

# Fortsetzung von Spezialisierungen: ein idealtheoretischer Zugang

Autor(en): **Schweizer, Urs**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37992>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Fortsetzung von Spezialisierungen: ein idealtheoretischer Zugang

URS SCHWEIZER (Mathematisches Institut Basel)

### §1. Einleitung

Sei  $A_m$  (resp.  $P_m$ ) der  $m$ -dimensionale affine (resp. projektive) Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  und seien  $U \subset A_m$ ,  $V \subset A_n$ ,  $W \subset P_n$  irreduzible algebraische Mengen. Mit  $f$  (resp.  $g$ ) bezeichnen wir die Projektion von  $V \times U$  auf  $U$  (resp. von  $W \times U$  auf  $U$ ).

Jeder algebraischen Teilmenge  $A \subset V \times U$  (resp.  $B \subset W \times U$ ) ordnen wir  $A' \subset U$  (resp.  $B' \subset U$ ) zu. Dabei soll  $A'$  (resp.  $B'$ ) der topologische Abschluss bezüglich der Zariskitopologie von  $f(A)$  (resp.  $g(B)$ ) in  $U$  sein. Bekanntlich gilt in dieser Situation:

(i) Es gibt eine echte algebraische Untermenge  $A''$  von  $A'$  mit  $A'' \cup f(A) = A'$ .

(ii)  $B' = g(B)$ .

(ii) besagt, dass  $g$  für jedes  $U$  eine abgeschlossene Abbildung ist, d.h. dass der projektive Raum komplett ist (vgl. Mumford [2, p. 104]). (i) besagt, dass  $f(A)$  fast abgeschlossen ist, genauer gesagt, dass sich  $f(A)$  von  $A'$  höchstens um eine algebraische Menge niedriger Dimension unterscheidet.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass es genügt, (i) und (ii) für irreduzible algebraische Mengen  $A$  und  $B$  zu beweisen. Dann besitzen aber  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $A$  und  $B$  generische Punkte  $(u) = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $(v) = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $(w) = (w_0, \dots, w_n)$ ,  $(a) = (a_1, \dots, a_{n+m})$  und  $(b) = (b_0, \dots, b_{n+m})$  in den entsprechenden Räumen über einem Universalkörper  $\Omega \supset k$  von  $k$ .

Ein Punkt  $(u')$  von  $U$  liegt im Bild von  $f$  (resp.  $g$ ) genau dann, wenn sich die Spezialisierung  $k[u] \rightarrow k[u']$  endlich fortsetzen lässt auf  $k[u, v] \rightarrow k[u', v']$  mit einem geeigneten  $(v')$  (resp. homogen fortsetzen lässt auf  $k[u, w] \rightarrow k[u', w']$  mit einem geeigneten  $(w')$ ).

Der Beweis von (i) und (ii) kann mit Hilfe von altbekannten Fortsetzungssätzen für Spezialisierungen geführt werden (vgl. [3, Samuel, Chap. I, §§1–3]).

Das Problem, Spezialisierungen fortzusetzen, kann auch idealtheoretisch formuliert werden. Sei  $R_0 = k[u]$ ,  $R = R_0[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynomring,  $\mathfrak{p} = \{F \in R / F(v) = 0\}$  und  $\mathfrak{q}_0 = \{F \in R_0 / F(u') = 0\}$ , dann sind  $\mathfrak{p} \subset R$  und  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  Primideale und es gilt  $\mathfrak{p} \cap R_0 = (0)$ . Die Spezialisierung  $k[u] \rightarrow k[u']$  lässt sich genau dann auf  $k[u, v] \rightarrow k[u', v']$  fortsetzen, wenn es ein Primideal  $\mathfrak{q} \subset R$  gibt mit  $\mathfrak{q} \cap R_0 = \mathfrak{q}_0$  und  $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ .

Die idealtheoretische Formulierung des Problems, Spezialisierungen homogen fortzusetzen, lautet: Sei  $R' = R_0[X_0, \dots, X_n]$  mit der Graduierung des Polynomrings versehen,  $R_0$  wie vorher,  $\mathfrak{p}' = \{F \in R' / F(w) = 0\}$ , dann ist  $\mathfrak{p}'$  ein homogenes Primideal, welches das Ideal  $X = (X_0, \dots, X_n)$  nicht enthält und es gilt  $\mathfrak{p}' \cap R_0 = (0)$ . Die Spezia-

lisierung  $k[u] \rightarrow k[u']$  lässt sich genau dann homogen fortsetzen auf  $k[u, w] \rightarrow k[u', w']$ , wenn es ein homogenes Primideal  $q' \subset R'$  gibt mit  $q' \cap R_0 = q_0$ ,  $q' \supset p'$  und  $X \notin q'$ .

In der vorliegenden Arbeit werden die Fortsetzungssätze für Spezialisierungen in grosser Allgemeinheit idealtheoretisch bewiesen. Diese liefern zusammen mit dem Hilbertschen Nullstellensatz neue Beweise für (i) und (ii).

Als Anwendung wird schliesslich ein dimensionstheoretisches Resultat für noethersche Ringe hergeleitet. Ist  $R_0$  ein Ring, so bezeichnen wir seine Krullsche Dimension mit  $\dim R_0$  und verstehen darunter das Supremum aller Längen von Primidealketten in  $R_0$ . Ist  $p_0 \subset R_0$  ein Primideal, so definieren wir  $\dim p_0$  als Supremum aller Längen von Primidealketten in  $R_0$ , die von  $p_0$  aufsteigen, d.h.  $\dim p_0 = \dim R_0/p_0$ . Schliesslich soll der Rang von  $p_0$ , abgekürzt  $\text{rg } p_0$ , das Supremum aller Längen von Primidealketten in  $R_0$  zwischen  $(0)$  und  $p_0$  sein, d.h.  $\text{rg } p_0 = \dim R_{0p_0}$ , wobei  $R_{0p_0}$  die Lokalisierung von  $R_0$  bei  $p_0$  ist.

Man sagt,  $R_0$  erfülle den Rangssatz, wenn  $R_0$  noethersch ist und für jedes Primideal  $p_0 \subset R_0$   $\text{rg } p_0 + \dim p_0 = \dim R_0$  gilt.

In dieser Situation beweisen wir für jeden Polynomring  $R = R_0[X_1, \dots, X_n]$  über  $R_0$  und jedes Primideal  $p \subset R$ :  $\text{rg } p + \dim p \geq \dim R - 1$ . D.h. das Bestehen des Rangssatzes vererbt sich bei Adjunktion von Unbestimmten beinahe. Dies mag erstaunen, haben doch andere dimensionstheoretische Regelmässigkeiten diese Eigenschaft nicht. So zum Beispiel gibt es Ringe, die katenarisch aber nicht universal katenarisch sind. Dabei heisst ein Ring  $R_0$  katenarisch, wenn für je zwei Primideale  $p_0 \subset q_0 \subset R_0$  jede unverfeinerbare Primidealkette zwischen  $p_0$  und  $q_0$  die gleiche Länge hat, und universal katenarisch, wenn mit  $R_0$  auch jeder Polynomring über  $R_0$  diese Eigenschaft besitzt. Nagata hat ein Beispiel für einen noetherschen Ring gegeben, der zwar katenarisch, aber nicht universal katenarisch ist (vgl. [1, Matsumura, pp. 87–88]).

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. W. Habicht danken für seine Anregungen und sein Interesse an dieser Arbeit.

## §2. Inhomogener Fortsetzungssatz

Sei  $R_0$  ein noetherscher Ring und  $R = R_0[v_1, \dots, v_n]$  eine über  $R_0$  endlich erzeugte Algebra, die  $R_0$  als Unterring enthält.

**DEFINITION 1.** *Das Fortsetzungsproblem heisst bezüglich des Primideals  $p \subset R$  lösbar für ein Primoberideal  $q_0 \subset R_0$  von  $p_0 = p \cap R_0$  genau dann, wenn es ein Primoberideal  $q \subset R$  von  $p$  gibt mit  $q \cap R_0 = q_0$ .*

Das Fortsetzungsproblem ist bekanntlich nicht immer lösbar (Beispiel:  $R_0 = k[X]$ ,  $R = R_0[Y]$ ,  $p = (XY - 1)$  und  $q_0 = (X)$ ). Aber es gilt:

**SATZ 1.** *Es gibt ein echtes Oberideal  $a_0$  von  $p_0$  mit der Eigenschaft, dass das Fort-*

setzungsproblem bezüglich  $\mathfrak{p}$  höchstens für diejenigen Primideale  $\mathfrak{q}_0$  nicht lösbar ist, die  $\mathfrak{a}_0$  umfassen.

Dieser Satz liefert sofort (i). Sei nämlich  $\mathfrak{p} \subset R_0[X_1, \dots, X_n] = k[u][X_1, \dots, X_n]$  das zu  $A$  gehörige Primideal, d.h.  $\mathfrak{p} = \{f(u, X) \in R : \text{für alle } (u', v') \text{ aus } A \text{ gilt } f(u', v') = 0\}$ . Dann gehört  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap R_0$  zu  $A'$  und das Nullstellengebilde  $A'' \subset U$  des Ideals  $\mathfrak{a}_0$  erfüllt (i).

Man überlegt sich leicht, dass Satz 1 nur für Polynomringe  $R = R_0[X_1, \dots, X_n]$  bewiesen werden muss. Wir schicken dem Beweis zwei Lemmatas voraus.

LEMMA 1. Sei  $(R, \mathfrak{m})$  ein lokaler Integritätsbereich mit Maximalideal  $\mathfrak{m}$  und Quotientenkörper  $K$ . Ist  $f \in R[X], \notin \mathfrak{m}R[X], g \in K[X]$  und  $fg \in R[X]$ , so liegt  $g$  schon in  $R[X]$ .

Beweis. Sei  $f = \sum a_i X^i (a_i \in R), g = \sum b_j X^j (b_j \in K)$  und  $fg = \sum c_k X^k (c_k \in R)$ .

Ist  $a_p$  der höchste Koeffizient von  $f$ , der nicht in  $\mathfrak{m}$  liegt, so gilt für die  $b_j$  folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} a_p b_n + a_{p+1} b_{n-1} + \dots & = & c_{p+n} \\ a_{p-1} b_n + a_p b_{n-1} + \dots & = & c_{p+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots + a_p b_1 + a_{p+1} b_0 & = & c_{p+1} \\ \dots + a_{p-1} b_1 + a_p b_0 & = & c_p. \end{array}$$

Wegen der Wahl von  $p$  liegt die Determinante dieses Gleichungssystems nicht in  $\mathfrak{m}$ , ist also eine Einheit in  $R$ . Daraus folgt für  $j=0, \dots, n$   $b_j \in R$ , wobei  $n$  der Grad von  $g$  ist und das Lemma ist bewiesen.

LEMMA 2. Sei wiederum  $(R, \mathfrak{m})$  ein lokaler Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper  $K$ . Ist  $f \in R[X], \notin \mathfrak{m}R[X]$  und irreduzibel über  $K$ , so ist  $\mathfrak{p} = fR[X]$  ein Primideal. Das Fortsetzungsproblem bezüglich  $\mathfrak{p}$  ist lösbar für  $\mathfrak{m}$ , falls ein Koeffizient von  $f$  von positivem Grad nicht in  $\mathfrak{m}$  liegt.

Beweis.  $fK[X]$  ist ein Primideal, da  $K$  ein Körper und  $f$  irreduzibel über  $K$  ist. Lemma 1 besagt, dass das Primideal  $fK[X] \cap R[X]$  schon von  $f$  aufgespannt wird und die erste Behauptung ist bewiesen.

Die Lösbarkeit des Fortsetzungsproblems für das Maximalideal  $\mathfrak{m}$  ist gleichbedeutend mit  $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}R[X] + fR[X] \neq R[X]$ . Jedes Polynom aus  $\mathfrak{a}$ , das nicht schon im Ideal  $\mathfrak{m}R[X]$  liegt, hat einen Koeffizienten von positivem Grad, der Einheit ist in  $R$ . Also enthält  $\mathfrak{a}$  die Eins nicht und somit ist auch die zweite Behauptung bewiesen.

Beweis von Satz 1. Wir verwenden Induktion über die Variablenanzahl  $n$ . Sei  $n=1$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathfrak{p}_0 = (0)$  annehmen. Ist  $p$  auch  $(0)$ , so kann das Fortsetzungsproblem für jedes Primideal  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  vermöge  $\mathfrak{q}_0 R_0[X]$  gelöst werden und die Behauptung ist in diesem Fall mit  $\mathfrak{a}_0 = R_0$  bewiesen.

Andernfalls gibt es ein  $f \neq 0$  in  $\mathfrak{p}$  von kleinstem Grad.  $f$  ist irreduzibel über  $K$ , dem

Quotientenkörper von  $R_0$ . Sei  $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ ,  $\alpha_0 = \sum_{i > 0} R a_i$  und  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  ein Primideal, welches  $\alpha_0$  nicht umfasst. Wir lokalisieren nach  $\mathfrak{q}_0$  und können annehmen,  $(R_0, \mathfrak{q}_0)$  sei lokal. Lemma 2 liefert die Lösbarkeit des Fortsetzungsproblems für  $\mathfrak{q}_0$  und die Induktionsverankerung ist bewiesen.

Sei also  $n$  grösser als 1. Wiederum dürfen wir  $\mathfrak{p}_0 = (0)$  annehmen. Es gibt ein Primoberideal  $\mathfrak{p}' \subset R$  von  $\mathfrak{p}$  vom Rang  $n$  mit  $\mathfrak{p}' \cap R_0 = (0)$ . Haben wir ein  $\alpha_0$  gefunden, welches Satz 1 für  $\mathfrak{p}'$  statt für  $\mathfrak{p}$  erfüllt, so tut es dies auch für  $\mathfrak{p}$ . Wir können deshalb zusätzlich  $\text{rg } \mathfrak{p} = n$  voraussetzen.

Sei  $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap R[X_1, \dots, X_{n-1}]$ . Dann gibt es nach Induktionsannahme ein Ideal  $\mathfrak{b}_0 \subset R_0$ ,  $\mathfrak{b}_0 \neq (0)$ , sodass das Fortsetzungsproblem bezüglich  $\bar{\mathfrak{p}}$  für alle Primideale  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  lösbar ist, die  $\mathfrak{b}_0$  nicht umfassen.

Weiter gibt es nach Induktionsverankerung ein Ideal  $\bar{\mathfrak{c}} \subset \bar{R} = R_0[X_1, \dots, X_{n-1}]$ , welches  $\bar{\mathfrak{p}}$  echt umfasst, derart, dass das Fortsetzungsproblem bezüglich  $\mathfrak{p}$  für alle Primideale  $\bar{\mathfrak{q}} \subset \bar{R}$ , welche zwar  $\bar{\mathfrak{p}}$ , nicht aber  $\bar{\mathfrak{c}}$  umfassen, lösbar ist. Wegen  $\text{rg } \mathfrak{p} = n$  gilt  $\text{rg } \bar{\mathfrak{p}} = n - 1$ , somit  $\bar{\mathfrak{c}} \cap R_0 = \mathfrak{c}_0 \neq (0)$ , also auch  $\alpha_0 = \mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{c}_0 \neq (0)$ .

Sei  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  ein Primideal, welches  $\alpha_0$  nicht umfasst. Zunächst umfasst  $\mathfrak{q}_0$  erst recht  $\mathfrak{b}_0$  nicht. Also gibt es ein Primoberideal  $\bar{\mathfrak{q}} \subset \bar{R}$  von  $\bar{\mathfrak{p}}$  mit  $\bar{\mathfrak{q}} \cap R_0 = \mathfrak{q}_0$ .  $\mathfrak{q}_0$  umfasst aber auch nicht  $\mathfrak{c}_0$ , also umfasst  $\bar{\mathfrak{q}}$  erst recht nicht  $\bar{\mathfrak{c}}$  und es gibt ein Primoberideal  $\mathfrak{q} \subset R$  von  $\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{q} \cap \bar{R} = \bar{\mathfrak{q}}$ , woraus  $\mathfrak{q} \cap R_0 = \mathfrak{q}_0$  folgt und Satz 1 ist vollständig bewiesen.

### §3. Homogener Fortsetzungssatz

Sei  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  ein noetherscher graduerter Ring.

**SATZ 2.** *Das Fortsetzungsproblem ist bezüglich jedem homogenen Primideal  $\mathfrak{p} \subset R$  und für jedes Primoberideal  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  von  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap R_0$  lösbar durch ein homogenes Primideal  $\mathfrak{q} \subset R$  mit  $\dim \mathfrak{q} R_{\mathfrak{q}_0} = \dim \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}_0}$ .*

Dieser Satz liefert sofort (ii). Sei nämlich  $R_0 = k[u]$ ,  $R = R_0[X_0, \dots, X_n]$ ,  $\mathfrak{p} \subset R$  das zu  $B$  gehörige homogene Primideal. Dann ist  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap R_0$  das zu  $B'$  gehörige Primideal. Es gilt  $X = (X_0, \dots, X_n) \notin \mathfrak{p}$ , also  $\dim \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}_0} \geq 1$ . Entspricht  $\mathfrak{q}_0$  einem Punkt  $(w')$  von  $B'$ , d.h.  $\mathfrak{q}_0 \supset \mathfrak{p}_0$ , so liefert das  $\mathfrak{q}$  des Satzes die Existenz eines Punktes  $(w') \in W$  mit  $(w', u') \in B$  und damit  $(w') \in g(B)$ .

*Beweis von Satz 2.* Da  $R$  noethersch ist, besitzt das homogene Ideal  $\bigoplus_{i > 0} R_i$  eine endliche  $R$ -Basis aus Formen,  $a_1, \dots, a_n$ . Hat  $a_i$  den Grad  $e_i$ , so ist  $R$  ein graduerter Restklassenring von  $R' = R_0[X_1^{e_1}, \dots, X_n^{e_n}]$ . Es ist deshalb klar, dass Satz 2 nur für Ringe der Gestalt  $R'$  geführt werden muss.

Ausserdem kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathfrak{p}_0 = (0)$ ,  $\text{rg } \mathfrak{q}_0 / \mathfrak{p}_0 = 1$  und  $(R_0, \mathfrak{q}_0)$  lokal angenommen werden.  $R_0$  ist als eindimensionaler lokaler Integritätsbereich ein Cohen-Macaulay-Ring und somit universal katenarisch (vgl. [1, Matsu-mura, pp. 108–109]).

Sei  $r \in \mathfrak{q}_0, r \neq 0$ . Da  $\mathfrak{p}$  homogen ist und  $r$  in  $\mathfrak{q}_0$  liegt, folgt  $\mathfrak{p} + rR \neq R$ . Also gibt es ein minimales Primoberideal  $\mathfrak{q}$  von  $\mathfrak{p} + rR$ , welches notwendigerweise homogen ist. Dann folgt  $\mathfrak{q} \cap R_0 = \mathfrak{q}_0$  und  $\text{rg } \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = 1$  (vgl. [1, Matsumura, p. 77]). Weil  $R$  katendarisch ist, heisst das für  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_0 \oplus (\bigoplus_{i>0} R_i)$   $\text{rg } \mathfrak{q}' = \text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}_0} + 1 = \text{rg } \mathfrak{p} + \text{rg } \mathfrak{q}/\mathfrak{p} + \dim \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}_0}$  und somit  $\dim \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}_0} = \dim \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}_0}$ .

**§4. Anwendung**

**SATZ 3.** Sei  $R = R_0[X_1, \dots, X_n]$  ein endlich dimensionaler Polynomring mit notherschem Koeffizientenring,  $\mathfrak{p} \subset R$  ein beliebiges Primideal und  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \cap R_0$ . Dann gilt:

$$\text{rg } \mathfrak{p}_0 + \dim \mathfrak{p}_0 + n - 1 \leq \text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} \leq \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \dim \mathfrak{p}_0 + n.$$

Dieser Satz liefert sofort die in der Einleitung erwähnte Vererbung des Rangsatzes bei Adjunktion von Unbestimmten. Man beachte, dass der Satz nicht verschärft werden kann. Zunächst ist klar, dass für gewisse  $\mathfrak{p}$  die rechte Ungleichung zur Gleichung wird.

Aber auch die linke Ungleichung kann für gewisse  $\mathfrak{p}$  zur Gleichung werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei  $Z$  der Ring der ganzen Zahl und  $p \in Z$  eine Primzahl,  $R_0 = Z_{pZ}, R = R_0[X]$  und  $\mathfrak{p} = (1 + p + pX)R$ . Dann gilt  $\text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = 1 + 0 = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \dim \mathfrak{p}_0 + n - 1$ .

*Beweis von Satz 3.* Es gilt  $\text{rg } \mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R$  (vgl. [1, Matsumura, p. 79]). Zusammen mit  $\dim \mathfrak{p}_0R = \dim \mathfrak{p}_0 + n \geq \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{p}$  folgt daraus sofort die zweite Ungleichung.

Die erste Ungleichung beweisen wir induktiv über  $\dim \mathfrak{p}_0$ . Ist  $\dim \mathfrak{p}_0 = 0$ , so  $\text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + n$  (vgl. [1, Matsumura, p. 92]).

Ist  $\dim \mathfrak{p}_0 = 1$ , so  $\text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{p} \geq \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}_0} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + n$ .

Sei also  $\dim \mathfrak{p}_0 > 1$  und  $\mathfrak{a}_0 \subset R_0$  das Ideal, dessen Existenz in Satz 1 bewiesen wurde. Entweder ist  $\mathfrak{a}_0 = R_0$ , dann ist das Fortsetzungsproblem bezüglich  $\mathfrak{p}$  für jedes Primideal  $\mathfrak{q}_0 \supset \mathfrak{p}_0$  lösbar, insbesondere für ein  $\mathfrak{q}_0$  mit  $\dim \mathfrak{q}_0 = \dim \mathfrak{p}_0 - 1$ . Sei  $\mathfrak{q}$  die Lösung. Sie erfüllt nach Induktionsannahme  $\text{rg } \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{q} \geq \text{rg } \mathfrak{q}_0 + \dim \mathfrak{q}_0 + n - 1$ , also  $\text{rg } \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{p} \geq \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0R + \dim \mathfrak{q} + \text{rg } \mathfrak{q}/\mathfrak{p} = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{q}_0/\mathfrak{p}_0 + \text{rg } \mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0R + \dim \mathfrak{q} \geq \text{rg } \mathfrak{p}_0 + 1 + \dim \mathfrak{q}_0 + n - 1 = \text{rg } \mathfrak{p}_0 + \dim \mathfrak{p}_0 + n - 1$ , weil  $R_{\mathfrak{q}_0}/\mathfrak{p}_0R_{\mathfrak{q}_0}$  ein Cohen-Macaulay-Ring ist (vgl. Beweis von Satz 2) und wir sind in diesem Fall fertig.

Oder es ist  $\mathfrak{a}_0 \neq R_0$ . Finden wir trotzdem ein Primoberideal  $\mathfrak{q}_0 \subset R_0$  von  $\mathfrak{p}_0$ , welches  $\mathfrak{a}_0$  nicht umfasst mit  $\dim \mathfrak{q}_0 = \dim \mathfrak{p}_0 - 1$ , so können wir gleich schliessen wie im Fall  $\mathfrak{a}_0 = R_0$ .

Nun gibt es aber höchstens endlich viele Primideale  $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{p}_0$  mit  $\dim \mathfrak{q}_0 = \dim \mathfrak{p}_0 - 1$  und  $\mathfrak{q}_0 \supset \mathfrak{a}_0$ , denn jedes solche ist ein minimales Primoberideal von  $\mathfrak{a}_0$ . Mit Lemma 3 ist deshalb Satz 3 vollständig bewiesen.

LEMMA 3. Sei  $R$  ein endlich dimensionaler noetherscher Integritätsbereich mit  $\dim R > 1$ . Dann gibt es unendlich viele Primideale in  $R$  von der Dimension  $\dim R - 1$ .

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{m} \subset R$  ein Maximalideal mit  $\text{rg } \mathfrak{m} = \dim R$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen,  $(R, \mathfrak{m})$  sei lokal. Sind  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  Primideale in  $R$  der Dimension  $\dim R - 1$ , so gibt es wegen  $\dim R > 1$  ein Element  $a \in \mathfrak{m}$ ,  $a \notin \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$ . Dieses Element erfüllt  $\dim R/aR = \dim R - 1$  (vgl. [1, Matsumura p. 78]). Also liegt  $aR$  in einem Primideal  $\mathfrak{q}$  mit  $\dim \mathfrak{q} = \dim R - 1$ . Dieses  $\mathfrak{q}$  ist verschieden von  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  und das Lemma ist bewiesen.

#### LITERATUR

- [1] MATSUMURA, H., *Commutative Algebra* (Benjamin, New York 1970).
- [2] MUMFORD, D., *Introduction to Algebraic Geometry* (Harvard lectures notes, 1967).
- [3] SAMUEL, P., *Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique* (Springer, Berlin etc. 1967).

Eingegangen den 26. September 1973