Über Kohomologietheorien mit formaler Gruppe der Charakteristik p

Autor(en): **Würgler, Urs**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **48 (1973)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37173

Über Kohomologietheorien mit formaler Gruppe der Charakteristik p

URS WÜRGLER

1. Einleitung und Ergebnisse

Es sei $h^*(-)$ eine $\mathbb{C}$-orientierte Kohomologietheorie, d.h. $h^*(-)$ ist multiplikativ und das kanonische komplexe Linienbündel η über dem unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raum $P_\infty\mathbb{C}$ ist h^*-orientiert. Wir werden stets annehmen, dass $h^*(-)$ über der Kategorie $\mathbf{W}$ der Räume vom Homotopietyp eines CW- Komplexes gegeben ist und durch ein Ringspektrum dargestellt wird. Sei $\Lambda = h^*(pt)$. $h^*P_\infty\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\Lambda[[a]]$, dem graduierten Ring der homogenen Potenzreihen in a wobei $a = e(\eta) \in h^2 P_\infty\mathbb{C}$ die Eulerklasse von η bezeichnet. Sei $m: P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C} \to P_\infty\mathbb{C}$ die klassifizierende Abbildung des Linienbündels $\eta \otimes \eta$. Das Element $m^*(a) \in h^2(P_\infty\mathbb{C} \times \times P_\infty\mathbb{C})$ definiert eine Potenzreihe $F_a(X, Y) \in \Lambda[[X, Y]]$ derart, dass für die Eulerklassen komplexer Linienbündel gilt:

$$e(L_1 \otimes L_2) = F_a(e(L_1), e(L_2)).$$

$F_a(X, Y)$ ist eine kommutative formale Gruppe über dem graduierten Ring Λ und man hat

$$F_a(X, Y) = X + Y + \sum_{i,j>0} a_{ij} X^i Y^j, \quad a_{ij} \in h^{2-2(i+j)}(pt). \tag{1.1}$$

Ist k eine natürliche Zahl, so sei $[k]_F(X) \in \Lambda[[X]]$ definiert durch

$$[k]_F(X) = F_a(X, [k-1]_F(X)), \quad [1]_F(X) = X. \tag{1.2}$$

Die kleinste natürliche Zahl k, für welche $[k]_F(X) = 0$ ist, nennen wir die Charakteristik der formalen Gruppe $F_a(X, Y)$. Falls kein solches k existiert, habe $F_a(X, Y)$ Charakteristik 0. Sind a und b Eulerklasse von η so sieht man leicht, dass die formalen Gruppen $F_a(X, Y)$ und $F_b(X, Y)$ isomorph sind, insbesondere ist also die Charakteristik von $F_a(X, Y)$ unabhängig von der Wahl der Eulerklasse a und somit eine Invariante der Kohomologietheorie.

Bezeichnet $H^*(X, R)$ singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in einem Ring der Charakteristik $p \neq 0$, so ist $e(\eta^{\otimes p}) = pe(\eta) = 0$, d.h. die formale Gruppe von $H^*(-, R)$ hat Charakteristik p. In der vorliegenden Note soll umgekehrt gezeigt werden, dass $H^*(-, R)$ im wesentlichen die einzige Theorie mit dieser Eigenschaft ist. Genauer:

1.3 SATZ. *Es sei $h^*(-)$ eine $\mathbb{C}$-orientierbare Kohomologietheorie, $h^0(pt)$ ein* *endlicher Körper der Charakteristik p. Hat die formale Gruppe $F(X, Y)$ von h^* $(-)$ Charakteristik p, so gibt es eine über* **W** *definierte natürliche Aequivalenz multiplikativer Kohomologietheorien*

$$h^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \geq 0} H^i(X; h^{n-i}(pt)).$$

Bemerkungen.

(1) Man beachte, dass die formale Gruppe von h^* $(-)$ wegen (1.1) sicher dann Charakteristik p hat, wenn $h^{2n}(pt)=0$ für $n<0$.

(2) Nach dem Struktursatz von Lazard (vgl. etwa [4]) ist jede kommutative formale Gruppe der Charakteristik p über einem Ring der Charakteristik p isomorph zur linearen Gruppe $X+Y$. Satz 1.3 kann also auch als Eindeutigkeitssatz für Kohomologietheorien mit linearer formaler Gruppe interpretiert werden.

(3) Zur Frage wann eine Kohomologietheorie $\mathbb{C}$-orientierbar ist, vgl. man A. Dold [3].

(4) Betrachtet man anstelle von $\mathbb{C}$-orientierbaren Theorien $\mathbb{R}$-orientierbare, kann man etwas mehr sagen (vgl. [7]).

2. Zur Darstellbarkeit der singulären Kohomologie

Sei h^* $(-)$ eine zusammenhängende Kohomologietheorie, d.h. $h^q(pt)=0$ für $q>0$. Die Atiyah - Hirzebruch - Spektralsequenz $H^*(X, h^*(*)) \Rightarrow h^*(X)$ besitzt dann einen „edge-homomorphism" $e: E_\infty^{p,0} \rightarrowtail E_2^{p,0}$ und vermöge e kann man eine natürliche Transformation von Kohomologietheorien

$$T: h^p(X) \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0} \xrightarrow{e} E_2^{p,0} \cong H^p(X, h^0(*)) \tag{2.1}$$

über der Kategorie der endlichdimensionalen CW-Komplexe definieren. Ist h^* $(-)$ multiplikativ, so auch T. Weil $\varprojlim^1 H^{p-1}(X^n, h^0(*))=0$ ist, kann man T auf ganz **W** erweitern:

$$T: h^p(X) \to \varprojlim h^p(X^n) \to \varprojlim H^p(X^n, h^0(*)) \cong H^p(X, h^0(*)).$$

Dabei bezeichnet X^n das n-Gerüst von X.

Wie üblich sagen wir, die Theorie h^* $(-)$ stelle die singuläre Kohomologie $H^*(-, h^0(*))$ dar, wenn

$$T_X: h^*(X) \to H^*(X, h^0(*))$$

für alle $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{W})$ epimorph ist.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

2.2. SATZ. *Sei $h^*(-)$ eine $\mathbb{C}$-orientierte, zusammenhängende Kohomologietheorie, $K=h^0(*)$ ein endlicher Körper der Charakteristik p. Hat die formale Gruppe von $h^*(-)$ Charakteristik p, so stellt $h^*(-)$ die singuläre Kohomologie $H^*(-, K)$ dar.*

Sei $L_p^{2n+1}=S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$ ein Linsenraum. In [5] hat C.P. Rourke gezeigt, dass eine zusammenhängende multiplikative Theorie $h^*(-)$ mit $h^0(*)=\mathbb{Z}_p$ die Kohomologie $H^*(-, \mathbb{Z}_p)$ dann darstellt, wenn $T: h^*(L_p^{2n+1}) \to H^*(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ epimorph ist für hinreichend grosse n. Wir zeigen vorerst, dass die Bedingung $[p]_F(X)=0$ die Voraussetzungen des Satzes von Rourke impliziert und verallgemeinern dann dessen Methode etwas, um Satz 3.2 zu bekommen.

Für eine beliebige natürliche Zahl k bezeichne $B\mathbb{Z}_k$ den klassifizierenden Raum der Gruppe $\mathbb{Z}_k=\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

2.3 LEMMA. *Es sei $h^*(-)$ eine zusammenhängende, $\mathbb{C}$-orientierte Kohomologietheorie, $R=h^0(*)$ ein Ring der Charakteristik $p\neq 0$. Hat die formale Gruppe von $h^*(-)$ Charakteristik p, so ist*

$$T: h^*(B\mathbb{Z}_p) \to H^*(B\mathbb{Z}_p, R)$$

ein Epimorphismus.

Beweis. Sei $\eta^{\otimes p}$ die p-te Tensorpotenz des kanonischen Linienbündels η über $P_\infty\mathbb{C}$, $\pi: S(\eta^{\otimes p}) \to P_\infty\mathbb{C}$ das assoziierte Sphärenbündel. Mittels der exakten Homotopiefolge der Faserung $S^1 \to S(\eta^{\otimes p}) \to P_\infty\mathbb{C}$ kann man zeigen, dass $S(\eta^{\otimes p})$ ein Eilenberg-Mac Lane-Raum $K(\mathbb{Z}_p, 1)$ und somit homotopieaequivalent zu $B\mathbb{Z}_p$ ist. Die Gysinfolge des Sphärenbündels π hat die Form

$$\begin{array}{c}
\to h^{q-2}P_\infty\mathbb{C} \xrightarrow{\cup\, e(\eta^{\otimes p})} h^q P_\infty\mathbb{C} \to h^q S(\eta^{\otimes p}) \to h^{q-1}P_\infty\mathbb{C} \to \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr\| \qquad\qquad\qquad \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h^q B\mathbb{Z}_p \qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Weil die formale Gruppe von $h^*(-)$ Charakteristik p hat, ist $e(\eta^{\otimes p})=[p]_F(e(\eta))=0$ und somit zerfällt die Gysinfolge in kurze exakte aufspaltende Folgen

$$0 \to h^q P_\infty\mathbb{C} \to h^q B\mathbb{Z}_p \to h^{q-1}P_\infty\mathbb{C} \to 0$$

Wendet man darauf die Transformation T an, so folgt die Behauptung sofort, denn $T: h^*(P_\infty\mathbb{C}) \to H^*(P_\infty\mathbb{C}, R)$ ist offensichtlich epimorph, da T die Eulerklasse $e(\eta)$ auf die $H^*(-, R)$-Eulerklasse von η abbildet.

Sei L_n^m das m-Gerüst von $L_n=B\mathbb{Z}_p \times \cdots \times B\mathbb{Z}_p$ (n Faktoren).

2.4 KOROLLAR. *Sei $h^*(-)$ wie in Lemma 3.3, $R=K$ ein endlicher Körper der*

Charakteristik p. Dann ist

$$T: h^*(L_n^m) \to H^*(L_n^m, R)$$

für alle m, n epimorph.

Beweis. Mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} h^*(L_n) & \xrightarrow{\quad T \quad} & H^*(L_n, R) \\ \uparrow\times & & \cong\uparrow \\ h^*B\mathbb{Z}_p \otimes \cdots \otimes h^*B\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{T\otimes\cdots\otimes T} & H^*(B\mathbb{Z}_p, R) \otimes \cdots \otimes H^*(B\mathbb{Z}_p, R) \end{array}$$

folgt, dass $T(L_n)$ epimorph ist. Weil auch $H^*(L_n, R) \to H^*(L_n^m, R)$ epimorph ist, folgt die Behauptung.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 2.2.

Sei u das Erzeugende von $H^1(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, $v = \beta(u) \in H^2(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ wo β den Bocksteinhomomorphismus zur Folge $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0$ bezeichnet. Das Produkt $u \times v \times \times u \times v \times \cdots \times u \times v \in H^{3n}(L_{2n}, \mathbb{Z}_p)$ definiert eine Abbildung $\alpha: L_{2n}^{4n} \to K(\mathbb{Z}_p, 3n)^{4n}$ und nach [6], VI, Kor. 2.6. ist $\alpha^*: H^*(K(\mathbb{Z}_p, 3n)^{4n}, \mathbb{Z}_p) \to H^*(L_{2n}^{4n}, Z_p)$ ein Monomorphismus.

Sei $h^*(*) = \Lambda$. Der endliche Körper Λ^0 habe etwa Ordnung p^r. Dann ist $K(\Lambda^0, 3n) \simeq K(\mathbb{Z}_p, 3n) \times \cdots \times K(\mathbb{Z}_p, 3n)$ (r Faktoren) und weil Λ^0 ein Körper ist folgt, dass auch die durch $\alpha' = \alpha \times \cdots \times \alpha$ induzierte Abbildung

$$\alpha'^*: H^*(K(\Lambda^0, 3\mathrm{n})^{4n}, \Lambda^0) \to H^*(L_{2nr}^{4n}, \Lambda^0)$$

monomorph ist.

Nach Korollar 3.4 ist $T: h^*(L_{2nr}^{4n}) \to H^*(L_{2nr}^{4n}, \Lambda^0)$ epimorph, d.h. (vgl. (3.1)) der „edge-homomorphism" der Spektralsequenz ist ein Isomorphismus und somit ist die Spektralsequenz von L_{2nr}^{4n} trivial. Weil α'^* monomorph ist, bricht auch die Spektralsequenz von $K(\Lambda^0, 3n)^{4n}$ zusammen und somit ist $T: h^*(K(\Lambda^0, 3n)^{4n}) \to H^*(K(\Lambda^0, 3n)^{4n}, \Lambda^0)$ epimorph. Sei nun X ein CW-Komplex, $\dim X = m$ und $x \in H^q(X, \Lambda^0) = \tilde{H}^q(X^+, \Lambda^0) \cong \tilde{H}^{3m}(\Sigma^{3m-q}X^+, \Lambda^0)$. Weil $K(\Lambda^0, 3n)^{4n}$ $3n$-dimensionale Kohomologie für Komplexe der Dimension $\leqslant 4n$ klassifiziert und T mit Einhängungen verträglich ist folgt, dass x im Bild von T liegt. Wegen $\lim\limits_{\leftarrow}{}^1 H^*(X^n, \Lambda^0) = 0$ folgt die Behauptung.

3. Beweis von Satz 1.3

Wir beweisen 1.3 zunächst für zusammenhängende Theorien und führen anschliessend den allgemeinen Fall darauf zurück.

Sei also $k^*(-)$ eine zusammenhängende Kohomologietheorie, welche die Voraussetzungen von 1.3 erfülle, X ein endlicher CW-Komplex.

Nach Satz 2.2 ist die Spektralsequenz $H^*(X, \Lambda) \Rightarrow k^*(X)$ trivial und somit auch

$H_*(X, \Lambda) \Rightarrow k_*(X)$. Weil Λ^0 ein Körper ist, induziert das Kroneckerprodukt $k_*(X) \otimes k^*(X) \to \Lambda$ nach (Adams [1], Prop. 17) einen Isomorphismus

$$k^*(X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda^*(k_* X, \Lambda). \tag{3.1}$$

Aufgrund desselben Satzes induziert die Abbildung $k_* X \otimes H^*(X, \Lambda^0) \xrightarrow{T \otimes id} H_*(X, \Lambda^0) \otimes H^*(X, \Lambda^0) \xrightarrow{\langle,\rangle} \Lambda^0$ einen Isomorphismus

$$H^*(X, \Lambda^0) \approx \mathrm{Hom}_\Lambda^*(k_* X, \Lambda^0). \tag{3.2}$$

Die Einbettung $\Lambda^0 \subset \Lambda$ definiert mittels 3.1, 3.2 eine Transformation $\Theta: H^*(X, \Lambda^0) \to \to k^*(X)$, welche für $X = pt$ mit $\Lambda^0 \subset \Lambda$ übereinstimmt. Weil Λ flach über Λ^0 ist, induziert θ über der Kategorie der endlichen CW-Räume eine Aequivalenz

$$k^*(X) \approx H^*(X, \Lambda^0) \underset{\Lambda^0}{\otimes} \Lambda \approx H^*(X, \Lambda). \tag{3.3}$$

Dass dies eine Aequivalenz multiplikativer Theorien ist, bestätigt man leicht durch nachrechnen.

Ist $h^*(-)$ eine beliebige Kohomologietheorie, so kann man mittels

$$k^q(X) := \mathrm{Bild}\{h^q(X, X^{q-1}) \to h^q(X, X^{q-2})\} \tag{3.4}$$

eine zusammenhängende Theorie definieren (vgl. [2]). Man hat eine offensichtliche natürliche Transformation $\varrho: k^*(X) \to h^*(X)$ mit $\varrho^q(pt) = \mathrm{id}$ für $q \leqslant 0$. $h^*(-)$ und $k^*(-)$ seien durch die Spektren $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{K}$ dargestellt. Wir betrachten die Cofaser-Folge $\mathbf{K} \to \mathbf{E} \to \mathbf{CK} \bigcup_\varrho \mathbf{E} \to \cdots$ in der Kategorie der Spektren. Weil $\pi_q(\mathbf{K}) = 0$ ist für $q < 0$ und $\pi_q(\varrho)$ isomorph für $q \geqslant 0$, folgt $\pi_q(\mathbf{CK} \bigcup_\varrho \mathbf{E}) = 0$ für $q \geqslant 0$. Sei nun $\mathbf{E}$ ein Ringspektrum mit Multiplikationsabbildung $\mu_E: \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Dann faktorisiert die Abbildung $\mu_E \circ (\varrho \wedge \varrho): \mathbf{K} \wedge \mathbf{K} \to \mathbf{E}$ durch $\varrho: \mathbf{K} \to \mathbf{E}$ und man verifiziert unschwer, dass auch $\mathbf{K}$ ein Ringspektrum ist. ϱ ist trivialerweise eine Abbildung zwischen Ringspektren Sei $a \in h^2 P_\infty \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-Orientierung von $h^*(-)$. Wegen 3.4 ist $k^2 P_\infty \mathbb{C} = \tilde{h}^2 P_\infty \mathbb{C}$ und somit ist auch $k^*(-)$ $\mathbb{C}$-orientierbar. Weil (vgl. (1.1)) die Koeffizienten der formalen Gruppe von $h^*(-)$ negative Dimension haben, erfüllt $k^*(-)$ genau dann die Voraussetzungen von 1.3, wenn dies für $h^*(-)$ zutrifft. Nach 3.3 kann man nun eine multiplikative Transformation

$$\varphi: H^*(X, k^0(pt)) \to H^*(X, k^*(pt)) \approx k^*(X) \xrightarrow{\varrho} h^*(X)$$

definieren, welche für $X = pt$ die Identität auf $k^0(pt) = h^0(pt)$ induziert. Wie oben definiert φ somit eine Aequivalenz

$$H^*(X, h^*(pt)) \approx h^*(X) \tag{3.5}$$

über der Kategorie der endlichen CW-Räume.

Sei nun X ein beliebiger CW-Komplex, $\{X_\alpha\}$ das gerichtete System seiner endlichen Unterkomplexe. Entweder direkt oder mittels ([1], Prop. 17) verifiziert man die Beziehung $H^*(X, h^*(pt)) \approx \varprojlim H^*(X_\alpha, h^*(pt))$ und man erhält eine Transformation additiver Kohomologietheorien über **W**,

$$h^*(X) \to \varprojlim h^*(X_\alpha) \approx \varprojlim H^*(X_\alpha, h^*(pt)) \approx H^*(X, h^*(pt)),$$

welche auf dem Punktraum einen Isomorphismus induziert. Weil alle betrachteten Transformationen produkttreu sind, ist damit Satz 1.3 bewiesen.

Bemerkung

Die Aequivalenz 3.3 kann man auch direkt, ohne Rückgriff auf [1], herleiten.

LITERATUR

[1] ADAMS, J. F., *Lectures on generalised cohomology*, Springer lecture notes, Nr. 99 (1969).
[2] DOLD, A., *Lectures on general cohomology*, Aarhus lecture notes series, Aarhus.
[3] DOLD, A., *Chern classes in general cohomology*, Symposia Mathematica vol. V (1970).
[4] QUILLEN, D., *Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations*, Advances in Mathematics 7 (1971), 28–56.
[5] ROURKE, C. P., *Representing homology classes*, preprint, Warwick University (1972).
[6] STEENROD, N. E. und EPSTEIN, D. B. A., *Cohomology operations*, Annals of Math. studies no. 50.
[7] WÜRGLER, U., *Eine Bemerkung über* $\mathbb{R}$*-orientierte Kohomologietheorien*, erscheint in Archiv der Math.

Mathematisches Institut der Universität
D-6900 Heidelberg Im Neunenheimer Feld 9.

Eingegangen den 25 Mai 1973.