ist genau dann semieigentlich, wenn es zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  und eine Menge  $\tilde{K} \subset \tau^{-1}(V)$  gibt, so daß  $\tau(\tilde{K}) = \tau(\tau^{-1}(V))$  und  $\tau \mid \tilde{K}: \tilde{K} \rightarrow V$  eigentlich ist.

Wichtig ist für unsere Zwecke die folgende Verschärfung des Remmert'schen Abbildungssatzes: *Ist  $\tau: X \rightarrow Y$  eine semieigentliche holomorphe Abbildung, so ist  $\tau(X)$  in  $Y$  analytisch.*

Die holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  heiße  $N$ -quasieigentlich, wenn es zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  und eine Menge  $\tilde{K} \subset \tau^{-1}(V)$  gibt, so daß  $\tau \mid \tilde{K}: \tilde{K} \rightarrow V$  eigentlich ist und für alle  $Q' \in V$  jede Zusammenhangskomponente von  $\tau^{-1}(Q')$  in  $\tilde{K}$  eindringt. – Natürlich ist jede  $N$ -quasieigentliche holomorphe Abbildung semieigentlich.

**SATZ 2.** *Es seien  $X$  ein irreduzibler normaler komplexer Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine nirgends entartete,  $N$ -quasieigentliche holomorphe Abbildung. Dann besitzt  $\tau$  eine komplexe Basis  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$  mit der folgenden Eigenschaft: Die durch  $\tau = \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$  definierte holomorphe Abbildung  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  ist eigentlich, diskret.*

*Beweis.* Da  $\tau: X \rightarrow Y$  nirgends entartet, besitzt  $\tau$  eine komplexe Basis  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$ .

Es sei  $V \neq \emptyset$  eine offene Menge auf  $Y$  mit einer kompakten Menge  $\tilde{K} \subset \tau^{-1}(V)$ , so daß  $\tau \mid \tilde{K}: \tilde{K} \rightarrow V$  eigentlich ist und für alle  $Q' \in V$  jede Zusammenhangskomponente von  $\tau^{-1}(Q')$  in  $\tilde{K}$  eindringt.

Nur endlich viele Zusammenhangskomponenten  $N_1, \dots, N_s$  von  $\tau^{-1}(Q')$  dringen in  $\tilde{K}$  ein. Also ist  $\tilde{\psi}^{-1}(Q')$  endlichpunktig, d.h.  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  ist diskret.

$\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  ist eigentlich. – Ist nämlich  $K^* \subset V$  kompakt, so ist wegen  $\tilde{\psi}^{-1}(K^*) \subset \tilde{\phi}(\tau^{-1}(K^*) \cap X)$  auch  $\tilde{\psi}^{-1}(K^*)$  kompakt;  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  ist somit eigentlich.

**d.** Eine holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  heißt quasieigentlich, wenn es zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  und eine Menge  $\tilde{K} \subset \tau^{-1}(V)$  gibt, so daß

$\tau|_{\tilde{K}}: \tilde{K} \rightarrow V$  eigentlich ist und so daß für alle  $Q' \in V$  jede irreduzible Komponente von  $\tau^{-1}(Q')$  in  $\tilde{K}$  eindringt. – Natürlich ist eine quasieigentliche holomorphe Abbildung  $N$ -quasieigentlich. Wir benötigen

**SATZ 3.** *Es seien  $X$  ein irreduzibler komplexer Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine quasieigentliche holomorphe Abbildung mit der Entartungsmenge  $E_\tau$  und der Normalisierungsabbildung  $\varrho': X' \rightarrow X$ . Dann gilt:  $\tau \circ \varrho': X' \rightarrow Y$  ist  $N$ -quasieigentlich. Ist  $\tau$  nirgends entartet, so ist  $\tau \circ \varrho'$  quasieigentlich. –  $\tau|_{E_\tau}$  ist quasieigentlich.*

Der Beweis ist trivial. – *Bemerkung:* Die Voraussetzung der Irreduzibilität von  $X$  ist (bei passender Definition von  $E_\tau$ ) überflüssig.

Eine holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  heißt quasieigentlich von der Kodimension  $k$ , wenn es zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  und eine Menge  $\tilde{K} \subset \tau^{-1}(V)$  gibt, so daß  $\tau|_{\tilde{K}}: \tilde{K} \rightarrow V$  eigentlich ist und so daß für alle  $Q' \in V$  gilt: Ist  $B$  eine irreduzible Komponente von  $\tau^{-1}(Q')$  und ist  $C$  eine irreduzible analytische Teilmenge von  $B$  mit  $\dim B - \dim C \leq k$ , so ist  $C \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ .

e. Die in a. zitierten Sätze und Definitionen gehen auf K. Stein zurück (vgl. [8], [9], [12], [5], [6]). Die Aussagen und Begriffe in b. gehen auf R. Remmert zurück; eine zusammenfassende Darstellung findet sich z.B. in [2]. Auf wen der Begriff der semieigentlichen holomorphen Abbildung zurückgeht, weiß ich nicht. – Der Abbildungssatz für semieigentlich holomorphe Abbildungen wurde von mir zuerst 1964 bewiesen; inzwischen sind mehrere Beweise bekannt (vgl. [2]). – Die Begriffe der quasieigentlichen holomorphen Abbildung und der quasieigentlichen holomorphen Abbildung der Kodimension  $k$  werden in [2] eingeführt.

### 3. Beweis von Satz 1; Zusätze

a. Da  $\tau$  semieigentlich ist, ist  $\tau(X)$  in  $Y$  analytisch. – Daher dürfen wir auf Grund bekannter Sätze der lokalen Theorie analytischer Mengen für unsere Zwecke o.B.d.A. annehmen, daß  $Y$  eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und die Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  surjektiv ist.

Nach einem bekannten Satz von R. Remmert ist  $\tau(E_\tau)$  von einer Dimension  $\leq \dim Y - 2$ .

Es sei  $\tilde{Y} = Y - \tau(E_\tau)$ ,  $\tilde{X} = X - \tau^{-1}(\tau(E_\tau))$ ,  $\tilde{\tau} := \tau|_{\tilde{X}}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ . Nach Satz 2 besitzt  $\tilde{\tau}$  eine komplexe Basis  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$ , so daß die durch  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} = \tilde{\tau}$  definierte holomorphe Abbildung  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Y}$  eigentlich, diskret ist.  $\tilde{Z}$  ist ein normaler komplexer Raum.

Nach [3] (vgl. auch [5], Satz A) existiert ein (durch die folgenden Eigenschaften bis auf Biholomorphie eindeutig bestimmter) normaler komplexer Raum  $Z^*$  mit einer diskreten eigentlichen, surjektiven, holomorphen Abbildung  $\tilde{\psi}^*: Z^* \rightarrow \tilde{Y}$ , so daß gilt:  $\tilde{Z}$  liegt dicht in  $Z^*$  und stimmt mit  $\tilde{\psi}^{*-1}(\tilde{Y})$  überein; überdies ist  $\tilde{\Psi} = \tilde{\psi}^*|_{\tilde{Z}}$ .

b. Wir zeigen: Die holomorphe Abbildung  $\tilde{\phi}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$  läßt sich zu einer holomorphen Abbildung  $\phi^*: X \rightarrow Z^*$  fortsetzen, so daß  $\tau = \tilde{\psi}^* \circ \phi^*$  gilt.

Es seien  $i: X \rightarrow X$  die identische Abbildung,  $G \subset X \times Y$  der Graph von  $\tau$ ,  $\tilde{G} \subset \tilde{X} \times \tilde{Z}$  der Graph von  $\tilde{\phi}$ ,  $\iota \times \psi^*: X \times Z^* \rightarrow X \times Y$  die durch  $(\iota \times \psi^*)(P, Q) = (P, \psi^*(Q))$  definierte holomorphe Abbildung,  $G_1 = (\iota \times \psi^*)^{-1}(G)$ .

Es gibt eine irreduzible Komponente  $G^*$  von  $G_1$  mit  $G^* \cap (\tilde{X} \times \tilde{Z}) = \tilde{G}$ . Dies folgt aus:  $H$  und  $G$  seien analytische Mengen eines komplexen Raumes  $W$ . Dann ist  $(W - M) \cap G$  auf  $W$  analytisch (vgl. etwa [5a], Seite 224, Abschnitt b). – Die Projektion  $\pi: G^* \rightarrow X$  ist eine eigentliche, diskrete Modifikationsabbildung. Da  $X$  normal ist, ist  $\pi$  nach dem sogenannten Hauptsatz von Zariski biholomorph.

$\pi_2: G^* \rightarrow Z^*$  sei die Projektion auf die 2. Komponente;  $\pi_2 \circ \pi^{-1} = \phi^*: X \rightarrow Z^*$  ist von  $\tau$  strikt analytisch abhängig;  $\tau$  ist strikt analytisch von  $\phi^*$  abhängig.  $\phi^*: X \rightarrow Z^*$  ist ebenfalls  $N$ -quasieigentlich.  $\phi^*$  ist die Fortsetzung von  $\tilde{\phi}$  auf  $Z^*$ . Da  $\tilde{Z}$  auf  $Z^*$  dicht liegt, ist  $\phi^*$  eindeutig bestimmt.

c. Wir zeigen:  $\mu: X \rightarrow T$  sei eine von  $\tau$  strikt analytisch abhängige holomorphe Abbildung. Dann gibt es (genau eine) holomorphe Abbildung  $\mu^*: Z^* \rightarrow T$  mit  $\mu = \mu^* \circ \phi^*$ .

$G_\mu \subset X \times T$  sei der Graph von  $\mu$ . Da  $\mu$  von  $\tau$  und damit von  $\phi^*$  strikt analytisch abhängt, ist die holomorphe Abbildung  $\phi^* \dot{\times} \mu: X \rightarrow Z^* \times T, P \rightarrow (\phi^*(P), \mu(P))$ ,  $N$ -quasieigentlich, wie wir uns überlegen:

Es sei nämlich  $V^* \subset Z^*$  eine Umgebung von  $\phi^*(P) = Q^* \in Z^*$ ,  $P \in X$ , mit einer Menge  $K^* \subset \phi^{*-1}(V^*)$ , so daß  $\phi^*|_{K^*}: K^* \rightarrow V^*$  eigentlich ist und so daß jede Zusammenhangskomponente von  $\phi^{*-1}(Q^*)$ ,  $Q^* \in V^*$ , in  $K^*$  eindringt.

Die Abbildung  $\phi^* \dot{\times} \mu|_{K^*}: K^* \rightarrow V^* \times T$  ist eigentlich. Da  $\mu$  von  $\phi^*$  strikt analytisch abhängt und für alle  $Q^* \in V^*$  jede Zusammenhangskomponente von  $\phi^{*-1}(Q^*)$  in  $K^*$  eindringt, dringt für alle  $(Q^*, Q^{**}) \in V^* \times T$  jede Zusammenhangskomponente von  $(\phi^* \times \mu)^{-1}(Q^*, Q^{**})$  in  $K^*$  ein.

Also ist  $\phi^* \dot{\times} \mu: X \rightarrow Z^* \times T$  insbesondere semieigentlich und  $G^{**} = (\phi^* \dot{\times} \mu)(X)$  ist in  $Z^* \times T$  analytisch.  $\pi^{**}: G^{**} \rightarrow Z^*$  sei die Projektion auf die 1. Komponente. Über  $\tilde{Z}$  ist  $\pi_1^{**}$  biholomorph, da  $(\tilde{Z}, \tilde{\phi})$  eine komplexe Basis von  $\tau$  ist; es gibt nämlich eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\mu}: \tilde{Z} \rightarrow T$  mit  $\tilde{\mu} \circ \tilde{\phi} = \mu|_{\tilde{X}}$ ;  $G^{**} \cap (\tilde{Z} \times T)$  ist der Graph von  $\tilde{\mu}$ .

Da  $\phi^*$   $N$ -quasieigentlich ist, ist  $\pi_1^{**}: G^{**} \rightarrow Z^*$  eigentlich. Da mit  $X$  auch  $G^{**}$  irreduzibel ist, ist somit  $\pi_1^{**}$  eine eigentliche Modifikationsabbildung.

Da  $\mu$  von  $\tau$  strikt analytisch abhängt, ist  $\pi_1^{**}: G^{**} \rightarrow Z^*$  diskret; nach dem Hauptsatz von Zariski ist  $\pi_1^{**}$  biholomorph.  $\pi_2^{**}: G^{**} \rightarrow T$  sei die Projektion auf die 2. Komponente. Für  $\mu^* = \pi_2^{**} \circ \pi_1^{**^{-1}}$  gilt  $\mu = \mu^* \circ \phi^*$ . – Damit ist Satz 1 bewiesen.

d. In Abschnitt c. haben wir u.a. gezeigt:

ZUSATZ 1.  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine  $N$ -quasieigentliche holomorphe Abbildung; die holomorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow T$  hänge strikt analytisch von  $\tau$  ab. Dann ist die Abbildung  $\tau \dot{\times} \mu: X \rightarrow Y \times T, P \rightarrow (\tau(P), \mu(P))$ ,  $N$ -quasieigentlich.

e. Aus den Überlegungen zu Satz 1 und (4), S. 12 in [6] ergibt sich der

ZUSATZ 2. Es mögen die Voraussetzungen von Satz 1 gegeben sein.  $A$  sei eine analytische Teilmenge von  $Y$ , so daß  $B = \tau^{-1}(A)$  in  $X$  dünn liegt. Dann ist  $(Z^* - \psi^{*-1}(A), \phi^* | X - B)$  eine komplexe Basis von  $\tau | X - B$ .

f. Eine meromorphe Abbildung  $\mu: X \rightarrow T$  heißt analytisch abhängig von der holomorphen Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  (oder kurz:  $\tau$ -abhängig), wenn auf  $X$  eine offene und dichte Menge  $\tilde{X}$  existiert, auf der  $\mu$  holomorph ist und von  $\tau$  strikt analytisch abhängt.

ZUSATZ 3. Es mögen die Voraussetzungen von Satz 1 gegeben sein. Die meromorphe Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  sei  $\tau$ -abhängig. Dann existiert (genau) eine meromorphe Abbildung  $f^*: Z^* \rightarrow \mathbb{P}^1$  mit  $f^* \Delta \phi^* = f$ .

Bemerkung. Bezüglich der Komposition meromorpher Abbildungen vgl. etwa [2] oder auch [6], §I,4. Unter  $f^* \Delta \phi^*$  verstehen wir die Komposition von  $\phi^*$  und  $f^*$ .

Beweis von Zusatz 3. Es sei  $A = \tau(E_\tau)$ ,  $B = \tau^{-1}(A)$ ,  $\tilde{X} = X - B$ . Nach [6] existiert (genau) eine meromorphe Abbildung  $\tilde{f}^*: \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$  mit  $\tilde{f}^* \Delta \tilde{\phi} = f | \tilde{X}$ . Wegen  $\dim \psi^{*-1}(A) \leq \dim Z^* - 2$  ist  $\tilde{f}^*$  zu einer meromorphen Abbildung  $f^*: Z^* \rightarrow \mathbb{P}^1$  fortsetzbar. Es gilt  $f = f^* \Delta \phi^*$ .

#### 4. $r$ -konkave holomorphe Abbildungen

a. Es seien  $D$  ein Gebiet im  $\mathbb{C}^n(z_1, \dots, z_n)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$ ,  $\tilde{\kappa}: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion.  $\tilde{\kappa}$  heißt streng  $q$ -pseudokonvex, wenn die hermitesche Form

$$L(\tilde{\kappa}) := \sum \frac{\partial^2 \tilde{\kappa}}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} u_\alpha \bar{u}_\beta$$

(wenigstens)  $n - q + 1$  positive Eigenwerte in jedem Punkte  $x \in D$  aufweist.

Ist  $V \subset D$  ein komplexer Unterraum von  $D$ , so nennen wir  $\tilde{\kappa} | V$  eine streng  $q$ -pseudokonvexe Funktion auf  $V$ .

$X$  sei ein komplexer Raum. Ist  $\kappa: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die lokal von dem soeben beschriebenen Typus ist, so heißt  $\kappa$  eine streng  $q$ -pseudokonvexe Funktion auf  $X$ .

b.  $X$  und  $Y$  seien komplexe Räume, es sei  $r \geq 0$ ,  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung.

$\tau$  heißt  $r$ -konkav, wenn zu jedem Punkte  $Q \in Y$  eine  $Y$ -Umgebung mit der folgenden Eigenschaft existiert: Es gibt ein  $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ , ein  $a' \in \mathbb{R}$ ,  $a' > a$ , und eine Abbildung  $\kappa: \tau^{-1}(V) \rightarrow (a, \infty)$  der Klasse  $\mathcal{C}^\infty$ , so daß gilt: Ist  $r=0$ , so ist  $\{P \in \tau^{-1}(V) \mid \kappa(P) < a'\} = \emptyset$ . Ist  $r \geq 1$  und ist  $\{P \in \tau^{-1}(V) \mid \kappa(P) < a'\} \neq \emptyset$ , so ist  $\kappa \mid \{P \in \tau^{-1}(V) \mid \kappa(P) < a'\}$  streng  $r$ -pseudokonvex. Für alle  $a''$ ,  $a'' > a$ , ist  $\tau \mid \{P \in \tau^{-1}(V) \mid \kappa(P) \geq a''\}$  eigentlich.

$\kappa$  heißt eine Ausschöpfungsfunktion von  $\tau^{-1}(V)$ ,  $a'$  eine Konkavitätsschranke von  $\kappa$ .

Der Begriff der  $r$ -konkaven holomorphen Abbildung geht auf [7] zurück.

c.  $\tau: X \rightarrow Y$  sei holomorph und  $r$ -konkav.  $\kappa: X \rightarrow (a, \infty)$  sei eine Ausschöpfungsfunktion mit einer Konkavitätsschranke  $a'$ . Für  $a'' > a$  sei  $B_{a''} = \{P \in X \mid \kappa(P) > a''\}$ . Für alle  $a'' > a$  und für alle  $Q \in Y$  liegt somit  $\tau^{-1}(Q) \cap B_{a''}$  relativkompakt in  $\tau^{-1}(Q)$ . Im folgenden sei  $a < a'' < a'$ .

Es sei  $0 < \text{prof}_{\mathcal{O}_{X,P}} - r - \text{rang } \tau$ ,  $\text{prof}_{\mathcal{M}(\tau(P))_{\tau(P)} \mathcal{O}_{X,P}} \geq \text{rang } \tau$  für alle  $P \in X$  mit  $\kappa(P) < a'$ . Hierbei sei  $\mathcal{M}(Q)$  für  $Q \in Y$  die maximale Idealgarbe  $\subset \mathcal{O}_Y$  mit der Nullstellenmenge  $Q$ .

**SATZ 4.** *Unter diesen Voraussetzungen ist  $\tau$   $N$ -quasieigentlich.*

d. Bevor wir diesen Satz beweisen, treffen wir einige Vorbereitungen:

$X$  sei ein komplexer Raum mit einer kohärenten Garbe  $\mathcal{S}$ . Es sei  $S_\varrho(\mathcal{S}) := \{P \in X \mid \text{prof}_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{S}_P \leq \varrho\}$ . Nach G. Scheja (vgl. z.B. [11]) ist  $S_\varrho(\mathcal{S})$  eine auf  $X$  analytische Menge der Dimension  $\leq \varrho$ . Es gilt ([11]):  $f_1, \dots, f_k \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  seien Nichteinheiten in  $P \in X$ . Dann bilden  $f_1, \dots, f_k$  genau dann eine  $\mathcal{S}_P$ -Folge, wenn für alle  $\varrho \geq 0$   $\dim_P[(f_1 = \dots = f_k = 0) \cap S_\varrho(\mathcal{S})] \leq \varrho - k$  ist. – Mit Hilfe dieser Aussage folgert man:  $\sigma: X \rightarrow \mathbb{C}^m(x_1, \dots, x_m)$  sei eine holomorphe Abbildung vom Rang  $k$ . Für  $Q \in \sigma(X)$  sei  $\mathcal{M}(Q) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}$  die maximale Idealgarbe mit der Nullstellenmenge  $Q$ . – Genau dann ist  $\text{prof}_{\mathcal{M}(Q)_Q} \mathcal{S}_P \geq k$  für alle  $P \in \sigma^{-1}(Q)$ , wenn eine  $(m-k)$ -dimensionale Ebene  $E_{m-k}$  des  $\mathbb{C}^m$  durch den Punkt  $Q$  läuft, für die gilt: Für alle  $P \in \sigma^{-1}(Q)$  und für alle  $\varrho \geq 0$  ist  $\dim_P(\sigma^{-1}(E_{m-k}) \cap S_\varrho(\mathcal{S})) \leq \varrho - k$ . – Diese Aussage dürfte bekannt sein; wir verzichten daher auf den Beweis.

Wir wenden dieses Resultat unter den Voraussetzungen von c. auf  $\mathcal{S} = \mathcal{O}_X$  an und erhalten:

Es sei  $Q \in Y$ ,  $d = \text{rang } \tau$ . Dann gibt es in  $\mathcal{O}_{Y,Q}$  Elemente  $x_1, \dots, x_d$ , die für alle  $P \in \tau^{-1}(Q)$  mit  $\kappa(P) < a'$  eine Primfolge in  $\mathcal{O}_{X,P}$  bilden. O.B.d.A. wollen wir (aus bezeichnungstechnischen Gründen) annehmen, daß  $x_1, \dots, x_d$  von Schnitten aus  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$  herrühren, die wir ebenfalls  $x_1, \dots, x_d$  nennen wollen;  $\tau^*(x_1), \dots, \tau^*(x_d)$  bezeichnen wir auch mit  $x_1, \dots, x_d$ .



Der Punkt  $Q$  ist ein isolierter Punkt von  $\{x_1 = \dots = x_d = 0\} \cap \tau(X)$ .  $\tau^{-1}(Q)$  versehen wir mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{\tau^{-1}(Q)} := \mathcal{O}_X / (x_1, \dots, x_d) \cdot \mathcal{O}_X | \tau^{-1}(Q)$ . Es gilt  $0 < \text{prof } \mathcal{O}_{\tau^{-1}(Q), P} - r$  für alle  $P \in \tau^{-1}(Q)$ . Nach [1] ist somit für alle  $a'', a < a'' < a'$ , die kanonische Abbildung

$$\Gamma(\tau^{-1}(Q), \mathcal{O}_{\tau^{-1}(Q)}) \xrightarrow{\varrho} \Gamma(\tau^{-1}(Q) \cap B_{a''}, \mathcal{O}_{\tau^{-1}(Q)})$$

bijektiv.

$a'', a < a'' < a'$ , sei fest gewählt. – Angenommen, es gäbe eine Zusammenhangskomponente  $N$  von  $\tau^{-1}(Q)$ , die nicht in  $B_{a''}$  eindringt.  $s$  sei das Element aus  $\Gamma(\tau^{-1}(Q), \mathcal{O}_{\tau^{-1}(Q)})$  mit  $s | N = 1, s | \tau^{-1}(Q) - N = 0$ .  $s$  ist  $\neq 0$ , liegt aber im Kern von  $\varrho$ . Da  $\varrho$  bijektiv ist, kann es kein derartiges  $s$  geben. Also dringt jede Zusammenhangskomponente von  $\tau^{-1}(Q)$  in  $B_{a''}$  ein.

Mit Hilfe von [1] (Bijektivität von  $\varrho$ ) folgt sofort: Es ist  $\tau(X) = \tau(\bar{B}_{a''})$ ; da  $\tau | \bar{B}_{a''} : \bar{B}_{a''} \rightarrow Y$  eigentlich ist, ist somit  $\tau(X)$  in  $Y$  abgeschlossen. – Wir haben bewiesen:  $\tau : X \rightarrow Y$  ist  $N$ -quasieigentlich.

e. Es gelten weiterhin die Voraussetzungen von Satz 4. – Für alle  $P \in \tau^{-1}(Q)$ ,  $\kappa(P) < a'$ , ist  $\dim_P \tau^{-1}(Q) = \dim X - \text{rang } \tau$ .  $\tau$  ist also in diesen Punkten  $P \in X$  mit  $\kappa(P) < a'$  nicht entartet. Die Entartungsmenge  $E_\tau$  von  $\tau$  liegt somit in  $B_{a'} = \{P \in X | \kappa(P) > a'\}$ .  $\tau | E_\tau$  ist somit eigentlich und nach dem Remmert'schen Abbildungssatz ist  $\tau(E_\tau)$  eine analytische Teilmenge von  $Y$  der Dimension  $\leq \text{rang } \tau - 2$ . – Somit haben wir

**SATZ 5.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist das Bild  $\tau(E_\tau)$  der Entartungsmenge  $E_\tau$  von  $\tau$  in  $Y$  analytisch.*

Somit sind (falls  $X$  normal ist) für  $\tau : X \rightarrow Y$  die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt und  $\tau$  besitzt eine komplexe Basis  $(Z^*, \phi^*)$ , so daß die kanonische Abbildung  $\psi^* : Z^* \rightarrow Y$  eigentlich und diskret ist.

f. Es mögen weiterhin die in c. gemachten Voraussetzungen gelten.  $X$  sei normal. Wir nehmen zusätzlich an, daß für alle  $P \in X$  mit  $\kappa(P) < a'$   $0 < \text{prof } \mathcal{O}_{X, P} - r - 2 \cdot \text{rang } \tau$  gelte.

Nach [7] ist für alle  $a'', a < a'' < a'$  (es sei  $\tau'' := \tau | B_{a''}$ ) die Bildgarbe  $\tau''_{(O)} \mathcal{O}_X$  eine kohärente  $\mathcal{O}_Y$ -Algebra und für alle offenen steinschen Mengen  $V$  von  $Y$  ist die kanonische Abbildung  $\Gamma(\tau^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\tau^{-1}(V) \cap B_{a''}, \mathcal{O}_X)$  ein  $\mathcal{O}_Y$ -Algebra-Isomorphismus. Also gibt es bekanntlich einen komplexen Raum  $\tilde{Z}'$  mit einer diskreten, eigentlichen Abbildung  $\tilde{\lambda}' : \tilde{Z}' \rightarrow Y$ , so daß  $\tilde{\lambda}'_{(O)} \mathcal{O}_{\tilde{Z}'}$  zu  $\tau_{(O)} \mathcal{O}_X$  als  $\mathcal{O}_Y$ -Algebra isomorph ist; es gibt eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\phi}' : X \rightarrow \tilde{Z}'$  mit  $\tau = \tilde{\lambda}' \circ \tilde{\phi}'$ .  $(\tilde{Z}', \tilde{\phi}')$  ist eine komplexe Basis von  $\tau$ . – Die obigen Isomorphismen  $\Gamma(\tau^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\tau^{-1}(V) \cap B_{a''}, \mathcal{O}_X)$  und die Überlegungen in d implizieren, daß die Fasern von  $\tilde{\phi}'$  zusammen-

hängend sind. –  $\tilde{Z}'$  dürfen wir somit mit dem Niveaumengenraum von  $\tau$  und  $\tilde{\phi}': X \rightarrow \tilde{Z}'$  mit der Abbildung, die jedem  $P \in X$  die durch  $P$  laufende Zusammenhangskomponente von  $\tau^{-1}(\tau(P))$  zuordnet, identifizieren. – Da  $X$  normal ist, ist natürlich  $\tilde{Z}'$  normal und wir dürfen  $(Z^*, \phi^*)$  mit  $(\tilde{Z}', \tilde{\phi}')$  identifizieren.

Derartige Isomorphismen  $\Gamma(\tau^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\tau^{-1}(V) \cap B_a'', \mathcal{O}_X)$  erhält man bei geeigneter Wahl von  $V$  auch unter der schwächeren Voraussetzung  $0 < \text{prof } \mathcal{O}_{X,P} - r - \text{rang } \tau$  für alle  $P \in X$  (unveröffentlichtes Resultat). – Hieraus folgt leicht, daß der Niveaumengenraum von  $\tau$  hausdorffsch ist. – Mit Hilfe dieser Aussage zeigt man dann sofort, daß (sogar unter der schwächeren Voraussetzung  $0 < \text{prof } \mathcal{O}_{X,P} - r - \text{rang } \tau$ ) bei normalem  $X$  die Fasern von  $\phi^*: X \rightarrow Z^*$  zusammenhängend sind,  $Z^*$  normal ist und  $\mathcal{O}_{Z^*}$  die durch  $\phi^*: X \rightarrow Z^*$  definierte Quotientenstruktur auf  $Z^*$  ist, wenn man die Resultate von [5] berücksichtigt.

## 5. Funktionenkörper

**a.** Es seien  $X$  ein irreduzibler normaler komplexer Raum.  $\tau: X \rightarrow Y$  eine surjektive,  $N$ -quasieigentliche Abbildung; mit  $X$  ist auch  $Y$  irreduzibel. Das Bild  $\tau(E_\tau)$  der Entartungsmenge  $E_\tau$  von  $\tau$  sei in  $Y$  analytisch. – Jede auf  $Y$  meromorphe Funktion  $f: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  läßt sich zu einer meromorphen Funktion  $\tau^\Delta f = f \Delta \tau: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  „liften“. Die Abbildung  $\tau^\Delta: \mathfrak{R}(Y) \rightarrow \mathfrak{R}(X)$  des Körpers  $\mathfrak{R}(Y)$  der auf  $Y$  meromorphen Funktionen in den Körper  $\mathfrak{R}(X)$  der auf  $X$  meromorphen Funktionen ist injektiv.

Entsprechend sind die injektiven Abbildungen  $\psi^{*\Delta}: \mathfrak{R}(Y) \rightarrow \mathfrak{R}(Z^*)$ ,  $\phi^{*\Delta}: \mathfrak{R}(Z^*) \rightarrow \mathfrak{R}(X)$  definiert; hierbei seien  $(Z^*, \phi^*)$  die (nach Satz 1 existierende) komplexe Basis von  $\tau$ ,  $\psi^*: Z^* \rightarrow Y$  die kanonische Abbildung  $Z^* \rightarrow Y$  mit  $\tau = \psi^* \circ \phi^*$  und  $\mathfrak{R}(Z^*)$  der Körper der auf  $Z^*$  meromorphen Funktionen.

Nach Abschnitt 3, Zusatz 3, ist  $\mathfrak{R}(Z^*)$  isomorph zum Körper  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  der auf  $X$  von  $\tau$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen. Da  $\psi^*: Z^* \rightarrow Y$  eigentlich und diskret ist, ist  $\mathfrak{R}(Z^*)$  eine endliche, algebraische Erweiterung von  $\psi^{*\Delta}(\mathfrak{R}(Y))$ . Der Grad  $[\mathfrak{R}(Z^*): \psi^{*\Delta}(\mathfrak{R}(Y))]$  ist  $\leq$  der Blätterzahl von  $Z^*$  über  $Y$ . Somit folgt, wenn wir  $\mathfrak{R}(Y)$  mit seinem Bild  $\tau^\Delta(\mathfrak{R}(Y))$  in  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  identifizieren,

**SATZ 6.** *Der Körper  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  der auf  $X$  von  $\tau$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen ist eine endliche algebraische Erweiterung von  $\mathfrak{R}(Y)$ . Der Grad  $[\mathfrak{R}_\tau(X): \mathfrak{R}(Y)]$  ist  $\leq$  der Blätterzahl von  $Z^*$  über  $Y$ .*

**b.** Wir benutzen weiterhin die Voraussetzungen und Bezeichnungen von a.

**a)** *Es seien  $V$  eine nichtleere, offene Teilmenge von  $Y$ ,  $U = \tau^{-1}(V)$ ,  $\tau_0 = \tau|_U$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine meromorphe Funktion,  $g_0: V \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine auf  $V$  meromorphe Funktion mit  $\tau_0^\Delta g_0 = f|_U$ . Dann gibt es (genau) eine auf  $Y$  meromorphe Funktion  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  mit  $\tau^\Delta g = f$ .*

*Beweis.* Nach bekannten Sätzen ist wegen  $\tau_0^A g_0 = f|_U$   $f$  von  $\tau$  analytisch abhängig. Also gibt es (genau) eine meromorphe Abbildung  $f^*: Z^* \rightarrow \mathbb{P}^1$  mit  $\phi^{*A} f^* = f$ .  $G_{f^*} \subset Z^* \times \mathbb{P}^1$  sei der Graph von  $f^*$ ;  $G_{f^*}$  ist irreduzibel. – Es sei  $G = (\psi^* \times \iota)(G_{f^*}) \subset Y \times \mathbb{P}^1$ ; hierbei sei  $\iota: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  die identische Abbildung. Da  $\psi^* \times \iota$  eigentlich ist, ist  $G$  eine irreduzible analytische Teilmenge von  $Y \times \mathbb{P}^1$ .  $(V \times \mathbb{P}^1) \cap G$  ist der Graph von  $g_0$ . Also ist die Projektion  $(V \times \mathbb{P}^1) \cap G \rightarrow V$  eine eigentliche Modifikationsabbildung. Da  $G$  irreduzibel ist, ist somit auch die Projektion  $G \rightarrow Y$  eine eigentliche Modifikationsabbildung und der Graph einer meromorphen Funktion  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  mit  $g|_V = g_0$ .  $\tau^A g$  stimmt auf  $U$  mit  $f$  überein. Da  $X$  irreduzibel ist, ist  $\tau^A g = f$ . q.e.d.

**β)** Es seien  $V \neq \emptyset$  eine offene Teilmenge von  $Y$ ,  $U = \tau^{-1}(V)$ .  $\tau_0 = \tau|_U$  bilde  $U$  biholomorph auf  $V$  ab. Dann ist die Abbildung  $\psi^*: Z^* \rightarrow Y$  eine eigentliche Modifikationsabbildung. Insbesondere ist  $\mathfrak{R}(Z^*) \approx \mathfrak{R}(Y)$ .

*Beweis.*  $\psi^*: Z^* \rightarrow Y$  ist eigentlich, diskret, surjektiv.  $Y$  und  $Z^*$  sind irreduzibel. Da  $\psi^*|_{\psi^{*-1}(V)}: \psi^{*-1}(V) \rightarrow V$  biholomorph ist, ist somit  $\psi^*$  eine eigentliche Modifikationsabbildung. q.e.d.

*Bemerkung.* **α)** und **β)** hängen zusammen mit [2], Theorem 9.3 und Prop. 9.4 (die sich auch aus **α)**, **β)** herleiten lassen).

**c.**  $X'$ ,  $Y$  seien irreduzible komplexe Räume,  $\tau': X' \rightarrow Y$  sei eine surjektive, holomorphe, quasiaeentliche Abbildung.  $\nu: X \rightarrow X'$  sei die Normalisierungsabbildung, es sei  $\tau = \tau' \circ \nu$ ,  $\mathfrak{R}(X)$ ,  $\mathfrak{R}(X')$ ,  $\mathfrak{R}(Y)$  seien die Körper der auf  $X$  bzw.  $X'$  bzw.  $Y$  meromorphen Funktionen;  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  sei der Körper der auf  $X$  von  $\tau$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen,  $\mathfrak{R}_{\tau'}(X')$  sei der Körper der auf  $X'$  von  $\tau'$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen. Jede auf  $Y$  meromorphe Funktion  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  können wir zu einer auf  $X'$  meromorphen Funktion  $\tau'^A g$  „liften“. Da  $\tau'$  surjektiv ist, ist die Abbildung  $\tau'^A: \mathfrak{R}(Y) \rightarrow \mathfrak{R}(X')$  injektiv. – Entsprechend seien die injektiven Abbildungen  $\tau^A: \mathfrak{R}(Y) \rightarrow \mathfrak{R}(X)$ ,  $\nu^A: \mathfrak{R}(X') \rightarrow \mathfrak{R}(X)$  definiert.  $\nu^A$  ist ein surjektiver Isomorphismus und bildet  $\mathfrak{R}_{\tau'}(X')$  auf  $\mathfrak{R}_\tau(X)$  ab.

$\tau: X \rightarrow Y$  ist  $N$ -quasiaeentlich; auf  $\tau$  treffen somit die Voraussetzungen von Satz 1 und Satz 6 zu (Satz 3). Identifizieren wir  $\mathfrak{R}(Y)$  mit seinem Bild in  $\mathfrak{R}_\tau(X)$ , so folgt (vgl. [2], 9.2).

**SATZ 7.**  $\mathfrak{R}_{\tau'}(X')$  ist eine endliche algebraische Erweiterung von  $\mathfrak{R}(Y)$ . Der Grad  $[\mathfrak{R}_{\tau'}(X'): \mathfrak{R}(Y)]$  ist  $\leq$  der Blätterzahl von  $Z^*$  über  $Y$ . – Hierbei sei  $(Z^*, \phi^*)$  die komplexe Basis von  $\tau$ .

**d.**  $X$  und  $Y$  seien irreduzible komplexe Räume.  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine surjektive, quasiaeentliche holomorphe Abbildung der Kodimension  $k$ ;  $E_\tau$  sei die Entartungsmenge von  $\tau$ , es sei  $E = \tau(E_\tau)$ . Da  $\tau|_{E_\tau}$  semieigentlich ist, ist  $E$  in  $Y$  analytisch. Es gilt  $\dim E \leq \dim Y - 2$ .

$f_1, \dots, f_k$  seien  $\tau$ -unabhängige meromorphe Funktionen auf  $X$  (zu diesem Begriff vgl. [2], S. 83).  $P_{f_i}, i=1, \dots, k$ , sei die Polstellenmenge von  $f_i$ ,  $U_i$  die Unbestimmtheitsmenge.  $\tilde{\Gamma}$  sei der Graph der Abbildung  $X - (P_{f_1} \cup \dots \cup P_{f_k} \cup U_1 \cup \dots \cup U_k) \rightarrow \mathbb{C}^k$ ,  $P \rightarrow (f_1(P), \dots, f_k(P))$ .  $\Gamma$  sei die in  $X \times \mathbb{P}^k$  abgeschlossene Hülle von  $\tilde{\Gamma}$ . – Die Projektion  $\pi_1: \Gamma \rightarrow X$  ist eine eigentliche Modifikationsabbildung. Es seien  $\pi_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^k$  die Projektion,  $\lambda: \Gamma \rightarrow Y \times \mathbb{P}^k$  die durch  $P \rightarrow (\tau(\pi_1(P)), \pi_2(P))$  definierte holomorphe Abbildung.

Es ist leicht einzusehen (wir verzichten auf den Beweis; vgl. etwa in [2], S. 211, die Ausführungen zu 2.), daß  $\lambda|_{\Gamma - \lambda^{-1}(\tau(E_\tau) \times \mathbb{P}^k)}$  quasieigentlich ist.  $\lambda': \Gamma^* \rightarrow \Gamma$  sei die Normalisierungsabbildung.  $\lambda^* := \lambda \circ \lambda': \Gamma^* \rightarrow Y \times \mathbb{P}^k$  ist  $N$ -quasieigentlich. Wegen  $\mathfrak{R}^\lambda(\Gamma) \approx \mathfrak{R}_{\lambda^*}(\Gamma^*)$  ergibt Satz 6

**SATZ 8.** ([2], 10.5). *Der Körper  $\mathfrak{R}_\lambda(\Gamma)$  der auf  $\Gamma$  von  $\lambda$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen ist eine endliche algebraische Erweiterung von  $\mathfrak{R}(Y \times \mathbb{P}^k)$ , dem Körper der auf  $Y \times \mathbb{P}^k$  meromorphen Funktionen. Da  $\mathfrak{R}(Y \times \mathbb{P}^k)$  eine rein transzendente Erweiterung von  $\mathfrak{R}(Y)$ , dem Körper der auf  $Y$  meromorphen Funktionen, vom Transzendenzgrad  $k$  ist ([2], §6), ist  $\mathfrak{R}_\lambda(\Gamma)$  ein algebraischer Funktionenkörper über  $\mathfrak{R}(Y)$  vom Transzendenzgrad  $k$ .*

Hierbei haben wir  $\mathfrak{R}(Y)$  und  $\mathfrak{R}(Y \times \mathbb{P}^k)$  mit ihren kanonischen Bildern in  $\mathfrak{R}_\lambda(\Gamma)$  identifiziert.

## 6. Komplexe Basen von $N$ -vollen holomorphen Abbildungen

**a.** Es seien  $X$  ein (irreduzibler) normaler komplexer Raum,  $\tau: X \rightarrow Y$  eine holomorphe Abbildung,  $E_\tau$  die Entartungsmenge von  $\tau$ .  $\tau$  heißt  $N$ -voll, wenn es zu jedem  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  mit der folgenden Eigenschaft gibt: Es existieren offene Mengen  $U_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ , in  $X$  mit  $\tau^{-1}(V) \approx \bigcup_\nu U_\nu$ , so daß für alle  $\nu \in \mathbb{N}$   $\tau_\nu := \tau|_{U_\nu}: U_\nu \rightarrow V$   $N$ -quasieigentlich und  $\tau(E_\tau \cap U_\nu)$  in  $V$  analytisch ist.

Auf  $\tau_\nu: U_\nu \rightarrow V$  ist somit Satz 1 anwendbar. – Wir zeigen

**SATZ 9.** *Die holomorphe Abbildung  $\tau: X \rightarrow Y$  des normalen komplexen Raumes  $X$  sei  $N$ -voll. Dann besitzt  $\tau$  eine komplexe Basis  $(Z, \phi)$ ;  $Z$  ist ein normaler komplexer Raum, die durch  $\tau = \psi \circ \phi$  definierte holomorphe Abbildung  $\psi: Z \rightarrow Y$  ist diskret;  $\phi: X \rightarrow Z$  ist  $N$ -quasieigentlich.*

**b.** Zwei Punkt  $x_1, x_2 \in X$  heißen äquivalent, wenn für alle von  $\tau$  strikt analytisch abhängigen holomorphen Abbildungen  $\sigma: X \rightarrow T$   $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$  gilt.  $Z$  sei der Raum der Äquivalenzklassen,  $\phi: X \rightarrow Z$  die Abbildung, die jedem  $x \in X$  die zugehörige Äquivalenzklasse zuordnet.

$Z$  versehen wir mit der durch  $\phi$  gegebenen Quotientenstruktur: Eine Menge

$W \in Z$  heiße offen, wenn  $\phi^{-1}(W)$  in  $X$  offen ist. Damit trägt  $Z$  eine Topologie. – Eine auf einer in  $Z$  offenen Menge  $W$  gegebene holomorphe Funktion  $f: W \rightarrow \mathbb{C}$  heiße holomorph, wenn  $f \circ (\phi | \phi^{-1}(W))$  auf  $\phi^{-1}(W)$  holomorph ist. –  $\mathcal{O}_Z$  sei die Garbe der holomorphen Funktionskeime auf  $Z$ . – Wir zeigen:  $Z$ , versehen mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_Z$ , ist ein normaler komplexer Raum,  $\phi: X \rightarrow Z$  ist holomorph.

c. Es sei  $Q \in Y$  ein Punkt mit einer Umgebung  $V$  von  $Q$ , so daß gilt: Es existieren offene Mengen  $U_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ , in  $X$  mit  $\tau^{-1}(V) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} U_\nu$ , daß so für alle  $\nu \in \mathbb{N}$   $\tau_\nu := \tau | U_\nu: U_\nu \rightarrow V$   $N$ -quasieigentlich und  $\tau(E_\tau \cap U_\nu)$  in  $V$  analytisch ist. – Hierbei sei  $E_\tau$  die Entartungsmenge von  $\tau$ .

Es sei  $Q \in \overline{\tau(X)}$ ; in diesem Fall dürfen wir  $U_\nu \neq \emptyset, \nu \in \mathbb{N}$ , annehmen. O.B.d.A. seien die  $U_\nu$  zusammenhängend und damit irreduzibel, da  $X$  normal ist. Nach Satz 1 besitzt  $\tau | U_\nu: U_\nu \rightarrow V$  eine komplexe Basis  $(Z_\nu, \phi_\nu)$ ; es sei  $\psi_\nu: Z_\nu \rightarrow V$  durch  $\tau | U_\nu = \psi_\nu \circ \phi_\nu$  definiert.

d.  $\mathfrak{F}$  sei die Familie aller strikt von  $\tau$  analytisch abhängigen holomorphen Abbildungen,  $\hat{\mathfrak{F}}_1$  sei die Familie aller strikt von  $\tau$  analytisch abhängigen holomorphen Abbildungen  $\tilde{\phi}: X \rightarrow \tilde{Z}$ , die  $\tau$  majorisieren (d.h. zu denen genau eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\psi}: \tilde{Z} \rightarrow Y$  mit  $\tau = \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$  existiert). – Ist  $f \in \mathfrak{F}, f: X \rightarrow T$ , so ist  $\tau \times f: X \rightarrow Y \times T, P \rightarrow (\tau(P), f(P))$ , eine strikt von  $\tau$  analytisch abhängige holomorphe Abbildung, die  $\tau$  majorisiert. – Somit gilt

$$(1) \text{ Für alle } a \in X \text{ ist } \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f^{-1}(f(a)) = \bigcap_{f \in \hat{\mathfrak{F}}_1} f^{-1}(f(a)).$$

Nun sei  $f \in \hat{\mathfrak{F}}_1, f: X \rightarrow \tilde{Z}$ .  $f(U_\nu)$  ist für  $\nu \in \mathbb{N}$  eine irreduzible, lokal-analytische Teilmenge von  $\tilde{Z}$  der Dimension  $\text{rang } \tau$ ; es sei nämlich  $f_1 = h \circ f, h: \tilde{Z} \rightarrow Y$ ; die Abbildung  $f | U_\nu: U_\nu \rightarrow h^{-1}(V)$  ist semieigentlich und  $f(U_\nu)$  ist in  $h^{-1}(V)$  analytisch und irreduzibel, da  $U_\nu$  irreduzibel ist. – Da  $Q \in Y$  beliebig gewählt war und somit ganz  $X$  durch Mengen des Types  $U_\nu$  überdeckbar ist, folgt aus [12], S. 334, Aussage (6), die Existenz eines normalen komplexen Raumes  $Z'$  mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt eine  $f$  majorisierende, strikt von  $\tau$  analytisch abhängige, fast überall offene holomorphe Abbildung  $f': X \rightarrow Z'$  und eine diskrete holomorphe Abbildung  $\tau': Z' \rightarrow \tilde{Z}$  mit  $f = \tau' \circ f'$ .

Es sei  $\mathfrak{F}_1$  die Familie aller fast überall offenen,  $\tau$  majorisierenden  $f \in \hat{\mathfrak{F}}_1$  in normale komplexe Räume. Nach dem voraufgehenden gilt

$$(2) \text{ Für alle } a \in X \text{ ist } \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f^{-1}(f(a)) = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}_1} f^{-1}(f(a)).$$

Wir wählen nun ein festes  $U_\nu$  und behaupten:

$$(3) \bigcap_{f \in \mathfrak{F}_1} f^{-1}(f(U_\nu)) \text{ ist in } X \text{ offen.}$$

*Beweis.* Es seien  $x \in \bigcap_{f \in \mathfrak{F}_1} f^{-1}(f(U_\nu))$ ,  $x \in U_\mu$ ,  $f \in \mathfrak{F}_1$ ,  $f: X \rightarrow \tilde{Z}$ ,  $h: \tilde{Z} \rightarrow Y$  sei die durch  $h \circ f = \tau$  definierte holomorphe Abbildung.  $h^{-1}(V)$  ist normal und von der reinen Dimension  $\text{rang } \tau$ ; die irreduziblen Komponenten von  $h^{-1}(V)$  sind genau die Zusammenhangskomponenten von  $h^{-1}(V)$ .

$f|_{U_\mu}: U_\mu \rightarrow h^{-1}(V)$  ist semieigentlich, somit ist  $f(U_\mu)$  in  $h^{-1}(V)$  analytisch und irreduzibel ( $U_\mu$  ist ja irreduzibel!). Da  $f$  und  $\tau$  denselben Rang besitzen, ist  $\dim f(U_\mu) = \dim f(U_\nu) = \text{rang } \tau$ . Wegen  $f(x) \in f(U_\mu) \cap f(U_\nu)$  ist  $f(U_\nu) = f(U_\mu)$  ( $f(U_\nu)$  ist ja ebenfalls eine irreduzible, analytische ( $\text{rang } \tau$ )-dimensionale Teilmenge von  $h^{-1}(V)$ ), also eine Zusammenhangskomponente von  $h^{-1}(V)$ . – Hieraus folgt (3).

Nun ist aber offensichtlich  $\bigcap_{f \in \mathfrak{F}} f^{-1}(f(U_\nu)) = \phi^{-1}(\phi(U_\nu))$ , also ist wegen (1), (2), (3)  $\phi^{-1}(\phi(U_\nu))$  in  $X$  offen und  $\phi(U_\nu)$  ist somit offen in  $Z$ .

**e.** Wir haben eine eindeutig bestimmte surjektive Abbildung  $\lambda_\nu: Z_\nu \rightarrow \phi(U_\nu)$  mit  $\phi|_{U_\nu} = \lambda_\nu \circ \phi_\nu$ . – Wir nennen zwei Punkte  $x_1, x_2$  auf  $Z_\nu$  äquivalent, wenn für alle  $f \in \mathfrak{F}$  mit  $f|_{U_\nu} = f_\nu \circ \phi_\nu$   $f_\nu(x_1) = f_\nu(x_2)$  gilt.  $Z'_\nu$  sei der Raum der Äquivalenzklassen von  $Z_\nu$ ; wir können  $Z'_\nu$  mit  $\phi(U_\nu)$  identifizieren.  $Z'_\nu$  entsteht aus  $Z_\nu$  „durch Identifizierung gewisser Blätter von  $Z_\nu$  über  $\psi_\nu(Z_\nu)$ “. – Mit Hilfe des Hauptresultates von [3] folgt leicht, daß  $Z'_\nu = \phi(U_\nu)$  ein normaler komplexer Raum ist.

Nun ist ferner  $Z$  trivialerweise hausdorffsch, weil sich die Punkte in  $Z$  durch holomorphe Abbildungen in komplexe Räume, also insbesondere durch stetige Abbildungen in Hausdorffräume trennen lassen.

Damit ist Satz 9 im wesentlichen bewiesen; die restlichen Behauptungen von Satz 9 sind aber trivial.

*Bemerkung.* Der Beweis von Satz 9 ist dem Beweis von Satz 1 in [12] nachmodelliert.

**f.** Der Begriff der  $N$ -vollen holomorphen Abbildung ist eine Variation des Begriffes der vollen holomorphen Abbildung, der in [2], §11, eingeführt wird:

$X$  und  $Y$  seien komplexe Räume ( $X$  sei nicht notwendig normal),  $\tau: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung.  $\tau$  heißt voll, wenn es zu jedem  $Q \in Y$  eine Umgebung  $V$  von  $Q$  mit der folgenden Eigenschaft gibt: Es existieren offene Mengen  $U_\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , in  $X$  mit  $\tau^{-1}(V) = \bigcup_\nu U_\nu$ , so daß für alle  $\nu \in \mathbb{N}$   $\tau_\nu := \tau|_{U_\nu}: U_\nu \rightarrow V$  quasieigentlich ist.

Ist  $\tau: X \rightarrow Y$  eine volle holomorphe Abbildung und ist  $\varrho: \hat{X} \rightarrow X$  die Normalisierungsabbildung, so ist  $\hat{\tau} = \tau \circ \varrho: \hat{X} \rightarrow Y$  nach Satz 3  $N$ -voll.

## LITERATUR

- [1] ANDREOTTI, A. und GRAUERT, H., *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 193–259.
- [2] ANDREOTTI, A. und STOLL, W., *Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions*, Lecture Notes in Math. 234, Springer-Verlag, 1971.

- [3] GRAUERT, H. und REMMERT, R., *Komplexe Räume*, Math. Ann. 136 (1958), 245–318.
- [4] GUNNING, R. und ROSSI, H., *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [5a] KUHLMANN, N., *Projektive Modifikationen komplexer Räume*, Math. Ann. 139 (1960), 217–238.
- [5] —, *Niveaumengenräume holomorpher Abbildungen und nullte Bildgarben*, Man. math. 1 (1969), 147–189.
- [6] —, *Über analytisch abhängige holomorphe und meromorphe Abbildungen*, Man. math. 1 (1969), 339–367.
- [7] SIU, Y. T., *A pseudoconcave generalization of Grauert's direct image theorem*, I und II, Ann. d. Sc. Normale Superiori di Pisa, Ser. III, vol. XXIV (1970), 279–330 und 439–490.
- [7a] STEIN, K., *Analytische Zerlegungen komplexer Räume*, Math. Ann. 132 (1956), 68–93.
- [8] —, *Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen*, Math. Ann. 136 (1958), 1–18
- [9] —, *Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen*, I und II, Am. J. Math. 85 (1963), 298–313 und 86 (1964), 823–868.
- [10] —, *On factorization of holomorphic mappings*, Proc. of the Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, S. 1–7, Springer-Verlag, 1965.
- [11] SIU, Y. T. und TRAUTMANN, G., *Gap-Sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves*, Lecture Notes in Math. 172, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [12] WOLFFHARDT, K., *Existenzsätze für maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen*, Math. Zeitschr. 85 (1964), 328–344.

463 Bochum, Universitätsstr. 150, Abteilung für Mathematik der Ruhr-Universität

Eingegangen den 26. April 1973