

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Band:** 48 (1973)

**Artikel:** ...-Sätze für gewisse multiplikative arithmetische Funktionen  
**Autor:** Joris, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37165>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## $\Omega$ -Sätze für gewisse multiplikative arithmetische Funktionen<sup>1)</sup>

von H. JORIS

Kürzlich bewies ich in dieser Zeitschrift das folgende Ergebnis ([9]): Es sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper vom Grade  $n$ ,  $\lambda$  das Residuum der Zetafunktion  $\zeta_K$  von  $K$ , wobei für  $\operatorname{Re} s > 1$  gilt:

$$\zeta_K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}.$$

Ferner sei  $R_K(x) = \sum_{m \leq x} a(m)$  für  $x > 0$ . Dann gilt für  $x \rightarrow \infty$ :

$$R_K(x) - \lambda x = \Omega_{\pm} \left( x^{(n-1)/2n} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log x)^{(n+1)/2n}} \right) \right), \quad (1)$$

wo  $c > 0$  nur von  $K$  abhängt.

In dieser Arbeit werden gleichartige Resultate für  $L$ -Funktionen mit Idealklassencharakteren bewiesen. Sei  $\chi$  ein solcher Charakter, eigentlich oder uneigentlich, und

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 1, \quad (2)$$

wo  $\mathfrak{a}$  alle ganzen nichttrivialen Ideale durchläuft. Sei  $\lambda$  das Residuum von  $L(s, \chi)$  bei  $s=1$  ( $\lambda=0$  falls  $\chi$  nicht ein Hauptcharakter ist). Dann gilt:

$$\operatorname{Re} \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a}) - \lambda x = \Omega_{\pm} \left( x^{(n-1)/2n} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log x)^{(n+1)/2n}} \right) \right). \quad (3)$$

Unter einer natürlichen Bedingung gilt dasselbe für  $\operatorname{Im}$  anstelle von  $\operatorname{Re}$ . Nimmt man anstelle des Klassencharakters  $\chi$  einen Heckeschen Größencharakter  $\Lambda$ , erhält man das schwächere Resultat:

$$\operatorname{Re} \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \Lambda(\mathfrak{a}) = \Omega_{\pm} (x^{(n-1)/2n} \log \log \log x), \quad (4)$$

und dasselbe mit  $\operatorname{Im}$  anstelle von  $\operatorname{Re}$ , falls eine entsprechende Bedingung erfüllt ist.

---

<sup>1)</sup> Diese Arbeit wurde 1972 Dank eines Stipendiums des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der Wissenschaften ausgeführt.

Dieses Resultat entspricht folgender in [9] bewiesener Abschätzung für Ramanujans  $\tau$ -Funktion

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \Omega_{\pm}(x^{23/4} \log \log \log x). \quad (5)$$

(3) und (4) sind Verschärfungen der Ergebnisse, welche K. Chandrasekharan und R. Narasimhan in [1] bewiesen haben. In ihrer Arbeit wurde dieses Problem behandelt im weiteren Rahmen der Abschätzung der Koeffizientensummen von Dirichletreihen, welche eine Funktionalgleichung mit mehreren Gammafaktoren erfüllen. Eine ähnliche Verallgemeinerung wird hier betrachtet. (3) und (4) folgen dann als Spezialfälle.

Es seien  $\varphi(s) = \sum a_n \lambda_n^{-s}$ ,  $\psi(s) = \sum b_n \mu_n^{-s}$  Dirichletreihen, welche die Funktionalgleichung

$$\psi(\delta - s) \Delta(\delta - s) = \varphi(s) \Delta(s) \quad (6)$$

im Sinne von [1, 2] erfüllen, wobei

$$\Delta(s) = \prod_{v=1}^N \Gamma(\alpha_v s + \beta_v).$$

Satz 3 dieser Arbeit, welcher (4) und, mit einer leichten Abänderung des Beweises, (3) als Spezialfälle enthält, wird bewiesen unter der Bedingung (6) mit den zusätzlichen Annahmen:

$$\mu_n = A_1 n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_1 > 0; \quad b_n = b \cdot b(n),$$

wo  $b$  konstant und  $b(n)$  eine multiplikative arithmetische Funktion ist;  $2 \cdot A = 2 \sum \alpha_v$  soll eine natürliche Zahl  $M \geq 2$  sein.

Der Beweis beruht zum ersten auf einer grundlegenden Identität, welche K. Chandrasekharan und R. Narasimhan für die Riesz-Summen der Koeffizienten von Dirichletreihen mit einer Funktionalgleichung (6) aufstellten [1, 2]. Zum zweiten betrachtet man eine Laplacetransformation der Funktion, deren Verhalten untersucht wird; man erhält eine Identität, welche im speziellen Fall  $\Delta(s) = \Gamma(s)$  von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan [3] im gleichen Zusammenhang bewiesen und verwendet wurde. Diese Identität ist verknüpft mit einer Klasse von Identitäten, welche zu Gleichung (6) äquivalent sind. (s. K. Chandrasekharan und H. Joris [4]). Schliesslich wird der Beweis mit der gleichen Methode durchgeführt, mit der in [9] die Abschätzungen (1) und (5) bewiesen wurden.

Zum Beweis von Satz 3 werden zwei Resultate benötigt, welche für sich allein ein gewisses Interesse haben. Satz 1 setzt nur die Gleichung (6) voraus. Er gibt eine Abschätzung für das Restglied der Summenfunktion der Koeffizienten  $a_n$  in einem Intervall mit beliebigem Anfangspunkt  $y$  und genügend grosser, von  $y$  abhängiger Länge.

Aus diesem Satz folgt sofort Satz 3.2 in [1] für Riesz-Summen der Ordnung  $\varrho=0$  (d.h. gewöhnliche Partialsummen). Er liesse sich aber für beliebige  $\varrho \geq 0$  ebenso beweisen, was dann für genügend grosse  $\varrho$  die genaue Grössenordnung der Restglieder wie im Satz 3.2., [1], ergibt. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf  $\varrho=0$ . Es besteht auch ein Zusammenhang zwischen Satz 1 und einem Satz von J. Steinig [13] über die Mindestzahl von Zeichenwechseln der Restgliedfunktion. Satz 2 gibt eine untere Abschätzung für die Partialsummen der absoluten Beträge der Koeffizienten von Dirichletreihen mit Funktionalgleichung (6), was von Interesse ist, falls diese Koeffizienten nicht konstantes Vorzeichen haben.

Ich möchte an dieser Stelle Prof. K. Chandrasekharan für die Hilfe danken, die er mir bei der Abfassung dieser Arbeit zuteilwerden liess.

**1. Die Summe  $\sum_{\lambda_n \leq x} |a_n|$**

Es seien  $\varphi(s) = \sum a_n \lambda_n^{-s}$  und  $\psi(s) = \sum b_n \mu_n^{-s}$  durch die Funktionalgleichung (6) verknüpft, mit den Zahlen  $\alpha_v, \beta_v, \delta$  wie in (6). Die Reihen für  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  sollen absolute Konvergenzabszissen  $\sigma_a^*$  und  $\sigma_b^*$  haben. Ferner sei

$$A = \sum_{v=1}^N \alpha_v.$$

Für ganzes  $\varrho \geq 0$  sei

$$A^\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_n \leq x}^{\circ} a_n (x - \lambda_n)^\varrho, \quad x > 0, \tag{7}$$

wobei der Apostroph bedeutet, dass der letzte Summand  $a_n$  halbiert wird, falls  $\varrho=0$  und  $x = \lambda_n$ . Für  $x > 0$  sei ferner

$$S^\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\Gamma(s) \varphi(s)}{\Gamma(1 + \varrho + s)} x^{s+\varrho} ds, \tag{8}$$

wo  $\mathcal{C}$  eine positiv orientierte stückweise glatte Jordankurve ist, welche alle Singularitäten des Integranden umschliesst. Es gilt für  $x > 0$

$$A^\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s) \varphi(s)}{\Gamma(1 + \varrho + s)} x^{s+\varrho} ds, \tag{9}$$

wobei  $c > 0, c > \sigma_a^*$  ist. Das Restglied

$$P^\varrho(x) = A^\varrho(x) - S^\varrho(x), \quad x > 0, \tag{10}$$

hat nach [2], Formel (4) und Lemma 1, die Darstellung

$$P^{\varrho}(x) = C_{\varrho} x^{\omega_{\varrho}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \cos \left( k (x\mu_n)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) + R_{\varrho}(x) \right\}, \quad (11)$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{\varrho} &= \exp \left( \frac{2\varrho + 1}{2A} \sum_{v=1}^N \alpha_v \log \alpha_v \right), \quad \omega_{\varrho} = \frac{\delta}{2} + \varrho \left( 1 - \frac{1}{2A} \right) - \frac{1}{4A}, \\ D &= \pi \left\{ \frac{3}{4} + \frac{A\delta}{2} + \sum_{v=1}^N (\beta_v - \frac{1}{2}) \right\} = D_1 + iD_2, \quad D_1, D_2 \text{ reell,} \\ k &= 2A \exp \left( -\frac{1}{A} \sum_{v=1}^N \alpha_v \log \alpha_v \right), \\ R_{\varrho}(x) &= O(x^{-1/2A}) \quad \text{für } x \geq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Darstellung (11) ist gültig, falls  $\varrho > 2A\sigma_b^* - A\delta - \frac{1}{2}$ .

Für  $\varrho \geq 0$  gilt

$$\frac{d}{dx} P^{\varrho+1}(x) = P^{\varrho}(x), \quad x > 0, \quad (13)$$

wobei für  $\varrho=0$  an den Sprungstellen der Mittelwert der Rechts- und Linksableitung genommen wird.

Wir beweisen nun:

**SATZ 1.** Falls für ein  $a_n$  gilt  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$ , gibt es zwei positive Konstanten  $k_1, k_2$  mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem  $y \geq 1$  gibt es  $y_1$  und  $y_2$ ,

$$y \leq y_j \leq y + k_1 y^{1-1/2A}, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

derart dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P^0(y_1) &\geq k_2 y_1^{\delta/2 - 1/4A}, \\ \operatorname{Re} P^0(y_2) &\leq -k_2 y_2^{\delta/2 - 1/4A}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dasselbe gilt, falls überall  $\operatorname{Re}$  durch  $\operatorname{Im}$  ersetzt wird.

Man sieht leicht, dass dieser Satz eine Verstärkung von Satz 3.2 in [1] darstellt.

Dort ist die Annahme, dass  $\operatorname{Re} b_n \neq 0$  für ein  $n$ . Dann gilt

$$\operatorname{Re} P^0(x) = \Omega_{\pm}(x^{\delta/2 - 1/4A}). \quad (16)$$

Die Annahme  $\operatorname{Re} b_n \neq 0$  für ein  $n$  ist aber gleichbedeutend mit  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$  für ein  $n$ . Falls nämlich  $\operatorname{Re} a_n = 0$  für alle  $n$ , gilt  $\varphi(\bar{s}) = -\overline{\varphi(s)}$ , daher  $\operatorname{Re} S^0(x) = 0$ , wegen (8), also  $\operatorname{Re} P^0(x) = 0$ , im Gegensatz zu (16). Umgekehrt impliziert  $\operatorname{Re} b_n = 0$  für alle  $n$ , dass  $\operatorname{Re} a_n = 0$  für alle  $n$ .

*Beweis von Satz 1.* Es sei also  $\operatorname{Re} b_n \neq 0$  für ein  $n$ . Sei  $b_n = b'_n + ib''_n$ . Dann ist, wegen

$$\cos(a + bi) = \cos a \operatorname{Cosh} b - i \sin a \operatorname{Sinh} b,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( b_n \cos \left( k(\mu_n x)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D_1 - iD_2 \right) \right) \\ = b'_n \cos \left( k(\mu_n x)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D_1 \right) \operatorname{Cosh} D_2 \\ - b''_n \sin \left( k(\mu_n x)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D_1 \right) \operatorname{Sinh} D_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Da  $b'_n \neq 0$  für mindestens ein  $n$ , und  $\operatorname{Cosh} D_2 \geq 1$ , gibt es ein  $n$ , derart dass

$$(b'_n \operatorname{Cosh} D_2, -b''_n \operatorname{Sinh} D_2) \neq (0, 0).$$

Sei  $M$  das kleinste derartige  $n$ . Wegen (17) gibt es unter vier aufeinanderfolgenden ganzen  $\varrho$  sicher eines mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( b_M \cos \left( k(x\mu_M)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) \right) \\ \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( (b'_M \operatorname{Cosh} D_2)^2 + (b''_M \operatorname{Sinh} D_2)^2 \right)^{1/2} = K > 0, \end{aligned} \quad (18)$$

während

$$\operatorname{Re} \left( b_n \cos \left( k(x\mu_n)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) \right) = 0 \quad \text{für} \quad n < M. \quad (19)$$

Für  $n \geq M$  sei  $v_n = \mu_n / \mu_M$ ; dann folgt aus (12) und (19) für  $\varrho > 2A\sigma_b^* - A\delta - \frac{1}{2}$ :

$$\operatorname{Re} P^{\varrho}(x) = \frac{C_{\varrho} x^{\omega_{\varrho}}}{\mu_M^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( b_M \cos \left( k(x\mu_M)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) \right) \\ & + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \left( b_n \cos \left( k(x\mu_n)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) \right)}{v_n^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \\ & + Q_{\varrho}(x), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$Q_\varrho(x) = O(x^{-1/2A}). \quad (21)$$

Wegen  $v_n \geq v_{M+1} > 1$  für  $n > M$  ist für genügend grosses  $\varrho$ , sagen wir  $\varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \dots$ , und für  $x > 0$ ,

$$\left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \left( b_n \cos \left( k(x\mu_n)^{1/2A} - \frac{\pi}{2} \varrho - D \right) \right)}{v_n^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \right| \leq \frac{K}{4}. \quad (22)$$

Nun werde  $x_0$  noch so gross gewählt, dass für  $x \geq x_0$  und  $\varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3$  gilt:

$$|Q_\varrho(x)| \leq \frac{K}{4}, \quad (23)$$

was wegen (21) möglich ist. Wegen (18), (20), (22) und (23) gibt es zu gegebenen  $x \geq x_0$  und  $h > 0$  unter den vier Zahlen  $\varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3$  stets eine,  $\varrho$ , mit der Eigenschaft:

$$\operatorname{Re} P^\varrho(x+h) \geq \frac{C_\varrho(x+h)^{\omega_\varrho}}{\mu_M^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \cdot \frac{K}{2}. \quad (24)$$

Sei nun  $y_\varrho$  eine reelle Variable,  $x \leq y_\varrho \leq x+h$ ,  $x \geq x_0$ , und

$$\operatorname{Re} P^0(y_\varrho) < k_2 y_\varrho^{\delta/2 - 1/4A} \leq k_2 (x+h)^{\delta/2 - 1/4A}, \quad (25)$$

falls  $\delta \geq 1/2A$ , was wir annehmen wollen. Auf diese Ungleichung wird folgendes Integral angewandt:

$$\int_x^{x+h} dy \int_{x+h-(x+h-y)/\varrho}^{x+h} dy_1 \int_{y_1-(x+h-y)/\varrho}^{y_1} dy_2 \dots \int_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} dy_\varrho.$$

Dies ergibt, wie man leicht nachrechnet, unter Verwendung von (13),

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left( h P^\varrho(x+h) + \sum_{m=1}^{\varrho} \binom{\varrho}{m} (-1)^m \frac{\varrho}{m} \left( P^{\varrho+1}(x+h) - P^{\varrho+1} \left( x + \left( 1 - \frac{m}{\varrho} \right) h \right) \right) \right) \\ & \leq k_2 (x+h)^{\delta/2 - 1/4A} \cdot \frac{h^{\varrho+1}}{\varrho^\varrho (1+\varrho)} \leq k_2 (x+h)^{\delta/2 - 1/4A} h^{\varrho+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Nun ist wegen (11) mit einem  $k_3 > 0$  für  $y \geq 1$ :

$$|P^{\varrho+1}(y)| \leq k_3 y^{\omega_\varrho + (1-1/2A)}. \quad (27)$$

Es sei vorderhand  $2A \geq 1$ , und sei

$$C'_0 = \inf \left\{ \frac{C_\varrho \cdot K}{2\mu_M^{\delta/2 + 1/4A + \varrho/2A}} \mid \varrho = \varrho_0, \dots, \varrho_0 + 3 \right\},$$

$$C''_0 = k_3 (\varrho_0 + 3) 2^{\varrho_0 + 4}.$$

Dann folgt aus (24), (26), (27):

$$k_2 (x + h)^{\delta/2 - 1/4A} h^{\varrho + 1} \geq (x + h)^{\omega_\varrho} (C'_0 h - C''_0 (x + h)^{1 - 1/2A}).$$

Setzt man jetzt  $h = k_1 x^{1 - 1/2A}$ ,  $k_1 \geq 4C''_0/C'_0$ , und wählt man  $x_0$  gross genug, dass für  $x \geq x_0$  gilt

$$(1 + k_1 x^{-1/2A})^{1 - 1/2A} \leq 2,$$

so erhält man wegen  $\omega_\varrho = \delta/2 - 1/4A + (1 - 1/2A)\varrho$ :

$$k_2 k_1^{\varrho + 1} \geq (1 + k_1 x^{-1/2A})^{(1 - 1/2A)\varrho} (k_1 C'_0 - C''_0 (1 + k_1 x^{-1/2A})^{1 - 1/2A})$$

$$\geq k_1 C'_0 - 2C''_0 \geq 2C''_0,$$

$$k_2 \geq \frac{2C''_0}{k_1^{\varrho + 4}}.$$

Somit ist Ungleichung (25) für hinreichend kleines  $k_2$  nicht für alle  $y_\varrho$  im Intervall möglich, falls  $h = k_1 x^{1 - 1/2A}$  gewählt wird. Durch Vergrößerung von  $k_1$  und Verkleinerung von  $k_2$  muss man anstatt  $tx \geq x_0$  nur voraussetzen  $x \geq 1$ . Damit ist die Existenz eines  $y_1$  in Satz 1 gezeigt. Genau gleich zeigt man die Existenz eines  $y_2$ .

Man sieht leicht, dass die während des Beweises gemachten Annahmen  $2A \geq 1$  und  $\delta \geq 1/2A$  nicht wesentlich sind. Sie dienen lediglich dazu, um Potenzen  $y^\alpha$ ,  $x \leq y \leq x + h$ , wegen  $\alpha \geq 0$  durch  $(x + h)^\alpha$  abzuschätzen. Falls  $\alpha < 0$ , ist  $y^\alpha < x^\alpha$ ; wegen  $h = o(x)$  ändert das aber am Beweis nichts.

Um die Aussagen über den Imaginärteil im Satz 1 zu erhalten, multipliziert man die ganze Funktionalgleichung (6) mit  $i = \sqrt{-1}$  und führt so die Behauptung auf die eben bewiesene zurück.

*Bemerkung 1.* Der Beweis von Satz 1 wurde ein wenig kompliziert, da  $D_2 \neq 0$  zugelassen wurde. Dem Verfasser ist allerdings kein solches Beispiel bekannt.

*Bemerkung 2.* Aus Satz 1 folgt, falls  $\text{Re} a_n \neq 0$  für ein  $n$ , dass  $\text{Re} P^0(t)$  zwischen 1 und  $x$  mindestens  $c_1 x^{1/2A} - c_2$  Vorzeichenwechsel hat, wo  $c_1, c_2 > 0$  Konstanten sind, und  $x > 1$ . Ein solcher Satz wurde von J. Steinig [13] bewiesen, der auch  $c_1$  explicit angibt.

Nun beweist man leicht



**SATZ 2.** Die Voraussetzungen seien wie im Satz 1. Es gebe ein  $n$  mit  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$ .  $a > 0$  sei fest gewählt. Dann gibt es ein  $x_0 > a$  und ein  $c > 0$  sodass für  $x \geq x_0$  gilt:

$$\int_a^x |d \operatorname{Re} P^0(t)| \geq c x^{\delta/2 + 1/4A}. \quad (28)$$

Dasselbe gilt mit  $\operatorname{Im}$  anstelle von  $\operatorname{Re}$ , also gilt stets, falls  $\varphi(s) \neq 0$ ,

$$\int_a^x |dP^0(t)| \geq c x^{\delta/2 + 1/4A}. \quad (29)$$

Ist zudem

$$\frac{d}{dx} S^0(x) = o(x^{\delta/2 + 1/4A - 1}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad (30)$$

so ist, falls  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$  für ein  $n$ :

$$\sum_{\lambda_n \leq x} |\operatorname{Re} a_n| \geq c x^{\delta/2 + 1/4A}. \quad (31)$$

Dasselbe gilt für  $\operatorname{Im}$  anstelle von  $\operatorname{Re}$ , also, falls  $\varphi(s) \neq 0$ :

$$\sum_{\lambda_n \leq x} |a_n| \geq c x^{\delta/2 + 1/4A}. \quad (32)$$

Dabei sind  $c > 0$  geeignete Konstanten und  $x$  genügend gross.

*Beweis.* Es sei  $k_1$  die Konstante aus Satz 1. Wir setzen

$$y(n) = cn^{2A}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad c = \max\left(1, \left(\frac{k_1}{A}\right)^{2A}\right),$$

Dann ist für  $n \geq n_0$ ,  $n_0$  genügend gross:

$$y(n+1) - y(n) \geq k_1 y(n)^{1-1/2A},$$

und

$$y(n) \geq 1.$$

Sei nun  $n+1 > n_0$  und  $y(n+1) \leq x < y(n+2)$ . Dann ist wegen (15):

$$\begin{aligned} \int_{y(n_0)}^x |d \operatorname{Re} P^0(t)| &\geq \int_{y(n_0)}^{y(n+1)} |d \operatorname{Re} P^0(t)| \geq 2k_2 \sum_{m=n_0}^n y(m)^{\delta/2 - 1/4A} \\ &\geq 2k_2 c^{\delta/2 - 1/4A} \sum_{m=n_0}^n m^{A\delta - 1/2} \\ &\geq c_1 n^{A\delta + 1/2} = c_2 y(n)^{\delta/2 + 1/4A} \geq c_3 x^{\delta/2 + 1/4A}. \end{aligned}$$

Damit ist (28) gezeigt. Falls  $\delta/2 + 1/4A \leq 0$ , ist (31) trivial. Also sei  $\delta/2 + 1/4A > 0$ . Dann ist für  $x \rightarrow \infty$ , wegen (30):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq x} |\operatorname{Re} a_n| &\geq \int_{\frac{1}{2}\lambda_1}^x |d \operatorname{Re} A^0(t)| \geq \int_{\frac{1}{2}\lambda_1}^x |d \operatorname{Re} P^0(t)| - \int_{\frac{1}{2}\lambda_1}^x |d S^0(t)| \\ &\geq cx^{\delta/2 + 1/4A} + \int_{\frac{1}{2}\lambda_1}^x o(t^{\delta/2 + 1/4A - 1}) dt = cx^{\delta/2 + 1/4A}(1 + o(1)), \end{aligned}$$

was (31) beweist.

**KOROLLAR.** Die Voraussetzungen seien wie in Satz 2. Es gelte (30) und  $\varphi(s) \neq 0$ . Dann ist mit einem  $c > 0$  für genügend grosses  $x$ :

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \frac{|a_n|}{\lambda_n^{\delta/2 + 1/4A}} \geq c \log x. \tag{33}$$

Für den Beweis benutzt man die gleiche Folge  $y(n)$  wie beim Beweis von (28) sowie die Ungleichung:

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \frac{|a_n|}{\lambda_n^{\delta/2 + 1/4A}} \geq O(1) + \sum_{m=n_0}^n \int_{y(m)}^{y(m+1)} t^{-\delta/2 - 1/4A} |dA^0(t)|.$$

Der Rest ist nach dem Vorangegangenen leicht nachzurechnen.

## 2. Das Integral $\int_0^\infty x^r e^{-sx} P^q(x^{2A}) dx$

Die Bezeichnungen seien die gleichen wie bisher. Für die Summationsordnung  $\varrho$  wollen wir der Allgemeinheit halber auch nicht ganze positive Werte zulassen. Es gilt dann weiterhin die verallgemeinerte Perronsche Formel (9). Als einziges ist die Definition von  $S^e(x)$  etwas abzuändern, da der Integrand in (8) bei nicht-ganzen  $\varrho$  auf der negativen reellen Achse beliebig weit nach links Pole hat, nämlich Pole von  $\Gamma(z)$ . Wir definieren daher  $\mathcal{C}$  in (8) als das positiv umlaufene Rechteck mit der Ecke  $c_1 - iR$ ,  $c_1 + iR$ ,  $c_2 + iR$ ,  $c_2 - iR$ . Dabei ist  $c_1 > 0$ ,  $c_1 > \sigma_a^*$ ;  $R$  ist so gross dass der Integrand regulär ist für  $|\operatorname{Im} z| \geq R$ . Ferner ist  $c_2 = -(m_0 + \frac{1}{2})$ ,  $m_0$  ganz,  $m_0 \geq 0$ .  $m_0$  soll gross genug sein, insbesondere folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \delta + \frac{1}{2} + m_0 &> \sigma_b^*, \quad \delta + \frac{1}{2} + m_0 > \operatorname{Re} \left( \frac{-\beta_v}{\alpha_v} \right), \quad v = 1, \dots, N, \\ \frac{1}{2} + m_0 &> \frac{3}{2A} - \frac{\delta}{2}, \quad \frac{1}{2} + m_0 > \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_v - 1}{\alpha_v} \right), \quad v = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{34}$$

Es ist dann

$$P^{\varrho}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\varphi(z) \Gamma(z)}{\Gamma(z+1+\varrho)} x^{z+\varrho} dz, \quad (35)$$

wo  $\mathcal{C}_1$  der Streckenzug  $c_1 - i\infty$ ,  $c_1 - iR$ ,  $c_2 - iR$ ,  $c_2 + iR$ ,  $c_1 + iR$ ,  $c_1 + i\infty$  ist. Es ist  $A^{\varrho}(x) = 0$  für  $x < \lambda_1$ , und

$$S^{\varrho}(x) = O(x^{-m_0-1/2+\varrho}), \quad x \rightarrow 0,$$

also

$$P^{\varrho}(x) = O(x^{-m_0-1/2+\varrho}), \quad x < \lambda_1. \quad (36)$$

Für  $\varrho > 0$  ist das Integral (35) absolut konvergent, also

$$P^{\varrho}(x) = O(x^{c_1+\varrho}), \quad x \geq \lambda_1. \quad (37)$$

Es ist aber auch  $S^0(x) = O(x^{c_1})$  für  $x \rightarrow \infty$ , aber, da  $\sum |a_n| \lambda_n^{-c_1} < \infty$ , auch  $A^0(x) = O(x^{c_1})$ . Also gilt (37) auch für  $\varrho = 0$ .

Es sei nun  $\operatorname{Re} s > 0$ ,  $\varrho \geq 0$  und

$$r > 2A(m_0 + \frac{1}{2}) - 2A\varrho + \varrho. \quad (38)$$

Dann konvergiert wegen (36) und (37) das Integral

$$g_{r,\varrho}(s) = \int_0^{\infty} x^r e^{-sx} P^{\varrho}(x^{2A}) dx \quad (39)$$

absolut.

Sei nun  $s > 0$ ,  $\varrho > 0$ . Wegen der absoluten Konvergenz von (35) ist

$$\begin{aligned} g_{r,\varrho}(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \varphi(z) \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\varrho+1)} \int_0^{\infty} x^{r+2A(\varrho+z)} e^{-xs} dx dz \\ &= \frac{s^{-r-1-2A\varrho}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \varphi(z) \frac{\Gamma(z) \Gamma(r+2Az+2A\varrho+1)}{\Gamma(z+\varrho+1)} s^{-2Az} dz. \end{aligned} \quad (40)$$

Sei  $\varrho=0$ . Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned} g_{r,0}(s) &= \int_0^\infty x^r e^{-xs} P^0(x^{2A}) dx \\ &= -\frac{1}{2A} \int_0^\infty P^1(x^{2A}) d(x^{r-2A+1} e^{-xs}) \\ &= -\frac{1}{2A} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\Gamma(z) \varphi(z)}{\Gamma(2+z)} x^{2A(z+1)} dz d(x^{r-2A+1} e^{-xs}). \end{aligned}$$

Da  $d/dx(x^{r-2A+1}e^{-xs})=O(x^{r-2A})$  für  $x \rightarrow 0$ , und da  $r-2A(m_0 + \frac{1}{2}) > 0$ , ist das Doppelintegral absolut konvergent, also

$$\begin{aligned} g_{r,0}(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\varphi(z) \Gamma(z)}{\Gamma(2+z)} \left(-\frac{1}{2A}\right) \int_0^\infty x^{2A(z+1)} d(x^{r-2A+1} e^{-xs}) dz \\ &= \frac{s^{-r-1}}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \varphi(z) \frac{\Gamma(z) \Gamma(r+2Az+1)}{\Gamma(1+z)} dz, \end{aligned}$$

d.h. (40) gilt auch für  $\varrho=0$ . Nun geht, nach der Stirlingschen Formel für die Gammafunktion, der Integrand in (40) in jedem Vertikalstreifen endlicher Breite gleichmässig gegen 0, falls  $\text{Im}z \rightarrow \pm \infty$ , so dass gilt: Für  $s > 0, \varrho \geq 0$ , ist

$$g_{r,\varrho}(s) = \frac{s^{-r-1-2A\varrho}}{2\pi i} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \varphi(z) \frac{\Gamma(z) \Gamma(2Az+2A\varrho+1+r)}{\Gamma(z+\varrho+1)} s^{-2Az} dz. \tag{41}$$

Nun ist  $\varphi(z) = \psi(\delta-z) (\Delta(\delta-z)/\Delta(z))$ , und für  $\text{Re}z = c_2 = -(m_0 + \frac{1}{2})$  ist wegen der ersten Ungleichung in (34)  $\text{Re}(\delta-z) > \sigma_b^*$ , also

$$\begin{aligned} g_{r,\varrho}(s) &= \frac{s^{-r-1-2A\varrho}}{2\pi i} \\ &\times \int_{c_2} \psi(\delta-z) \frac{\Delta(\delta-z) \Gamma(z) \Gamma(r+2A\varrho+2Az+1)}{\Delta(z) \Gamma(z+\varrho+1)} s^{-2Az} dz \\ &= s^{-r-1-2A\varrho} \sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{\mu_n^\delta} \frac{1}{2\pi i} \\ &\times \int_{c_2} \frac{\Delta(\delta-z) \Gamma(z) \Gamma(r+2A\varrho+2Az+1)}{\Delta(z) \Gamma(z+\varrho+1)} \left(\frac{s}{\mu_n^{1/2A}}\right)^{-2Az} dz, \end{aligned} \tag{42}$$

wegen der absoluten Konvergenz. Dabei sei für reelles  $a$ :

$$\int_a^{\infty} f(z) dz = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z) dz.$$

Für  $\operatorname{Re} v > 0$  definieren wir:

$$M_{r, \varrho}(v) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2A} \times \int_{-2A(m_0+1/2)}^{\infty} \Gamma(r+z+2A\varrho+1) \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2A}\right)}{\Gamma\left(\varrho+1+\frac{z}{2A}\right)} \frac{\Delta\left(\delta-\frac{z}{2A}\right)}{\Delta\left(\frac{z}{2A}\right)} v^{-z} dz. \quad (43)$$

Das Integral ist für  $\operatorname{Re} v > 0$  absolut konvergent und definiert dort eine analytische Funktion. Somit ist für  $s > 0$ :

$$g_{r, \varrho}(s) = s^{-r-1-2A\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^\delta} M_{r, \varrho}\left(\frac{s}{\mu_n^{1/2A}}\right). \quad (44)$$

Nun ist

$$\sin \pi z \cdot \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi.$$

Also

$$\frac{\Delta\left(\delta-\frac{z}{2A}\right)}{\Delta\left(\frac{z}{2A}\right)} = (-2\pi i)^{-N} V(-z) \sum_{k=1}^{2N} \eta_k e^{-\gamma_k z}, \quad (45)$$

wobei

$$V(z) = \prod_{v=1}^N \Gamma\left(\alpha_v \delta + \beta_v + \frac{\alpha_v}{2A} z\right) \Gamma\left(1 - \beta_v + \frac{\alpha_v}{2A} z\right), \quad (46)$$

$$\frac{\pi}{2} = \gamma_1 > \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \dots > \gamma_{2N} = -\frac{\pi}{2}. \quad (47)$$

Die  $\eta_k$  sind komplexe Konstanten, wobei

$$\eta_1 = \exp\left(-\pi i \sum_{v=1}^N \beta_v\right), \quad \eta_{2N} = \exp\left(\pi i \left(\sum_{v=1}^N \beta_v - N\right)\right). \quad (48)$$

Sei nun

$$L_{r, \varrho}(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-2A(m_0 + 1/2)} V(-z) \Gamma(r + z + 2A\varrho + 1) \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2A}\right)}{\Gamma\left(\varrho + 1 + \frac{z}{2A}\right)} v^{-z} dz. \quad (49)$$

Wegen der Bedingungen für  $m_0$  und  $r$  trifft die Integrationslinie keinen Pol des Integranden; und zwar hat sie alle Pole von  $V(-z)$  rechts, alle Pole von  $\Gamma(r + z + 2A\varrho + 1)$  links liegen.

Das Integral (49) konvergiert für  $|\arg v| < \pi$  absolut und lokal gleichmässig, dort ist also  $L_{r, \varrho}$  regulär, und es gilt für  $\operatorname{Re} v > 0$ :

$$M_{r, \varrho}(v) = \frac{(-2\pi i)^{-N}}{2A} \sum_{k=1}^{2^N} \eta_k L_{r, \varrho}(e^{i\gamma_k v}). \quad (50)$$

Aus der Formel von Stirling ergibt sich: Sei  $z = -2A(m_0 + \frac{1}{2}) + iR + \zeta$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $R$  gross genug,  $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$  und  $v = |v| \exp(i\vartheta)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \Gamma(z/2A) \Gamma^{-1}(\varrho + 1 + z/2A) \Gamma(r + 1 + z + 2A\varrho) V(-z) v^{-z} \\ & = O(|\zeta|^q (e^c |v|)^{-\xi} e^{\eta(\vartheta - \pi)}), \end{aligned} \quad (51)$$

wobei

$$q = r + A\delta + (2A - 1)\varrho - \frac{1}{2}, \quad c = \sum_{v=1}^N \frac{\alpha_v}{A} \log \frac{\alpha_v}{2A}.$$

Sei jetzt  $|\vartheta| < \pi$ ,  $|v| < e^{-c}$ ,  $\xi \leq 0$ . Sei

$$e^c |v| = k_1 < 1, \quad e^{\vartheta - \pi} = k_2 < 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |\zeta|^q (e^c |v|)^{-\xi} e^{\eta(\vartheta - \pi)} & = |\zeta|^q k_1^{-\xi} k_2^\eta \leq |\zeta|^q (\max(k_1, k_2))^{|\xi|} \\ & = |\zeta|^q k_3^{|\xi|}, \end{aligned}$$

mit  $k_3 < 1$ , wegen  $\xi \leq 0$ ,  $\eta \geq 0$ . Dieselbe Ungleichung erhält man mit  $z = -2A(m_0 + \frac{1}{2}) - iR + \zeta$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\xi \leq 0$ ,  $\eta \leq 0$ . Daher lässt sich der Integrationsweg in (49) knicken zum Streckenzug  $-\infty - iR$ ,  $-2A(m_0 + \frac{1}{2}) - iR$ ,  $-2A(m_0 + \frac{1}{2}) + iR$ ,  $-\infty + iR$ . Auf diesem Weg ist der Integrand

$$O(|\zeta|^q (e^c |v|)^{|\xi|}),$$

sodass das Integral für beliebige  $v$  mit  $0 < |v| < e^{-c}$  konvergiert, d.h.  $L_{r,\varrho}(v)$  lässt sich in den punktierten Kreis  $0 < |v| < e^{-c}$  beliebig fortsetzen, und für  $0 < |v| \leq \frac{1}{2}e^{-c}$ ,  $\arg v$  beschränkt, ist

$$L_{r,\varrho}(v) = O(|v|^{2A(m_0+1/2)}). \quad (52)$$

Genau gleich kann man, falls  $|v| > e^{-c}$  ist, die Integrationslinie in (49) knicken zum Streckenzug  $\infty - iR$ ,  $-2A(m_0 + \frac{1}{2}) - iR$ ,  $-2A(m_0 + \frac{1}{2}) + iR$ ,  $\infty + iR$ .  $L_{r,\varrho}(v)$  lässt sich so in  $|v| > \exp(-c)$  beliebig analytisch fortsetzen, und es ist

$$L_{r,\varrho}(v) = O(|v|^{2A(m_0+1/2)}) \quad (53)$$

für  $|v| > 2e^{-c}$ ,  $\arg v$  beschränkt.

LEMMA 1. Sei  $L_{r,\varrho}(v)$  wie in (49) definiert. Dann ist für  $|v| \rightarrow 0$  oder  $|v| \rightarrow \infty$  mit  $|\arg v| < \pi$ ,

$$L_{r,\varrho}(v) = O(|v|^{2A(m_0+1/2)}). \quad (54)$$

Weiter sei

$$\alpha = r + (2A - 1)\varrho + \frac{1}{2} + A\delta, \quad \beta = r + (2A - 1)\varrho,$$

$$m = [\alpha], \quad c = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \log \frac{\alpha_\nu}{2A}.$$

(Dabei sei  $r$  so gewählt, dass  $\alpha$  nicht ganz ist). Dann ist für  $|\arg v| < \pi$ ,  $v \rightarrow -e^{-c}$ :

$$L_{r,\varrho}(v) = \sum_{\nu=0}^m k_\nu v^\beta (e^{-c} + v)^{-\alpha+\nu} + O(1); \quad (55)$$

es ist  $k_0 > 0$ , und für  $v^\beta$ ,  $(e^{-c} + v)^{-\alpha+\nu}$  werden die Zweige genommen, welche für  $v > 0$  positiv werden. Insbesondere ist für  $0 < \sigma < \text{const.}$ :

$$L_{r,\varrho}(-e^{-c} \pm i\sigma) = B_0 e^{\pm \pi i/2 (r + (2A-1)\varrho - 1/2 - A\delta)} \sigma^{-\alpha} (1 + O(\sigma)), \quad (56)$$

mit  $B_0 > 0$ .

Man bemerke, dass  $\alpha > 1$  wegen der dritten Ungleichung in (34).

Beweis. (54) ist schon bewiesen. (56) folgt sofort aus (55). Für den Beweis von (55) bemerken wir, dass für  $a > 0$ ,  $|\arg v| < \pi$ , die folgende Identität gilt:

$$(1 + ve^c)^{-a} = \frac{e^{-c\beta} v^{-\beta}}{2\pi i \Gamma(a)} \int_{-2A(m_0+1/2)} \Gamma(z + \beta) \Gamma(a - \beta - z) (ve^c)^{-z} dz + O(1),$$

falls  $v \rightarrow -e^{-c}$ , sowie, dass wegen der Stirlingschen Formel:

$$\begin{aligned} & \Gamma(z/2A) \Gamma^{-1}(\varrho + 1 + z/2A) \Gamma(r + z + 1 + 2A\varrho) V(-z) \\ &= \Gamma(z + \beta) \Gamma(\alpha - \beta - z) e^{-cz} e^{c_1} \left( 1 + \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{z^n} + O(|z|^{-m-1}) \right), \end{aligned}$$

für  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\pi/4 \leq |\arg z| \leq 3\pi/4$ ,  $c_1$  reell. Im übrigen geht der Beweis wie in [4], Th. 3. Aus Lemma 1 folgt wegen (50) sofort:

LEMMA 2. Für  $\operatorname{Re} v > 0$  sei  $M_{r,\varrho}(v)$  wie in (43) definiert. Dann ist mit den gleichen Bezeichnungen wie in Lemma 1, sowie mit  $E = e^{-c}$ :

$$M_{r,\varrho}(v) = O(|v|^{2A(m_0+1/2)}) + O(|v + E|^{-\alpha}) + O(|v - E|^{-\alpha}). \tag{58}$$

Für  $v \rightarrow 0$  ist gleichmässig in  $\operatorname{Re} v > 0$ :

$$M_{r,\varrho}(v) = O(|v|^{2A(m_0+1/2)}). \tag{59}$$

Ferner sei

$$D' = r/2 + (2A - 1)\varrho/2 - 1/4 - A\delta/2 - \sum_{\nu=1}^N (\beta_\nu - \frac{1}{2}),$$

wo die  $\beta_\nu$  die durch die Funktionalgleichung definierten Konstanten sind. Dann gilt für  $0 < \sigma < \text{const.}$  mit einem  $B_1 > 0$ :

$$M_{r,\varrho}(\sigma \pm iE) = B_1 e^{\pm iD'\pi} \sigma^{-\alpha} (1 + O(\sigma)). \tag{60}$$

LEMMA 3. Es sei  $g_{r,\varrho}(s)$  für  $\operatorname{Re} s > 0$  durch (39) definiert. Es ist dann für  $\operatorname{Re} s > 0$ :

$$g_{r,\varrho}(s) = s^{-r-1-2A\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^\delta} M_{r,\varrho}(s\mu_n^{-1/2A}), \tag{61}$$

wobei die Reihe rechts lokal gleichmässig absolut konvergiert. Für  $|s| < \frac{1}{2}\mu_1^{1/2A}E$  ist

$$g_{r,\varrho}(s) = O(|s|^{2A(m_0+1/2)-r-1-2A\varrho}) \tag{62}$$

gleichmässig in  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Beweis. (61) ist gezeigt für  $s > 0$ . Die gleichmässige Konvergenz und damit die Analytizität der Reihe rechts in (61) folgt aus (59) und aus der ersten Ungleichung



(34). Gleichzeitig folgt auch (62): Sei  $|s| < R$ ,  $\text{Res} > 0$ ,  $R \leq \frac{1}{2}E\mu_{n_0}^{1/2A}$ ,  $n_0 \geq 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|b_n|}{\mu_n^{\delta}} |M_{r,q}(s\mu_n^{-1/2A})| &= O\left(R^{2A(m_0+1/2)} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|b_n|}{\mu_n^{\delta+m_0+1/2}}\right) \\ &= O(R^{2A(m_0+1/2)}). \end{aligned}$$

Durch analytische Fortsetzung gilt (61) in ganz  $\text{Res} > 0$ .

LEMMA 4. *Es gebe eine reelle Konstante  $\gamma$  mit*

$$|\mu_n - \mu_{n\pm 1}|^{-1} = O(\mu_n^{\gamma})$$

für  $n \geq 2$ . Mit denselben Bezeichnungen wie in Lemma 2, 3 sei

$$D = D' - \frac{1}{2}(r + 1 + 2Aq).$$

Dann ist für  $\mu_1 \leq \mu_m \leq Y$ ,  $0 < \sigma < \frac{1}{2}E\mu_1^{1/2A}$ :

$$g_{r,q}(\sigma \pm iE\mu_m^{1/2A}) = B_2 e^{\pm \pi i D} \frac{b_m}{\mu_m^{\delta/2 + 1/4A + q/2A}} + O(\sigma Y^F),$$

mit einem  $B_2 > 0$  und einer reellen Zahl  $F$ .

Der Beweis geht wie in [6] oder [9], indem man in (61) Lemma 2 auf die Teilsummen  $\mu_n = \mu_m$ ;  $\mu_1 \leq \mu_n \leq 2^{4A}\mu_m$ ,  $\mu_n \neq \mu_m$ ;  $\mu_n > 2^{4A}\mu_m$  anwendet.

Ähnlich, durch Aufteilung der Summe (61) in die zwei Teilsummen

$$\mu_n \leq \left(\frac{2}{E}|s|\right)^{2A}; \quad \mu_n > \left(\frac{2}{E}|s|\right)^{2A},$$

erhält man wie in [6] oder [9]:

LEMMA 5. *Es sei  $0 < \omega < E\mu_1^{1/2A}$ . Im übrigen seien die Bezeichnungen wie bisher. Dann gibt es eine positive Konstante  $F$  mit der Eigenschaft:*

*Für  $\text{Res} > 0$  und  $|s \pm iE\mu_n^{1/2A}| \geq \omega$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ist  $g_{r,q}(s) = O(\omega^{-\alpha}|s|^F) + O(|s|^{-r-1-2Aq+2A(m_0+1/2)})$ .*

### 3. Beweis eines $\Omega$ -Satzes

Es sollen weiterhin  $\varphi(s) = \sum a_n \lambda_n^{-s}$  und  $\psi(s) = \sum b_n \mu_n^{-s}$  die Funktionalgleichung (6) erfüllen. Dabei sei mit einem  $A_1 > 0$

$$\mu_n = A_1 n, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \tag{63}$$

es gebe eine komplexe Zahl  $b \neq 0$ , eine natürliche Zahl  $M_0$  derart, das

$$b_n = b \cdot b(n), \quad n = 1, 2, \dots \tag{64}$$

$$b(n) b(m) = b(nm), \quad (n, m) = (n, M_0) = 1. \tag{65}$$

Weiter sei

$$S_b^0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\psi(s) x^s}{s} ds, \tag{66}$$

wo  $\mathcal{C}$  alle Singularitäten des Integranden einmal positiv umläuft. Es gelte:

$$\frac{d}{dx} S_b^0(x) = o(x^{\delta/2 + 1/4A - 1}), \tag{67}$$

$$2A = 2 \sum_{v=1}^N \alpha_v = M = \text{natürliche Zahl} \geq 2. \tag{68}$$

Für jede endliche Menge Primzahlen  $\mathcal{S}$  soll  $\{\mathcal{S}\}$  die Menge derjenigen natürlichen Zahlen sein, deren Primteiler in  $\mathcal{S}$  liegen. Für jedes endliche  $\mathcal{S}$  soll gelten, mit  $\gamma = \delta/2 + 1/4A$ :

$$\sum_{n \in \{\mathcal{S}\}} \frac{|b(n)|}{n^\gamma} < \infty. \tag{69}$$

Ebenso sei

$$\sum_{(p, M_0)=1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|b(p^n)|}{p^{\gamma n}} < \infty. \tag{70}$$

**SATZ 3.** *Es seien (63) bis (70) erfüllt und  $P^0(x) = A^0(x) - S^0(x)$  wie in (10) definiert. Falls es ein  $n$  gibt mit  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$ , ist*

$$\operatorname{Re} P^0(x) = \Omega_{\pm}(x^{\delta/2 - 1/4A} \log \log \log x), \quad x \rightarrow \infty;$$

*falls es ein  $n$  gibt mit  $\operatorname{Im} a_n \neq 0$ , ist*

$$\operatorname{Im} P^0(x) = \Omega_{\pm}(x^{\delta/2 - 1/4A} \log \log \log x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Für den Beweis brauchen wir:

**LEMMA 6.** *Es sei  $p_1, p_2, p_3, \dots$  eine Folge von Primzahlen, die alle bis auf endlich*

viele Primzahlen enthält. Ferner gebe es ein  $n$  mit  $\operatorname{Re} b_n \neq 0$ . Dann gibt es ein  $m_0$  mit der Eigenschaft

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_{m_0 q}|}{q^\gamma} > 0. \quad (71)$$

Dabei ist  $\mathcal{Q}(x)$  die Menge der quadratfreien Zahlen der Form  $q = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_s}$ ,  $p_{j_1} < \cdots < p_{j_s} \leq x$ , und

$$\gamma = \delta/2 + 1/4A.$$

*Beweis.* Wegen (67) gilt nach (33); für  $x \geq x_0$ :

$$\sum_{n \leq x} \frac{|b(n)|}{n^\gamma} \geq c_0 \log x.$$

O.E.d.A. sei  $(p_j, M_0) = 1$  für  $j = 1, 2, \dots$ .  $\mathcal{S}$  sei die endliche Menge Primzahlen, welche nicht in  $p_1, p_2, p_3, \dots$  vorkommen. Dann ist wegen (69), (70), (65):

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{|b(n)|}{n^\gamma} &\leq \sum_{n \in \{\mathcal{S}\}} \frac{|b(n)|}{n^\gamma} \prod_{p_j \leq x} \left( 1 + \frac{|b(p_j)|}{p_j^\gamma} + \frac{|b(p_j^2)|}{p_j^{2\gamma}} + \cdots \right) \\ &\leq c_1 \prod_{p_j \leq x} \left( 1 + \frac{|b(p_j)|}{p_j^\gamma} \right) \left( 1 + \frac{|b(p_j^2)|}{p_j^{2\gamma}} + \cdots \right) \\ &\leq c_2 \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|b(q)|}{q^\gamma}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|b_q|}{q^\gamma} = |b| \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|b(q)|}{q^\gamma} \geq c_3 \log x. \quad (73)$$

Falls

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_q|}{q^\gamma} > 0, \quad (74)$$

ist das Lemma mit  $m_0 = 1$  bewiesen. Sonst ist wegen (73):

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Im} b_q|}{q^\gamma} > 0, \quad (75)$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_q|}{q^\gamma} = 0. \tag{76}$$

Wenn  $\operatorname{Im} b(n) = 0$  für alle  $n$  ist, muss wegen  $b_n = b \cdot b(n)$  ( $\operatorname{Im} b_n : \operatorname{Re} b_n = (\operatorname{Im} b : \operatorname{Re} b)$ ) für alle  $n$  mit  $b_n \neq 0$  gelten. Wegen (75) und (76) ist das nur möglich falls  $\operatorname{Re} b_n = 0$  für alle  $n$ , was der Voraussetzung widerspricht. Also gibt es ein  $m_0$  mit  $\operatorname{Im} b(m_0) \neq 0$ . O.B.d.A. sei  $(m_0, p_j) = 1$  für  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Wegen (69) kann man nämlich endlich viele  $p_j$  weglassen, ohne an (73), (75), (76) etwas zu ändern. Wegen (64), (65) ist, mit  $b(m_0) = s + it$ ,  $t \neq 0$ :

$$|\operatorname{Re} b_{qm_0}| = |\operatorname{Re} b(m_0) b_q| \geq |t \operatorname{Im} b_q| - |s \operatorname{Re} b_q|,$$

daraus mit (75), (76):

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_{qm_0}|}{q^\gamma} > 0.$$

w.z.b.w.

*Beweis von Satz 3.* Sei  $\operatorname{Re} a_m \neq 0$  für ein  $m$ ;  $m_0, p_1, p_2, \dots$  und  $\mathcal{Q}(x)$  sollen dieselbe Bedeutung haben wie im Lemma 6, wobei man  $(p_j, m_0) = 1$  annehmen darf.  $E$  sei wie im Lemma 4 und 5,  $A_1$  wie in (63). Wir setzen:

$$G = EA_1^{1/M}, \quad \pi(x) = \sum_{p_j \leq x} 1,$$

$$\psi(x) = 2^{\pi(x)} = \{\text{Anzahl Zahlen in } \mathcal{Q}(x)\}.$$

Es ist mit einem  $c_1 > 0$

$$\psi(x) \leq \exp(c_1 x / \log x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Sei

$$\tilde{\eta}(x) = G \inf \left\{ |m^{1/M} + \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} r_q (qm_0)^{1/M}| \mid m = 0, 1, 2, 3, \dots, \right. \\ \left. r_q = 0, \pm 1, \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} r_q^2 \geq 2 \right\}.$$

Wegen (68) ist wie in [9] und [5] mit einem  $c_2 > 0$ :

$$\log \frac{1}{\tilde{\eta}(x)} \leq \exp(c_2 x / \log x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Nun sei  $c_3 = \max(c_2, 2c_1)$ ,  $Q(x) = \exp(c_3 x / \log x)$ , also

$$\psi(x) = o(Q(x)), \quad x \rightarrow \infty. \tag{77}$$

Für genügend grosses  $x$  sei:

$$\Theta_x = A\delta - \frac{1}{2} + \frac{1}{Q(x)}, \quad \gamma_x = \sup_{u \geq 1} \frac{\operatorname{Re} P^0(u^M)}{u^{\Theta_x}}.$$

Es ist  $\gamma_x > 0$  wegen Satz 1. Wie in [9] sei  $\gamma_x < \infty$ , da sonst nichts mehr zu beweisen ist. Weiter sei

$$\varphi_x(u) = \gamma_x u^{\Theta_x} - \operatorname{Re} P^0(u^M),$$

also  $\varphi_x(u) \geq 0$  für  $u \geq 1$ . Sei noch für  $x \geq x_0$ ,  $t$  reell,  $u \geq 0$ :

$$\sigma_x = e^{-Q(x)}, \quad V(t) = 1 + \cos t = 1 + \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it} \geq 0.$$

$$T_x(u) = \prod_{q \in \mathcal{Q}(x)} V(G(qm_0)^{1/M} u + \mathfrak{g}_q) \geq 0,$$

wo die  $\mathfrak{g}_q$  reelle, später genau zu bestimmende Zahlen sind. Nun sei  $r$  wie in (38) gewählt,  $\alpha = r + A\delta + \frac{1}{2}$  wie in Lemma 1. Man sieht leicht, wegen (36), (38) und (77), dass

$$\begin{aligned} \sigma_x^\alpha \int_0^1 u^r P^0(u^M) T_x(u) e^{-\sigma_x u} du &= O(\sigma_x^\alpha 2^{\psi(x)}) \\ &= O[\exp\{-\alpha Q(x) + o(Q(x))\}] = o(1). \end{aligned}$$

für  $x \rightarrow \infty$ . Daher ist

$$\begin{aligned} \sigma_x^\alpha \int_0^\infty u^r \varphi_x(u) T_x(u) e^{-\sigma_x u} du \\ &= \sigma_x^\alpha \int_1^\infty u^r \varphi_x(u) T_x(u) e^{-\sigma_x u} du + \sigma_x^\alpha \gamma_x \int_0^1 u^{r+\Theta_x} T_x(u) e^{-\sigma_x u} du \\ &\quad - \sigma_x^\alpha \int_0^1 \operatorname{Re} P^0(u^M) u^r T_x(u) e^{-\sigma_x u} du \geq 0 + 0 + o(1) = o(1), \end{aligned}$$

da die Integranden der ersten beiden Integrale positiv sind. Nun geht man genau gleich weiter wie in [5], [6] oder [9], wobei man  $T_x(u)$  als trigonometrisches Polynom schreibt und sich überlegt, dass für  $a$  komplex,  $b$  reell, gilt:

$$a \int_0^\infty u^r P^0(u^M) e^{ibu} e^{-\sigma_x u} du = a g_{r,0}(\sigma_x - ib),$$

nach Definition (39). Man benutzt dann die Lemmas 3, 4, 5. Wir lassen die Berechnungen aus und schreiben als Endresultat:

$$\gamma_x(1 + o(1)) \geq B_3 \operatorname{Re} \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{b_{qm_0}}{q^\gamma} \cos(\pi D - \vartheta_q) + o(1),$$

für  $x \rightarrow \infty$ . Dabei ist  $\gamma = \delta/2 + 1/4A$ ,  $B_3 = B_2(m_0 A_1)^{-\gamma} e^{-1} \Gamma(\alpha)^{-1} > 0$ ,  $D$  und  $B_2$  wie im Lemma 4. Bei geeigneter Wahl von  $\vartheta_q$  ist,

$$\operatorname{Re}(b_{qm_0} \cos(\pi D - \vartheta_q)) \geq |\operatorname{Re} b_{qm_0}|,$$

wie man leicht feststellt. Also ist für  $x \rightarrow \infty$ , mit  $B_4 = \frac{1}{3}B_3$ .

$$\frac{1}{2}\gamma_x \geq B_4 \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_{qm_0}|}{q^\gamma} + o(1).$$

Nach Lemma 6 und nach Definition von  $\gamma_x$  gibt es eine Folge  $x_1, x_2, \dots \rightarrow \infty$ , und eine Folge  $u_1, u_2, \dots, u_j \geq 1$ , mit

$$\operatorname{Re} P^0(u_j^M) u_j^{-\theta x_j} \geq B_5 \log x_j,$$

mit  $B_5 > 0$ . Da die linke Seite bei beschränktem  $u_j \geq 1$  beschränkt bliebe, muss mit  $x_j$  auch  $u_j$  gegen  $\infty$  gehen. Obige Ungleichung kann geschrieben werden als:

$$\operatorname{Re} P^0(u_j^M) u_j^{-(A\delta - 1/2)} \geq B_5 u_j^{1/Q(x_j)} \log x_j. \tag{78}$$

Ist nun  $u_j^{1/Q(x_j)} \leq \log \log \log u_j$ , so erhält man durch dreifaches Logarithmieren für genügend grosse  $x_j, u_j$ :

$$\log x_j \geq \frac{1}{2} \log \log \log u_j,$$

so dass der Ausdruck rechts in (78) stets grösser als  $c \log \log \log u_j$  ist für grosse  $j$ , mit einem  $c > 0$ . Ersetzt man noch  $u^M$  durch  $u$ , so ergibt sich genau der erste Teil von Satz 3. Die übrigen Aussagen ergeben sich durch Multiplikation der Funktionalgleichung mit  $-1, \pm i$  aus dem Bewiesenen.

#### 4. Beispiele

##### a) Grössencharaktere und Idealklassencharaktere

Sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper der Dimension  $m$  über dem rationalen  $\mathbb{Q}$ ,  $m = r_1 + 2r_2$ , mit  $r_1$  reellen Konjugierten und  $2r_2$  komplexen Konjugierten. Sei  $\mathcal{A}$  ein

Grössencharakter mod  $\mathfrak{f}$ ,  $\mathfrak{f}$  ein ganzes Ideal, (s. Hecke [7]). Sei für  $\text{Re } s > 1$

$$\zeta(s, A) = \sum_{\mathfrak{a} \neq 0} \frac{A(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{A(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

wobei sich das Produkt über alle Primideale erstreckt. Es ist  $A(\mathfrak{a})=0$  für  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \neq 1$ . Falls  $A$  eigentlich ist (s. [7]), genügt  $\zeta(s, A)$  der Funktionalgleichung

$$\zeta(s, A) A(s) = k \cdot A_1^{-s} A(1-s) \zeta(1-s, \bar{A}),$$

wo  $k \neq 0$ ,  $A_1 > 0$ ,

$$A(s) = \prod_{v=1}^{r_1} \Gamma(\frac{1}{2}s + \beta_v) \prod_{v=r_1+1}^{r_1+r_2} \Gamma(s + \beta_v),$$

also  $2A=m$ . Dabei in  $\text{Im} \sum_{v=1}^{r_1+r_2} \beta_v = 0$ . Falls  $A$  nicht eigentlich ist, sondern vom eigentlichen  $A_1$  mod  $\mathfrak{f}_1$  abgeleitet ist, ist

$$\zeta(s, A) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f} \\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_1}} \left(1 - \frac{A(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right) \zeta(s, A_1).$$

Da  $\zeta(s, A_1)$  mit  $\zeta(s, \bar{A}_1)$  einer Funktionalgleichung (6) genügt, ist  $\zeta(s, A)$  mit der Funktion

$$\psi(s) = k_1 A_2^{-s} \zeta(s, A_1) \cdot \prod_{\substack{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f} \\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_1}} \left(1 - \frac{N(\mathfrak{p})}{A(\mathfrak{p})} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right), \quad (78')$$

$k_1 \neq 0$ ,  $A_2 > 0$ , durch eine Gleichung (6) verknüpft, mit  $\delta=1$  und  $A(s)$  wie oben. Dies rechnet man leicht nach. Falls  $A$  nicht der Hauptcharakter ist, ist  $\psi(s)$  ganz, also  $S_b^0(x) = \text{const}$ . Man weiss auch dass  $\psi(s)$  den Bedingungen (64), (65) gehorcht. Es ist  $\gamma = (n+1)/2n > \frac{1}{2}$ . Da auch  $b(n) = O(n\varepsilon)$  für beliebig kleines  $\varepsilon > 0$ , sind die Bedingungen (69), (70) erfüllt. *Daher haben wir für  $m \geq 2$  nach Satz 3:*

$$\text{Re} \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} A(\mathfrak{a}) = \Omega_{\pm}(x^{(m-1)/2m} \log \log \log x), \quad (79)$$

*für beliebige Grössencharaktere, die nicht Hauptcharaktere sind. Die Bedingung  $\text{Re } a_n \neq 0$  für ein  $n$  ist stets erfüllt, da  $a_1 = A(1) = 1$ . Falls für ein  $n$  gilt:  $\text{Im} \sum_{N(\mathfrak{a})=n} A(\mathfrak{a}) \neq 0$ , ist auch*

$$\text{Im} \left( \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} A(\mathfrak{a}) \right) = \Omega_{\pm}(x^{(m-1)/2m} \log \log \log x). \quad (80)$$

Nach Satz 2 ist für  $x \geq x_0$ :

$$\sum_{n \leq x} \left| \sum_{N(\mathfrak{a})=n} \Lambda(\mathfrak{a}) \right| > cx^{(n+1)/2n}. \tag{81}$$

Falls  $\Lambda = \chi$  ein Idealklassencharakter ist, zeigen wir, dass ein besseres Resultat möglich ist. Es sei  $L$  die Galoische Abschliessung von  $K$ . Nach Hecke [8] gibt es eine Folge  $p_1, p_2, \dots$  von Primzahlen, so dass  $p_j = N((\pi_j))$  für  $\pi_j \in L$ ,  $\pi_j$  ganz, totalpositiv,  $\pi_j \equiv 1 \pmod{N(\mathfrak{f})}$  in  $L$ , und

$$\sum_{p_j \leq x} 1 \sim c \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad c > 0.$$

Die Konjugierten  $(\pi_j^\tau)$  von  $(\pi_j)$  sind genau die Ideale, welche  $p_j$  als Norm haben. Sie haben die selben Eigenschaften wie die  $\pi_j$  selber, da ja  $N(\mathfrak{f})$  im rationalen Körper definiert ist. Bildet man die Relativnormen  $N_{L/K}((\pi_j)^\tau)$  aller Konjugierten von  $(\pi_j)$ , so erhält man  $m$  Hauptideale  $(P_{j,k})$ ,  $k=1, \dots, m$ , jedes  $[L:K]$ -mal. Es ist  $N((P_{j,k})) = p_j$ ,  $P_{j,k}$  ist totalpositiv,  $P_{j,k} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ , (sogar  $\pmod{N(\mathfrak{f})}$ ), und ausser den  $(P_{j,k})$  hat kein ganzes Ideal die Norm  $p_j$ . Da nun die  $(P_{j,k}) \pmod{\mathfrak{f}}$  im Einheitsstrahl liegen, ist  $\chi((P_{j,k})) = 1$  für jeden Idealklassencharakter  $\chi$ , d.h.

$$\sum_{N(\mathfrak{a})=p_j} \chi(\mathfrak{a}) = m.$$

Wählt man nun für  $\mathcal{Q}(x)$  die quadratfreien Zahlen, die aus den  $p_j \leq x$  zusammengesetzt sind, so ergibt sich mit einem  $c > 0$  und einer natürlichen Zahl  $m_0$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left( -c \frac{x^{(m-1)/2m}}{\log x} \right) \sum_{q \in \mathcal{Q}(x)} \frac{|\operatorname{Re} b_{mq}|}{q^{(m+1)/2m}} \right\} > 0,$$

wo die  $b_n$  die Koeffizienten von  $\psi(s)$  in (78') bedeuten. Dies erhält man durch Kombination von Formel (73) in [9] mit den Überlegungen in Lemma 6 dieser Arbeit.

Diese Verschärfung von Lemma 6 ergibt wie in [9], Satz 1, folgende Verschärfung von (79):

**SATZ 4.** Sei  $\chi$  ein vom Hauptcharakter verschiedener Idealklassencharakter in einem algebraischen Zahlkörper vom Grade  $m \geq 2$ . Dann ist mit einem  $c > 0$ :

$$\operatorname{Re} \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a}) = \Omega_{\pm} \left( x^{(m-1)/2m} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(m-1)/2m}}{(\log \log \log x)^{(m+1)/2m}} \right) \right) \tag{82}$$

für  $x \rightarrow \infty$ . Falls  $\sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a})$  nicht für alle  $x$  reell ist, gilt (82) mit  $\operatorname{Im}$  anstatt  $\operatorname{Re}$ .



Man bemerke, dass die Bedingung (67) in diesem Falle nicht benötigt wurde. An dieser Stelle möchten wir bemerken, dass die Bedingungen (67) respektive (30) nicht wesentlich sind. Sie dienen lediglich dazu um bei Abschätzungen der Art (31) und (32) die Variation des Hauptterms  $S^0$  gegenüber der Variation des Restterms  $P^0$  klein zu halten. In vielen Fällen, wie eben, bekommt man auf andere Weise bessere Resultate. Insbesondere bekäme man mit dem hier beschriebenen Beweis bei positiven  $b_n$  bessere Resultate als in Satz 3, es soll aber hier darauf nicht eingegangen werden, weil bei positiven  $b_n$  andere Methoden, ausser in wenigen Einzelfällen, wirksamer sind. Für Referenzen siehe [9].

Falls  $\chi$  ein Hauptcharakter ist, ergibt sich:

**SATZ 5.** Sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper vom Grade  $m \geq 2$ ,  $\mathfrak{f}$  ein ganzes Ideal,  $\lambda_K$  das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion von  $K$ . Dann ist mit einem  $c > 0$ :

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{a}) \leq x \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1}} 1 = \lambda_K \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{f}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) x + \Omega_{\pm} \left( x^{(m-1)/2m} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(m-1)/2m}}{(\log \log \log x)^{(m+1)/2m}} \right) \right). \quad (83)$$

**KOROLLAR.** Hat eine Idealklassengruppe  $\{\mathcal{C}_j\}_{j=1}^h$  des algebraischen Zahlkörpers  $K$  vom Grade  $m \geq 2$  mindestens zwei Elemente, so gibt es zu jeder Idealklasse  $\mathcal{C}_i$  eine Idealklasse  $\mathcal{C}_j$ , sodass

$$\left| \sum_{\substack{N(\mathfrak{a}) \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathcal{C}_i}} 1 - \sum_{\substack{N(\mathfrak{a}) \leq x \\ \mathfrak{a} \in \mathcal{C}_j}} 1 \right| = \Omega_{+} \left( x^{(m-1)/2m} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(m-1)/2m}}{(\log \log \log x)^{(m+1)/2m}} \right) \right). \quad (84)$$

*Beweis des Korollars.* Sei

$$R_k(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x, \mathfrak{a} \in \mathcal{C}_k} 1, \quad k = 1, \dots, h;$$

dann ist für  $\chi \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^h |R_j(x) - R_i(x)| &\geq \left| \sum_{j=1}^h (R_j(x) - R_i(x)) \chi(\mathcal{C}_j) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^h R_j(x) \chi(\mathcal{C}_j) - R_i(x) \sum_{j=1}^h \chi(\mathcal{C}_j) \right| \\ &= \left| \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a}) \right|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 4. Dass die Behauptung nicht für beliebige  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  gilt, sieht man an folgendem einfachen Beispiel:  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ , mit der gewöhnlichen Idealklasseneinteilung nach den Hauptidealen,  $h=3: \mathcal{C}_3 = \{\text{Hauptideale}\}$ ,  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1^{-1} = \overline{\mathcal{C}_1}$ , also  $R_1(x) = R_2(x)$ .

b) *Koeffizienten von Modulformen*

Es seien  $N$  und  $k$  natürliche Zahlen,  $\text{Im } \tau > 0$ ,

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau / N}$$

sei eine Spitzenform der Stufe  $N$  und des Gewichtes  $k$ . Sei  $\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n n^{-s}$ , für  $\text{Re } s > \sigma_0$ . Dann gibt es eine Reihe  $\psi(s) = \sum_1^{\infty} b_n n^{-s}$ , für  $\text{Re } s > \sigma_0$ , derart dass

$$\left(\frac{2\pi}{N}\right)^s \varphi(s) \Gamma(s) = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{k-s} \psi(k-s) \Gamma(k-s).$$

Wir können Satz 1 und Satz 2 anwenden. (Da  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  ganz sind, ist  $S^0(x)$  eine Konstante). *Wir erhalten insbesondere für ein  $c > 0$  und genügend grosse  $x$ :*

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \geq c x^{(2k+1)/4}. \tag{85}$$

Schreibt man

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n \tau / N}, \quad \text{Im } \tau > 0,$$

so ist

$$f(\tau) = \tau^{-k} g\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

und  $g$  ist ebenfalls eine Spitzenform des Gewichtes  $k$  und der Stufe  $N$ . Der Vektorraum  $V$  der Spitzenformen der Stufe  $N$  und des Gewichtes  $k$  hat endliche komplexe Dimension und wird aufgespannt durch die Eigenfunktionen des Hecke-Rings (s. Ogg [10]). Falls  $g(\tau)$  eine solche Eigenfunktion ist, so ist  $b_1 \neq 0$ , und  $\psi(s)$  hat das Eulerprodukt

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = b_1 \prod_p \left(1 - \frac{b_p/b_1}{p^s} + \frac{\varepsilon_p p^{k-1}}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

wo  $\varepsilon_p = 0$  falls  $p \mid N$ ,  $\varepsilon_p^{\varphi(N)} = 1$ , falls  $(p, N) = 1$  ( $\varphi(N)$  = Anzahl teilerfremde Restklassen mod  $N$ ). Insbesondere ist  $b_n b_m = b_{nm}$  für  $(n, m) = 1$ , falls  $b_1 = 1$ .

Man kann nun genau wie Pennington [11], Lemma 2, zeigen, dass die Bedingungen (69) und (70) erfüllt sind. Falls also  $\psi(s)$  ein Eulerprodukt hat, und  $\operatorname{Re} a_n \neq 0$  für ein  $n$ , so ist

$$\operatorname{Re} \sum_{n \leq x} a_n = \Omega_{\pm} (x^{k/2-1/4} \log \log \log x). \quad (86)$$

Dasselbe gilt mit  $\operatorname{Im}$  anstatt  $\operatorname{Re}$ .

Falls  $N=1$ , so ist  $\varphi(s) = \pm \psi(s)$ , d.h.  $\varphi(s)$  hat auch ein Eulerprodukt. Falls  $a_1 = 1$ , sind alle  $a_n$  reell und es ist

$$\varphi_1(s) = \sum_{(n, M)=1} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p|M} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}} \right) \varphi(s)$$

und man sieht wie bei den uneigentlichen Charakteren, dass auch  $\varphi_1(s)$  eine Funktionalgleichung hat. Dabei bleiben alle Bedingungen für Satz 3 erhalten. Somit gilt:

Falls  $\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n n^{-s}$ ,  $a_1 = 1$ , ein Eulerprodukt hat und  $f(\tau) = \sum_1^{\infty} a_n \exp(2\pi i n \tau)$  eine Spitzenform des Gewichtes  $k$  und der Stufe 1 ist, so gilt für beliebiges natürliches  $M$ :

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, M)=1}} a_n = \Omega_{\pm} (x^{k/2-1/4} \log \log \log x). \quad (87)$$

## REFERENZEN

- [1] CHANDRASEKHARAN, K. und NARASIMHAN RAGHAVAN, *Functional equations with multiple Gamma factors and the average order of arithmetical functions*, Annals of Mathematics, Vol. 76, No. 1, (1962), 93–136.
- [2] —, *The Approximate Functional equation for a Class of Zeta functions*, Math. Annalen 152 (1963), 30–64.
- [3] —, *Hecke's functional equation and the average order of Arithmetical functions*, Acta arithmetica VI (1961), 487–503.
- [4] CHANDRASEKHARAN, K. und JORIS, H., *Dirichlet series with functional equations and related arithmetical identities*, Acta arithmetica XXIV (1973).
- [5] CORRADI, K. und KATAL, J., *Egy megieizés K. S. Gangadharan "Two classical lattice point problems" című dolgozatához*, MTA III Osztály Közleményei 17 (1967), 89–97.
- [6] GANGADHARAN, K. S., *Two classical lattice point problems*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 57 (1961), 699–721.
- [7] HECKE, E., *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen*; I, Math. Z. 1 (1918), 357–376; II, Math. Z. 6 (1920), 11–51.
- [8] —, *Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für beliebige Zahlkörper*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1917, 299–318.
- [9] JORIS, H.,  *$\Omega$ -Sätze für zwei arithmetische Funktionen*, Comment Math. Helv. 47 (1972), 220–248.
- [10] OGG, A., *Modular forms and Dirichlet Series* (W. A. Benjamin, New York, 1969).
- [11] PENNINGTON, W. B., *On the order of magnitude of Ramanujan's arithmetical function  $\tau(n)$* , Proc. of the Cambr. Math. Soc. 47 (1951), 668–678.

- [12] RANKIN, R. A., *The order of the Fourier coefficients of integral modular forms*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. 35 (1939), 357–372.
- [13] STEINIG, J., *The Changes of Sign of Certain arithmetical Error terms*, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 385–400.

*Mathematisches Institut*  
*Bunsenstr. 3–5*  
*34 – Göttingen Bundesrepublik*

Eingegangen den 8. Juni 1973