

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1974)

**Artikel:** Über den Satz von Wiener und Lokalkompakte Gruppen  
**Autor:** Reiter, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37997>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über den Satz von Wiener und lokalkompakte Gruppen

*Herrn Prof. Dr. B. L. van der Waerden in dankbarer Erinnerung an das Studienjahr 1947–48*

HANS REITER

Müller-Römer [10] und Leptin [5] haben ein bemerkenswertes Analogon des Wienerschen Satzes für gewisse zusammenhängende Liegruppen bewiesen, der erste für die „ $ax+b$ “-Gruppe, der andere für die nilpotenten Gruppen der Klasse 2; vergleiche auch Eymard [3] für eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Müller-Römer, der auch selbst mittels einer anderen Methode seine Ergebnisse auf gewisse lokalkompakte Gruppen verallgemeinert hat (Müller-Römer [11, 12]).

Hier sollen in diesem Zusammenhang ebenfalls lokalkompakte Gruppen betrachtet werden. Das Programm läßt sich im Anschluß an Leptins Arbeiten etwa so formulieren. Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $L^1(G)$  die  $L^1$ -Algebra bezüglich des linken Haarmaßes.

- (i) Ist jedes eigentliche Ideal<sup>1)</sup> von  $L^1(G)$  in einem Maximalideal enthalten?
- (ii) Bestimmung aller Maximalideale von  $L^1(G)$ .
- (iii) Untersuchung der Quotientenalgebren von  $L^1(G)$  nach den Maximalidealen.
- (iv) Zusammenhang zwischen den Maximalidealen von  $L^1(G)$  und den irreduziblen unitären Darstellungen von  $G$ .

Für Abelsche oder kompakte Gruppen ist dieses Programm erledigt. Die Schwierigkeiten für allgemeine lokalkompakte Gruppen hat schon 1950 Mackey [7, §14] angedeutet.

In der vorliegenden Arbeit werden zuerst nilpotente Gruppen der Klasse 2 behandelt, die eine Verallgemeinerung der Heisenberggruppe bilden und den von Leptin [5] untersuchten Gruppen entsprechen (§1). Dies führt auf Betrachtungen, die sich ganz allgemein auf lokalkompakte Gruppen beziehen (§§2, 3). In §4, Satz 1, wird das endgültige Ergebnis für die „Gruppen vom Heisenbergtyp“ gebracht. Zweitens werden halbdirekte Produkte lokalkompakter Abelscher Gruppen betrachtet, im Anschluß an Müller-Römer [10] und Eymard [3]; für diesen Fall lassen sich einige weitere Ergebnisse erzielen (§5, Satz 2).

Die beiden Klassen von Gruppen, die den Gegenstand dieser Arbeit bilden, werden nach einer möglichst einheitlichen und einfachen Methode behandelt, damit sowohl die Zusammenhänge als auch die Unterschiede klar zutage treten.<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> Ideale sind in dieser Arbeit immer *zweiseitig* und *abgeschlossen*.

<sup>2)</sup> Über einige der Ergebnisse dieser Arbeit habe ich am Congrès Suisse de l'Analyse harmonique (März 1973) berichtet.

## §1. Gruppen vom Heisenbergtyp

### 1.1. Für die multiplikative Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$$

hat sich die Bezeichnung „Heisenberggruppe“ eingebürgert; für eine nähere Diskussion dieser Gruppe und ihrer unitären Darstellungen vgl. Cartier [2], Pukanszky [13, S. 71]. Man kann auch Untergruppen betrachten, indem man z.B.  $x_1$  – oder alle drei  $x_j$  – auf  $\mathbf{Z}$  beschränkt (vgl. dazu das „Prinzip der Relativierung“ in [14, Kap. 4, §5]); man erhält so Gruppen mit einer analogen Struktur, die nun ganz allgemein definiert werden soll.

Seien  $X_1, X_2, X_3$  lokalkompakte Abelsche Gruppen, additiv geschrieben. Sei weiter eine Abbildung  $B: (x_1, x_2) \mapsto B(x_1, x_2)$  von  $X_1 \times X_2$  in  $X_3$  gegeben, die stetig und „bilinear“ (über  $\mathbf{Z}$ ) ist, d.h. für  $x_1, y_1$  in  $X_1$  und  $x_2, y_2$  in  $X_2$  gilt  $B(x_1 + y_1, x_2) = B(x_1, x_2) + B(y_1, x_2)$ ,  $B(x_1, x_2 + y_2) = B(x_1, x_2) + B(x_1, y_2)$ . Wir setzen voraus, daß  $B$  nicht identisch verschwindet.

Dann erhält man eine lokalkompakte Gruppe  $G$  wie folgt:  $G$  ist die Menge aller geordneten Tripel

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_j \in X_j, \quad (1)$$

mit der Produkttopologie und der Multiplikation

$$(x_1, x_2, x_3) (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + B(x_1, y_2)). \quad (2)$$

Wir schreiben

$$G = (X_1, X_2, X_3)_B \quad \text{oder} \quad G = (X_1, X_2, X_3)$$

und nennen  $G$  eine *Gruppe vom Heisenbergtyp*, in Verallgemeinerung der obigen Gruppe.

Die Untergruppe  $X'_3 = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in X_3\}$  ist zentral und  $G/X'_3 \cong X_1 \times X_2$  ist Abelsch; also ist  $G$  nilpotent der Klasse 2.

**1.2. BEISPIELE.** (i) Der klassische Fall aus der Quantenmechanik ist  $(\mathbf{R}^v, \mathbf{R}^v, \mathbf{R})$ ,  $v \geq 1$ , wobei  $B$  das Skalarprodukt ist.

(ii) Man kann auch Untergruppen von  $\mathbf{R}^v$  nehmen und z.B.  $(\mathbf{Z}^v, \mathbf{R}^v, \mathbf{R})$  oder  $(\mathbf{Z}^v, \mathbf{Z}^v, \mathbf{Z})$  – mit demselben  $B$  wie in (i) – betrachten, oder auch  $(\mathbf{Z}^v, \mathbf{Z}^v, \mathbf{R})$ , insbesondere für  $v = 1$ .

(iii) Analog kann man  $(\mathbf{Z}, \mathbf{R}/\mathbf{Z}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$  mit  $B = x_1 x_2$  ( $x_1 \in \mathbf{Z}, x_2 \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ) betrachten. Allgemein kann man im Anschluß an Mackey [8, S. 305, Ex. 1] und Weil [16, S. 149] (vgl. auch Mackey [9, §13]) für eine beliebige lokalkompakte Abelsche Gruppe  $G$ , mit dualer Gruppe  $\hat{G}$ , die Gruppe  $(G, \hat{G}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$  betrachten, wo (in einer leicht verständlichen Schreibweise)  $B(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$  ( $x_1 \in G, x_2 \in \hat{G}$ ) ist. Man kann dann wieder – wie in (ii) – Untergruppen  $G_1 \subset G, G_2 \subset \hat{G}$  nehmen und  $(G_1, G_2, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$  betrachten, mit demselben  $B$ ; dabei brauchen  $G_1, G_2$  nicht abgeschlossen zu sein, man kann z.B. die diskrete Topologie einführen.

(iv) Ebenso kann man im Anschluß an Weil [16, S. 180ff.] auch das Analogon der Heisenberggruppe für  $p$ -adische oder allgemeiner für lokale Körper betrachten; man kann dann wieder Untergruppen nehmen (Grosser, Mosak, und Moskowitz [4, §4]).

(v) Es gibt auch endliche Gruppen dieser Art, z.B.  $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ ,  $m \geq 2$ , mit  $B(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . Für  $m=2$  ergibt sich, wie man leicht sieht, die Quaternionengruppe (vgl. etwa van der Waerden [15, S. 91]), deren Darstellungen schon bei Weyl [17, Kap. III, §16] betrachtet werden.

**1.3.** Einer Gruppe  $G$  vom Heisenbergtyp kann man eine lokalkompakte *additive* Gruppe  $G^\dagger$  zuordnen, deren topologischer Raum der von  $G$  ist, nämlich die Menge aller Tripel (1) mit der Produkttopologie, während die Addition durch

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

definiert ist.

**BEMERKUNG.** Es ist oft vorteilhaft,  $G$  selbst einfach als Raum mit zwei Operationen zu betrachten; man kann dann auch von einer Addition „in  $G^\dagger$ “ sprechen („abus de langage“).

Das Haarmaß auf  $G^\dagger$  ist – mit einer bequemen Bezeichnung –

$$dx = dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3)$$

Dies ist auch das Haarmaß von  $G$  und zwar gilt sowohl  $d(ax) = dx$  als auch  $d(xb) = dx$ , wie man anhand von (2) nachrechnet, d.h.  $G$  ist *unimodular*:

$$d(axb) = dx, \quad a, b \in G. \quad (3a)$$

Wir wollen der späteren Anwendungen wegen noch folgende Untergruppen von  $G = (X_1, X_2, X_3)$  einführen. Seien  $H_1, H_2$  abgeschlossene Untergruppen von  $X_1$  bzw.  $X_2$ ; dann sei

$$H = \{ \xi \mid \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \xi_1 \in H_1, \xi_2 \in H_2, \xi_3 \in X_3 \}. \quad (4)$$

$H$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ ; weiter ist  $H$  normal in  $G$ , weil ja die dritte Koordinate  $\xi_3$  in  $X_3$  beliebig ist. Für das Haarmaß  $d\xi$  auf  $H$  gilt wieder

$$d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5)$$

wo  $d\xi_1, d\xi_2$  die Haarmaße auf  $H_1, H_2$  und  $d\xi_3 (=dx_3)$  das auf  $X_3$  bedeutet.  $H$  ist auch unimodular; es gilt weiter, wie man wieder anhand von (2) bestätigt,

$$d(a\xi a^{-1}) = d\xi, \quad a \in G \quad (6)$$

und

$$\int_H f(a\xi) d\xi = \int_H f(a + \xi) d\xi, \quad a \in G, \quad f \in \mathcal{K}(G) \quad (7)$$

(vgl. dazu auch die obige Bemerkung).

Man kann natürlich in  $H$  ebenfalls eine Addition einführen, d.h.  $H$  als Untergruppe von  $G^\dagger$  betrachten. Es ist im folgenden bequem, nur die eine Bezeichnung  $H$  für (4) zu verwenden – ob  $H$  als Untergruppe von  $G$  oder von  $G^\dagger$  gemeint ist, wird eindeutig aus dem Zusammenhang hervorgehen.

$H$  ist selbst eine Gruppe vom Heisenbergtyp, nämlich  $H = (H_1, H_2, X_3)$ , mit derselben Bilinearform  $B$  wie  $G$ ; insbesondere ist das additive Haarmaß auf  $H$  auch das multiplikative, nämlich (5).

**1.4.** Wir betrachten nun  $L^1(G)$ . Da das Haarmaß von  $G$  mit dem von  $G^\dagger$  zusammenfällt (vgl. (3)), ist  $L^1(G)$  als Banachraum dasselbe wie  $L^1(G^\dagger)$ . Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Idealen<sup>1)</sup> von  $L^1(G)$  und denen von  $L^1(G^\dagger)$  untersuchen (vgl. dazu Leptin [5, §III]). Zu diesem Zweck untersuchen wir die Transformationen

$$x \mapsto axb, \quad a, b \in G, \quad (8)$$

und zwar fassen wir sie als Transformationen von  $G^\dagger$  auf.

Wir betrachten zunächst die Transformationen  $\sigma_a$  der Form

$$\sigma_a x = axa^{-1}. \quad (9)$$

In „Koordinaten“ haben wir, wenn wir  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  schreiben,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 + B(a_1, x_2) - B(x_1, a_2). \quad (10)$$

$\sigma_a$  ist also eine (stetige) „ $\mathbf{Z}$ -lineare“ Transformation von  $G^\dagger$ , d.h.

$$\sigma_a(x+y) = \sigma_a x + \sigma_a y,$$

weil  $B$  bilinear (und stetig) ist. Es gilt weiter

$$\sigma_{ab} = \sigma_a \sigma_b = \sigma_{ba}, \quad a, b \in G \quad (11)$$

und sogar

$$\sigma_{a+b} = \sigma_{ab}.$$

Die Transformationen  $\sigma_a$  bilden eine Abelsche Gruppe von Automorphismen von  $G^\dagger$  (vgl. (11)); man kann diese Gruppe als Analogon zur adjungierten Gruppe einer Liegruppe auffassen.

**1.5.** Wir zeigen nun: Die Gruppe  $T_G$  aller Transformationen (8) von  $G^\dagger$  besteht aus sämtlichen „affinen“ Transformationen

$$x' = \sigma_a x + b, \quad a, b \in G. \quad (12)$$

*Beweis.* Sei  $b = (b_1, b_2, b_3)$ ; man setze  $b' = (0, b_2, b_3)$ ,  $b'' = (b_1, 0, 0)$ . Dann ist  $y + b = b' y b''$  ( $y \in G$ ). Also ist auch jede Transformation (12) in  $T_G$  enthalten, weil ja  $\sigma_a$  zu  $T_G$  gehört. Umgekehrt gilt  $axb = yc$  mit  $y = \sigma_a x$ ,  $c = a^{-1}b$ ; ist hier  $c = (c_1, c_2, c_3)$  und setzt man  $\tilde{c} = (0, -c_2, 0)$ , so ist  $yc = \sigma_{\tilde{c}} y + c$  (vgl. (10)). Also ist  $axb = \sigma_{\tilde{c}a} x + c$ .

**1.6.** Die Automorphismen  $\sigma_a$  von  $G^\dagger$  haben den Haarschen Modul 1 (vgl. (3), (3a)). Setzt man also

$$M_a f(x) = f(\sigma_a x), \quad f \in L^1(G^\dagger),$$

so ist der Operator  $M_a$  ein Automorphismus der Banachalgebra  $L^1(G^\dagger)$ ; daß dies auch ein Automorphismus der Banachalgebra  $L^1(G)$  ist, brauchen wir weiter nicht.<sup>3)</sup>

**1.7.** Der in §1.4 erwähnte Zusammenhang ist also: Die Ideale von  $L^1(G)$  fallen mit denjenigen Idealen von  $L^1(G^\dagger)$  zusammen, die unter sämtlichen Automorphismen  $M_a$  ( $a \in G$ ) invariant sind. Dies folgt wegen der bekannten Charakterisierung der Ideale in  $L^1$ -Algebren durch Verschiebungen aus §1.6 und §1.5.

Die Aufgabe, alle Maximalideale von  $L^1(G)$  zu bestimmen, ist also auf die Bestimmung der maximalen invarianten Ideale von  $L^1(G^\dagger)$  zurückgeführt; dieses Problem läßt sich mit der Fouriertransformation lösen, wie nun gezeigt werden soll.

---

<sup>3)</sup> Der Operator  $M_a$  in  $L^1(G^\dagger)$  ist ein Analogon zum Operator  $M_\theta$  in  $L^1(\mathbf{R}^n)$ ; vgl. dazu [14, Kap. 1, §§1.1, 1.6].

1.8. Sei  $\hat{\sigma}_a$  die zu  $\sigma_a$  (vgl. (9)) „duale“ Transformation in  $\hat{G}^\dagger$ :

$$\langle \sigma_{a^{-1}}x, t \rangle = \langle x, \hat{\sigma}_a t \rangle, \quad t \in \hat{G}^\dagger,$$

wo  $\langle x, t \rangle$  die Dualität zwischen  $G^\dagger$  und  $\hat{G}^\dagger$  realisiert. Dann gilt für  $f \in L^1(G^\dagger)$ :  
 $(f \circ \sigma_a)^\wedge = \hat{f} \circ \hat{\sigma}_a$  oder

$$(M_a f)^\wedge(t) = \hat{f}(\hat{\sigma}_a t), \quad t \in \hat{G}^\dagger. \quad (13)$$

Für ein festes (aber beliebiges) Element  $w \in \hat{G}^\dagger$  setzen wir nun

$$\text{Bahn}(w) = \{\sigma_a w \mid a \in G\}.$$

Eine Bahn in  $\hat{G}^\dagger$  braucht nicht abgeschlossen zu sein (wofür gleich Beispiele angeführt werden sollen); ihre abgeschlossene Hülle werde mit  $\overline{\text{Bahn}(w)}$  bezeichnet.

Ist nun  $I$  ein invariantes Ideal von  $L^1(G^\dagger)$ , so ist nach (13)  $\text{cosp } I$  (vgl. dazu [14, S. 124, Fußnote]) unter allen Transformationen  $\hat{\sigma}_a, a \in G$ , invariant; aus  $w \in \text{cosp } I$  folgt also  $\overline{\text{Bahn}(w)} \subset \text{cosp } I$ , da  $\text{cosp } I$  abgeschlossen ist. In der umgekehrten Richtung haben wir: Sei  $w \in G^\dagger$  und

$$I_w = \{f \mid f \in L^1(G^\dagger), \hat{f}(t) = 0 \text{ für alle } t \in \overline{\text{Bahn}(w)}\}; \quad (14)$$

dann ist  $I_w$  ein invariantes Ideal in  $L^1(G^\dagger)$ . Denn  $\overline{\text{Bahn}(w)}$  ist unter allen Transformationen  $\hat{\sigma}_a, a \in G$ , invariant, die ja eine Gruppe von topologischen Abbildungen von  $\hat{G}^\dagger$  auf  $\hat{G}^\dagger$  bilden.

Wir wollen zeigen, daß die  $I_w, w \in \hat{G}^\dagger$ , maximale invariante Ideale von  $L^1(G^\dagger)$  sind und daß man so sämtliche maximale invariante Ideale von  $L^1(G^\dagger)$  erhält. Dazu müssen wir die Automorphismen  $\hat{\sigma}_a$  näher untersuchen.

Schreiben wir  $\langle x, t \rangle$  in „Koordinaten“ für  $x = (x_1, x_2, x_3), t = (t_1, t_2, t_3)$ , so ist  $\langle x, t \rangle = \langle x_1, t_1 \rangle \cdot \langle x_2, t_2 \rangle \cdot \langle x_3, t_3 \rangle$ ; ersetzen wir jetzt  $x$  durch  $\sigma_{a^{-1}}x$ , so haben wir nach (9), (10), wenn wir dort  $a^{-1}$  statt  $a$  nehmen,

$$\langle \sigma_{a^{-1}}x, t \rangle = \langle x_1, t_1 \rangle \cdot \langle x_2, t_2 \rangle \cdot \langle x_3, t_3 \rangle \cdot \langle B(-a_1, x_2), t_3 \rangle \cdot \langle B(x_1, a_2), t_3 \rangle.$$

Hier können wir nun

$$\begin{aligned} \langle B(x_1, a_2), t_3 \rangle &= \langle x_1, B_1(a_2, t_3) \rangle, \\ \langle B(a_1, x_2), t_3 \rangle &= \langle x_2, B_2(a_1, t_3) \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

setzen, wo die Abbildungen

$$B_1: X_2 \times \hat{X}_3 \rightarrow \hat{X}_1, \quad B_2: X_1 \times \hat{X}_3 \rightarrow \hat{X}_2$$

$\mathbf{Z}$ -bilinear sind. Wir können also den zu  $x' = \sigma_a x$  dualen Automorphismus  $t' = \hat{\sigma}_a t$  in Koordinaten so schreiben:

$$t'_1 = t_1 + B_1(a_2, t_3), \quad t'_2 = t_2 - B_2(a_1, t_3), \quad t'_3 = t_3. \quad (16)$$

Schreibt man  $\sigma_a x$  in der Form

$$\sigma_a x = x + \beta_a x,$$

wo der Automorphismus  $\beta_a$  durch

$$\beta_a x = (0, 0, B(a_1, x_2) - B(x_1, a_2)), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad a = (a_1, a_2, a_3)$$

gegeben ist (vgl. (10)), so wird nach (16)

$$\hat{\sigma}_a t = t + \hat{\beta}_a t,$$

mit

$$\hat{\beta}_a t = (B_1(a_2, t_3), -B_2(a_1, t_3), 0), \quad t = (t_1, t_2, t_3) \in \hat{G}^\dagger. \quad (17)$$

$\hat{\beta}_a$  ist dual zu  $\beta_a$  und beide Transformationen sind nilpotent von der Ordnung 2.

Wir können jetzt für  $w = (w_1, w_2, w_3)$  in  $\hat{G}^\dagger$  schreiben:

$$\text{Bahn}(w) = w + \hat{\beta}_G w, \quad \hat{\beta}_G w = \{\hat{\beta}_a w \mid a \in G\}. \quad (18)$$

Hier ist nach (17)  $\hat{\beta}_G w$  offensichtlich eine Untergruppe von  $\hat{G}^\dagger$ ; diese braucht aber nicht abgeschlossen zu sein, wie man sich an den Beispielen  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z})$  oder  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{R})$  (vgl. § 1.2 (ii)) klar machen kann; im Falle der klassischen Heisenberggruppe (§ 1.2 (i)) ist diese Untergruppe für jedes  $w$  abgeschlossen.

Die abgeschlossene Hülle der Untergruppe  $\hat{\beta}_G w$  in (18) wollen wir mit  $H_w^\perp$  bezeichnen, indem wir sie – aus später ersichtlichen Gründen – als orthogonale Untergruppe zu einer abgeschlossenen Untergruppe  $H_w$  von  $G^\dagger$  auffassen.

Die Untergruppe  $H_w^\perp$  von  $\hat{G}^\dagger$  kann man folgendermaßen beschreiben: Es sei

$$\left. \begin{aligned} w &= (w_1, w_2, w_3) \in \hat{G}^\dagger, \\ B_1(X_2, w_3) &= \{B_1(a_2, w_3) \mid a_2 \in X_2\}, \\ B_2(X_1, w_3) &= \{B_2(a_1, w_3) \mid a_1 \in X_1\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wir definieren jetzt abgeschlossene *Untergruppen* von  $\hat{X}_1$  und  $\hat{X}_2$ :

$$\left. \begin{aligned} H_{1,w}^\perp &\text{ ist die abgeschlossene Hülle von } B_1(X_2, w_3) \text{ in } \hat{X}_1, \\ H_{2,w}^\perp &\text{ ist die abgeschlossene Hülle von } B_2(X_1, w_3) \text{ in } \hat{X}_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dann ist (vgl. (17))

$$H_w^\perp = \{(s_1, s_2, 0) \mid s_1 \in H_{1,w}^\perp, s_2 \in H_{2,w}^\perp\}. \quad (21)$$

Die Untergruppen (20) sind orthogonal zu den folgenden abgeschlossenen Untergruppen von  $X_1$  bzw.  $X_2$ :

$$\left. \begin{aligned} H_{1,w} &= \{x_1 \mid x_1 \in X_1, \langle B(x_1, a_2), w_3 \rangle = 1 \text{ für alle } a_2 \in X_2\}, \\ H_{2,w} &= \{x_2 \mid x_2 \in X_2, \langle B(a_1, x_2), w_3 \rangle = 1 \text{ für alle } a_1 \in X_1\}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$H_w^\perp$  ist also orthogonal zur abgeschlossenen Untergruppe

$$H_w = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in H_{1,w}, x_2 \in H_{2,w}, x_3 \in X_3\} \quad (23)$$

von  $G^\dagger$ .

**1.9.** Wir fassen zusammen: *Es gilt für die abgeschlossene Hülle der Bahn von  $w = (w_1, w_2, w_3)$  in  $\hat{G}^\dagger$  unter den Transformationen  $\hat{\sigma}_a, a \in G$ :*

$$\overline{\text{Bahn}(w)} = w + H_w^\perp, \quad (24)$$

wo  $H_w^\perp \subset \hat{G}^\dagger$  zu der durch (22), (23) definierten abgeschlossenen Untergruppe  $H_w \subset G^\dagger$  orthogonal ist.  $H_w^\perp$  ist durch (21) gegeben, also in der „Ebene“  $\hat{X}_1 \times \hat{X}_2 \times \{0\}$  enthalten; analog enthält  $H_w$  immer die „ $X_3$ -Achse“  $\{0\} \times \{0\} \times X_3$ .

Für  $w = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $w' = (w'_1, w'_2, w'_3)$  in  $\hat{G}^\dagger$  gilt  $H_{w'}^\perp = H_w^\perp$ , falls  $w'_3 = w_3$  ist, d.h.  $H_w^\perp$  und  $H_w$  hängen nur von der dritten Koordinate  $w_3$  von  $w$  ab.

Es ist eine nützliche Übung, die Untergruppen  $H_w^\perp, H_w$  in den Beispielen von §1.2 zu bestimmen.

**1.10.** Wir können nun die Definition von  $I_w$  (vgl. (14)) so formulieren:

$$I_w = \{f \mid f \in L^1(G^\dagger), \hat{f}(w + H_w^\perp) = 0\}. \quad (25)$$

Wie im Anschluß an (14) bemerkt, ist  $I_w$  invariant; wir können jetzt zeigen:  $I_w$  ist ein MAXIMALES invariantes Ideal von  $L^1(G^\dagger)$ .

Beim Beweis ist darauf Bedacht zu nehmen, daß die Bahn eines Punktes in  $\hat{G}^\dagger$  unter den Transformationen  $\hat{\sigma}_a, a \in G$ , nicht notwendig abgeschlossen ist. Wir gehen daher so vor. Sei  $I'$  ein invariantes Ideal von  $L^1(G^\dagger)$ , das  $I_w$  enthält und von  $L^1(G^\dagger)$  verschieden ist. Aus  $I_w \subset I'$  folgt  $\text{cosp } I' \subset \text{cosp } I_w$ , d.h. nach (25)

$$\text{cosp } I' \subset w + H_w^\perp. \quad (26)$$

Wegen  $I' \neq L^1(G^\dagger)$  ist nach dem Satz von Wiener  $\text{cosp} I' \neq \emptyset$ ; sei  $w' \in \text{cosp} I'$ . Dann ist also  $w' \in w + H_w^\perp$ , d.h.

$$w' = w + t', \quad \text{mit } t' \in H_w^\perp. \quad (27)$$

Da  $I'$  nach Voraussetzung invariant ist, liegt auch  $\overline{\text{Bahn}(w')}$  in  $\text{cosp} I'$  (vgl. §1.8), also nach (24)

$$w' + H_{w'}^\perp \subset \text{cosp} I'. \quad (28)$$

Nun folgt für  $w'$  aus (27), wenn wir wieder  $w = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $w' = (w'_1, w'_2, w'_3)$  schreiben und (21) beachten:  $w'_3 = w_3$ . Also ist nach §1.9  $H_{w'}^\perp = H_w^\perp$ . und daher folgt – wieder nach (27) –

$$w' + H_{w'}^\perp = w + H_w^\perp. \quad (29)$$

Aus (26), (28), (29) ergibt sich jetzt

$$\text{cosp} I' = w + H_w^\perp,$$

d.h.  $\text{cosp} I' = \text{cosp} I_w$ . Nach der Definition (25) von  $I_w$  muß also auch  $I' \subset I_w$  gelten, d.h.  $I' = I_w$ ; also ist  $I_w$  ein *maximales* invariantes Ideal von  $L^1(G^\dagger)$ .

**1.11.** Es gilt nun weiter: *Jedes invariante Ideal  $I$  von  $L^1(G^\dagger)$ , das von  $L^1(G^\dagger)$  verschieden ist, ist in einem Ideal  $I_w$  enthalten.* Dies folgt analog wie in §1.10 aus dem Satz von Wiener: Es gibt ein  $w \in \text{cosp} I$ , also liegt wegen der Invarianz von  $I$  auch  $w + H_w^\perp$  in  $\text{cosp} I$  und daher gilt nach der Definition (25)  $I \subset I_w$ . Daraus folgt weiter: *Jedes maximale invariante Ideal von  $L^1(G^\dagger)$  ist von der Form  $I_w$  ( $w \in \hat{G}^\dagger$ ).* Es gilt übrigens: *Zwei Ideale  $I_w, I_{w'}$  sind genau dann gleich, wenn*

$$w' \in w + H_w^\perp \quad (30)$$

*ist*; denn aus (29) folgt umgekehrt (27) nach den Eigenschaften von  $H_w^\perp$  (vgl. §1.9).

**1.12.** Wir wollen jetzt von  $L^1(G^\dagger)$  zu  $L^1(G)$  übergehen und die Ergebnisse direkt in  $L^1(G)$  formulieren. Zu diesem Zweck wollen wir die Ideale  $I_w$  näher betrachten. Setzen wir für  $w \in \hat{G}^\dagger$

$$\chi_w(x) = \langle x, w \rangle, \quad x \in G;$$

$\chi_w$  ist natürlich nicht ein Charakter von  $G$ , sondern von  $G^\dagger$ . Für  $f \in L^1(G^\dagger)$  gilt nun

$$(\chi_w \cdot f)^\wedge(t) = \hat{f}(t - w), \quad t \in \hat{G}^\dagger,$$

also können wir (25) in folgender Form schreiben:

$$I_w = \{\chi_w f_o \mid f_o \in L^1(G), \hat{f}_o(H_w^\perp) = 0\}.$$

Setzen wir

$$J^1(G^\dagger, H_w) = \{f_o \mid f_o \in L^1(G^\dagger), \hat{f}_o(H_w^\perp) = 0\},$$

so können wir also die Definition (25) so formulieren:

$$I_w = \chi_w \cdot J^1(G^\dagger, H_w). \quad (31)$$

Das Ideal  $J^1(G^\dagger, H_w)$  von  $L^1(G^\dagger)$  läßt sich aber noch auf andere Weise charakterisieren:  $J^1(G^\dagger, H_w)$  ist die abgeschlossene Hülle in  $L^1(G^\dagger)$  der Menge aller  $f \in \mathcal{K}(G^\dagger)$  für die  $\int_{H_w} f(x + \xi) d\xi = 0$  für alle  $x \in G^\dagger$  gilt (vgl. dazu [14, Kap. 3, §4, und Kap. 4, §4.3]).  $H_w$  ist aber auch eine Untergruppe von  $G$  und ist sogar normal in  $G$  (vgl. (4), (23)); weiter fällt das additive Haarmaß  $d\xi$  auf  $H_w$  mit dem multiplikativen zusammen und es gilt

$$\int_{H_w} f(x + \xi) d\xi = \int_{H_w} f(x\xi) d\xi, \quad x \in G, \quad f \in \mathcal{K}(G)$$

(vgl. (7) und die anschließenden Bemerkungen). Daraus folgt sofort:

$$J^1(G^\dagger, H_w) = J^1(G, H_w), \quad (32)$$

wobei das Ideal  $J^1(G, H_w)$  von  $L^1(G)$  wieder im Sinne von [14, Kap. 3, §4] definiert ist.<sup>4)</sup>

**1.13.** Wir können also schließlich die Definition (31) in der Form

$$I_w = \chi_w \cdot J^1(G, H_w) \quad (33)$$

schreiben. Es gilt nach §1.7 und §1.11: *Für jedes  $w \in \hat{G}^\dagger$  ist  $I_w$  ein Maximalideal von  $L^1(G)$  und umgekehrt ist jedes Maximalideal von dieser Form; jedes eigentliche Ideal von  $L^1(G)$  ist in einem Maximalideal enthalten.*

Damit ist der Übergang zu  $L^1(G)$  vollzogen und wir können zum nächsten Ziel, der Untersuchung der Quotientenalgebren  $L^1(G)/I_w$ , übergehen. Dies führt auf die Betrachtung von sogenannten „Multiplikatoren“ und „verschränkten  $L^1$ -Algebren“.

---

<sup>4)</sup> Wir verwenden hier die Bezeichnung  $H_w$ , auch wenn  $H_w$  als Untergruppe von  $G$  aufgefaßt wird; infolge der angeführten Eigenschaften ist dies gestattet (vgl. wieder die Bemerkungen im Anschluß an Formel (7)).

## §2. Multiplikatoren und verschränkte $L^1$ -Algebren

**2.1.** Wir betrachten hier ganz allgemein eine lokalkompakte Gruppe  $G$ . Unter einem *Multiplikator* (oder Kozyklus) für  $G$  versteht man eine Funktion  $\kappa$  auf  $G \times G$ , deren Werte komplexe Zahlen vom Absolutbetrag 1 sind und die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $\kappa(e, x) = \kappa(x, e) = 1$  für alle  $x \in G$ ;
- (ii)  $\kappa(xy, z) \kappa(x, y) = \kappa(x, yz) \kappa(y, z)$  für alle  $x, y, z$  in  $G$ .

Für unsere Zwecke können wir weiter voraussetzen:

- (iii)  $\kappa$  ist stetig auf  $G \times G$ .

Für eine allgemeinere Definition im Falle von Gruppen mit abzählbarer Basis, sowie den Zusammenhang mit den sogenannten projektiven Darstellungen von  $G$ , sei auf die Arbeiten von Mackey [8, §1] und Auslander und Moore [1, Kap. I, §4] verwiesen.

**2.2.** Als *Beispiel* betrachten wir eine Gruppe  $G = (X_1, X_2, X_3)_B$  vom Heisenbergtyp (§1.1); sei  $G' = G/X_3$ ,  $X_3' = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in X_3\}$ . Die Gruppe  $G'$  läßt sich mit dem Produkt  $X_1 \times X_2$  identifizieren:

$$G' = \{x' \mid x' = (x_1, x_2), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

Sei  $x_3 \mapsto \langle x_3, w_3 \rangle$  ein Charakter von  $X_3$  ( $w_3 \in \hat{X}_3$ ) und es sei  $\kappa'$  auf  $G' \times G'$  definiert durch

$$\kappa'(x', y') = \langle B(x_1, y_2), w_3 \rangle^{-1}, \quad x' = (x_1, x_2), \quad y' = (y_1, y_2).$$

Dann ist  $\kappa'$  ein (stetiger) Multiplikator für  $G'$ .

**2.3.** Sei jetzt allgemein  $\kappa$  ein Multiplikator für eine lokalkompakte Gruppe  $G$ , d.h.  $\kappa$  erfülle die Eigenschaften (i), (ii), (iii) von §2.1. Dann kann man eine „verschränkte  $L^1$ -Algebra“  $L^1(G, \kappa)$  definieren, indem man in  $L^1(G)$ , als  $L^1$ -Raum aufgefaßt, eine „verschränkte Faltung“ definiert durch

$$f *_\kappa g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) \kappa(y, y^{-1}x) dy,$$

wo  $dy$  das linke Haarmaß auf  $G$  ist, sowie eine Involution durch

$$f^\kappa(x) = \overline{f(x^{-1})} \Delta(x^{-1}) \overline{\kappa(x, x^{-1})}.$$

$L^1(G, \kappa)$  ist dann eine involutive Banachalgebra mit der gewöhnlichen  $L^1$ -Norm; vgl. Auslander und Moore [1, Kap. 1, §5], auch für die folgenden §§, sowie für diskrete Gruppen Weyl [17, Kap. III, §16].

**2.4.** Sei nun  $\psi$  eine beliebige komplexwertige stetige Funktion auf  $G$  derart, daß  $\psi(e)=1$  und  $|\psi(x)|=1$  für alle  $x \in G$  gilt; dann ist

$$\kappa_\psi(x, y) = \frac{\psi(x)\psi(y)}{\psi(xy)} \quad (1)$$

ein sogenannter *trivialer Multiplikator*. In diesem Fall wird natürlich  $L^1(G)$  durch

$$f \mapsto f \cdot \bar{\psi}, \quad f \in L^1(G), \quad (1a)$$

wo  $\bar{\psi}$  die konjugiert-komplexe Funktion bedeutet, isomorph auf  $L^1(G, \kappa_\psi)$  abgebildet – isomorph im Sinne involutiver Banachalgebren. Triviale Multiplikatoren liefern also hier nichts Neues; die Sachlage wird aber ganz anders, wenn man zu Quotientengruppen übergeht, was wir jetzt tun wollen.

**2.5.** Sei  $\kappa$  ein Multiplikator für  $G$ ; wir setzen

$$H^\kappa = \{\xi \mid \kappa(x, \xi) = 1 \text{ für alle } x \in G\},$$

$$\tilde{H}^\kappa = \{\xi \mid \kappa(\xi, x) = 1 \text{ für alle } x \in G\}.$$

Aus den Eigenschaften von  $\kappa$  (§2.1 (i), (ii), (iii)) ergibt sich, daß  $H^\kappa$  und  $\tilde{H}^\kappa$  abgeschlossene Untergruppen von  $G$  sind; wir bezeichnen mit  $H_\kappa$  die größte in  $H^\kappa \cap \tilde{H}^\kappa$  enthaltene normale Untergruppe von  $G$ , die natürlich auch abgeschlossen ist. Dann gilt also:  *$H_\kappa$  ist die größte normale Untergruppe  $H$  von  $G$  derart, daß*

$$\kappa(x, \xi) = \kappa(\xi, x) = 1 \text{ für alle } \xi \in H \text{ und alle } x \in G \quad (2)$$

ist. (2) ist äquivalent zur Bedingung

$$\kappa(\xi x, y \eta) = \kappa(x, y) \text{ für alle } \xi, \eta \text{ in } H \text{ und alle } x, y \text{ in } G, \quad (3)$$

wie sich aus §2.1 (i), (ii) ergibt. In (3) stehen  $\xi$  und  $\eta$  auf verschiedenen Seiten von  $x$  bzw.  $y$ ; da aber  $H$  definitionsgemäß normal ist, bedeutet (3) einfach, daß  $\kappa$  auf den Nebenklassen von  $H \times H$  in  $G \times G$  konstant ist, m.a.W.

$$\kappa = \dot{\kappa} \circ \pi, \quad (4)$$

wo  $\dot{\kappa}$  ein Multiplikator für  $G/H$  ist und  $\pi$  die kanonische Abbildung  $G \times G \rightarrow G/H \times G/H$  bedeutet. Wir haben also: *Sei  $\kappa$  ein Multiplikator für  $G$ ; dann ist  $H_\kappa$  die größte normale Untergruppe  $H$  von  $G$  derart, daß  $\kappa$  von einem Multiplikator  $\dot{\kappa}$  für  $G/H$  „abgeleitet“ ist, d.h. daß (4) gilt.*

**2.6. BEISPIEL.** Sei wieder  $G = (X_1, X_2, X_3)_B$  wie in §2.2. Sei  $w = (w_1, w_2, w_3)$  in

$\hat{G}^\dagger$  und  $\chi_w$  der zugehörige Charakter von  $G^\dagger$ , also

$$\chi_w(x) = \langle x_1, w_1 \rangle \langle x_2, w_2 \rangle \langle x_3, w_3 \rangle, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (5)$$

Dann können wir schreiben

$$\chi_w(xy) = \chi_w(x) \chi_w(y) [\kappa_w(x, y)]^{-1}, \quad (6)$$

wo  $\kappa_w$  nur von der dritten Koordinate  $w_3$  von  $w$  abhängt:

$$\kappa_w(x, y) = \langle B(x_1, y_2), w_3 \rangle^{-1}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3). \quad (7)$$

Nach (6) ist  $\kappa_w$  ein „trivialer“ Multiplikator für  $G$ . Die Untergruppe  $H_\kappa$  von §2.5 ist für  $\kappa = \kappa_w$  nach (7) gerade die Untergruppe  $H_w$  von §1.8 (23). Der triviale Multiplikator  $\kappa_w$  für  $G$  ist also von einem Multiplikator  $\dot{\kappa}_w$  für  $G/H_w$  abgeleitet; dabei ist

$$\dot{\kappa}_w(\dot{x}, \dot{y}) = \kappa_w(x, y), \quad \dot{x} = \pi_{H_w}(x), \quad \dot{y} = \pi_{H_w}(y), \quad (8)$$

mit  $\pi_{H_w}: G \rightarrow G/H_w$ . Im allgemeinen ist aber  $\dot{\kappa}_w$  durchaus kein trivialer Multiplikator, wie wir in §2.8 sehen werden.

**2.7.** Es gilt nun folgender Morphismussatz für verschränkte  $L^1$ -Algebren: Sei  $H$  eine (beliebige) abgeschlossene normale Untergruppe der lokalkompakten Gruppe  $G$  und  $\kappa$  ein Multiplikator für  $G$  von der Form (4). Dann ist die Abbildung  $T_H$ ,

$$T_H f(\dot{x}) = \int_H f(x\xi) d\xi, \quad \dot{x} = \pi_H(x), \quad f \in L^1(G),$$

ein Morphismus – im Sinne involutivner Banachalgebren – von  $L^1(G, \kappa)$  auf  $L^1(G/H, \dot{\kappa})$ , m.a.W.

$$L^1(G/H, \dot{\kappa}) \cong L^1(G, \kappa) / J^1(G, H), \quad (9)$$

wo  $J^1(G, H)$  der Kern von  $T_H$  ist und „ $\cong$ “ einen Isomorphismus involutiver Banachalgebren bedeutet (also auch Gleichheit der Normen und der Involutionen). Die Quotientenalgebra rechts hat dabei die Quotientennorm und es wird vorausgesetzt, daß die linken Haarmaße auf  $G, H, G/H$  kanonisch zueinander passen, d.h. der Weilschen Formel genügen.

Der Beweis ist ganz analog wie bei den „gewöhnlichen“  $L^1$ -Algebren  $L^1(G)$  und  $L^1(G/H)$  (vgl. dazu [14, Kap. 3, §§4.1–4.7, 5.3]). Es sei nur darauf verwiesen, daß infolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Multiplikatoren die Räume  $\mathcal{X}(G/H)$  und  $\mathcal{X}(G)$  auch (dichte) Unteralgebren von  $L^1(G/H, \dot{\kappa})$  bzw.  $L^1(G, \kappa)$  sind. Erwähnenswert ist vielleicht noch der Umstand, daß die Abbildung  $T_H$  von  $\kappa$  unabhängig ist und ihr Kern  $J^1(G, H)$  daher für alle Multiplikatoren  $\kappa$  der Form (4) ein bezüglich der Involution in  $L^1(G, \kappa)$  selbstadjungiertes Ideal von  $L^1(G, \kappa)$  ist.

**2.8.** Auf Grund des Morphismussatzes von §2.7 läßt sich nun für eine Gruppe  $G$  vom Heisenbergtyp die Quotientenalgebra von  $L^1(G)$  nach einem Maximalideal  $I_w$  explizit bestimmen. Denn  $L^1(G)$  wird durch die Abbildung  $f \mapsto f \cdot \bar{\chi}_w$  isomorph (im Sinne involutiver Banachalgebren) auf  $L^1(G, \kappa_w)$  abgebildet (vgl. (5), (7), (1), (1a)) und vermittels der Abbildung  $T_{H_w}$  gilt (9) mit  $H=H_\kappa$ ,  $\kappa=\kappa_w$ ,  $\dot{\kappa}=\dot{\kappa}_w$  (vgl. §2.6). Nach der Charakterisierung des Ideals  $I_w$  in §1.13 gilt also

$$L^1(G)/I_w \cong L^1(G/H_w, \dot{\kappa}_w), \quad (10)$$

wo  $H_w$  durch §1.8 (23),  $\dot{\kappa}_w$  durch (7), (8) definiert ist und „ $\cong$ “ einen Isomorphismus involutiver Banachalgebren bedeutet. Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.<sup>5)</sup>

Da  $I_w$  ein Maximalideal ist, ist  $L^1(G/H_w, \dot{\kappa}_w)$  natürlich eine *einfache* Algebra. Daher ist  $L^1(G/H_w, \dot{\kappa}_w)$  für alle  $w \in \hat{G}^\dagger$ , für die  $H_w$  nicht mit  $G$  zusammenfällt, von  $L^1(G/H_w)$  wesentlich verschieden; insbesondere ist also dann der Multiplikator  $\dot{\kappa}_w$  nicht trivial.

Nach der expliziten Bestimmung der Quotientenalgebra  $L^1(G)/I_w$  wollen wir die Maximalideale  $I_w$  jetzt mit den irreduziblen unitären Darstellungen von  $G$  in Verbindung bringen. Dabei sollen diese Ideale auch in einen allgemeineren Zusammenhang gerückt werden.

### §3. Unitäre Funktionen und zugeordnete Ideale

**3.1.** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe.

**DEFINITION 1.** Eine komplexwertige *stetige* Funktion  $\psi$  auf  $G$  derart, daß  $\psi(e)=1$  und  $|\psi(x)|=1$  für alle  $x \in G$  gilt, wollen wir *unitäre Funktion* nennen.

Für eine unitäre Funktion  $\psi$  setzen wir

$$\begin{aligned} H^\psi &= \{ \xi \mid \xi \in G, \psi(x\xi) = \psi(x)\psi(\xi) \text{ für alle } x \in G \}, \\ \tilde{H}^\psi &= \{ \xi \mid \xi \in G, \psi(\xi x) = \psi(\xi)\psi(x) \text{ für alle } x \in G \}. \end{aligned} \quad (1)$$

$H^\psi$  und  $\tilde{H}^\psi$  sind *abgeschlossene Untergruppen* von  $G$ , wie leicht ersichtlich. Wir definieren weiter:

$$\left. \begin{aligned} H_\psi &\text{ ist die größte in } H^\psi \cap \tilde{H}^\psi \text{ enthaltene normale} \\ &\text{ Untergruppe von } G, \text{ m.a.W. } H_\psi = \bigcap_{a \in G} a(H^\psi \cap \tilde{H}^\psi) a^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$H_\psi$  ist ebenfalls abgeschlossen.

---

<sup>5)</sup> Wie in §1.2 (v) bemerkt, gibt es auch Gruppen vom Heisenbergtyp mit endlich vielen Elementen, deren kleinste die Quaternionengruppe ist; es sei nochmals auf die dort erwähnten Darlegungen bei H. Weyl [17] verwiesen, die sich hier einfügen.

**3.2.** Wenn  $H$  irgendeine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  ist, so fällt bekanntlich der Kern  $J^1(G, H)$  der kanonischen Abbildung von  $L^1(G)$  auf  $L^1(G/H)$  mit demjenigen abgeschlossenen linearen Unterraum von  $L^1(G)$  zusammen, der von sämtlichen Funktionen der Form  $A_\eta f - f$  ( $f \in \mathcal{X}(G)$ ,  $\eta \in H$ ) aufgespannt wird, wo  $A_\eta f(x) = f(x\eta) \Delta(\eta)$  ist; für nähere Einzelheiten vgl. etwa [14, Kap. 8, §2; Kap. 3, §4].

Aus der zweiten Charakterisierung von  $J^1(G, H)$  folgt sofort:  $J^1(G, H)$  ist linksinvariant (d.h. invariant unter Linksverschiebungen) und, falls  $H$  normal ist, auch rechtsinvariant:

$$L_a J^1(G, H) = J^1(G, H) \quad \text{für alle } a \in G, \quad (3)$$

$$r_a J^1(G, H) = J^1(G, H) \quad \text{für alle } a \in G, \text{ falls } H \text{ normal ist.} \quad (4)$$

Hier sind die Operatoren  $L_a, r_a$  durch

$$L_a F(x) = F(a^{-1}x), \quad r_a F(x) = F(xa^{-1}), \quad a \in G \quad (5)$$

definiert. Wir zeigen nun:

**PROPOSITION 1.** Sei  $\psi$  eine unitäre Funktion auf  $G$  (§3.1),  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Wenn  $H$  in  $H^\psi$  enthalten ist, so ist  $\psi \cdot J^1(G, H)$  ein abgeschlossener, linksinvarianter Unterraum von  $L^1(G)$ ; liegt insbesondere  $H$  in  $H^\psi \cap \tilde{H}^\psi$  und ist  $H$  normal in  $G$ , so ist  $\psi \cdot J^1(G, H)$  auch rechtsinvariant, also ein Ideal von  $L^1(G)$ .

Daß  $\psi \cdot J^1(G, H)$  ein abgeschlossener linearer Unterraum von  $L^1(G)$  ist, folgt wegen  $\psi \bar{\psi} = 1$  aus der entsprechenden Eigenschaft von  $J^1(G, H)$ . Um die Linksinvarianz zu zeigen, beweisen wir zuerst ein Lemma.

**LEMMA.** Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ ; sei  $\varphi_o$  eine komplexe, stetige Funktion auf  $G$  mit  $|\varphi_o(x)| = 1$  für alle  $x \in G$ . Wenn  $\varphi_o$   $H$ -rechtsperiodisch ist, d.h. wenn  $\varphi_o(x\xi) = \varphi_o(x)$  für alle  $x \in G$  und alle  $\xi \in H$  gilt, so ist

$$\varphi_o \cdot J^1(G, H) = J^1(G, H). \quad (6)$$

*Beweis des Lemmas.* Es ist

$$\varphi_o(A_\eta f - f) = A_\eta(\varphi_o f) - \varphi_o f, \quad \eta \in H, f \in \mathcal{X}(G),$$

denn  $\varphi_o$  ist  $H$ -rechtsperiodisch. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von  $\varphi_o$  ist  $\varphi_o f$  wieder in  $\mathcal{X}(G)$ , also folgt  $\varphi_o J^1(G, H) \subset J^1(G, H)$ . Wegen  $\varphi_o \bar{\varphi}_o = 1$  folgt daraus  $J^1(G, H) \subset \bar{\varphi}_o J^1(G, H)$  und weiter – da  $\overline{J^1(G, H)} = J^1(G, H)$  ist –  $J^1(G, H) \subset \varphi_o \cdot J^1(G, H)$ , sodaß (6) gilt.

*Beweis von Proposition 1.* Sei jetzt  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , die in  $H^\psi$  enthalten ist. Wir setzen  $\varphi_a = L_a\psi/\psi$ ,  $a \in G$ . Dann ist  $\varphi_a$  natürlich gemäß (1)  $H^\psi$ -rechtsperiodisch, insbesondere also  $H$ -rechtsperiodisch; es gilt also nach (3) und dem obigen Lemma, wenn wir  $J = J^1(G, H)$  setzen,

$$L_a(\psi J) = (L_a\psi) L_a J = (\psi \varphi_a) J = \psi J, \quad (7)$$

d.h.  $\psi J^1(G, H)$  ist linksinvariant.

Sei nun  $H$  in  $H^\psi \cap \tilde{H}^\psi$  enthalten und normal in  $G$ . Dann ist für jedes  $a \in G$  auch der Quotient  $\varphi'_a = r_a\psi/\psi$  (vgl. (5))  $H$ -periodisch (für normales  $H$  bedeutet ja „linksperiodisch“ dasselbe wie „rechtsperiodisch“!). Wir erhalten dann – analog wie in (7) – auf Grund von (4)

$$r_a(\psi J) = (r_a\psi) r_a J = (\psi \varphi'_a) J = \psi J,$$

d.h.  $\psi J^1(G, H)$  ist auch rechtsinvariant. Damit ist Proposition 1 bewiesen.

**3.3.** Nach diesen Vorbereitungen können wir nun folgende Definition geben.

**DEFINITION 2.** Sei  $\psi$  eine unitäre Funktion auf  $G$  und  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , die in  $H^\psi$  enthalten ist (vgl. §3.1). Dann setzen wir

$$I(\psi, H) = \{f \mid f \in L^1(G), r_a f \in \psi J^1(G, H) \text{ für alle } a \in G\}. \quad (8)$$

Nach Proposition 1 gilt:  $I(\psi, H)$  ist das größte Ideal<sup>1)</sup> von  $L^1(G)$ , das in  $\psi J^1(G, H)$  enthalten ist.

Nach der Definition gilt weiters

$$H \subset H_1 \subset H^\psi \Rightarrow I(\psi, H) \subset I(\psi, H_1). \quad (9)$$

Von den Idealen  $I(\psi, H)$  sind für die Anwendungen die folgenden wichtig, die „extremen“ Untergruppen  $H$  entsprechen: Wir setzen

$$I^\psi = I(\psi, H^\psi), \quad (10)$$

wo  $H^\psi$  die zu  $\psi$  gehörige Untergruppe (1) ist, und

$$I_\psi = I(\psi, H_\psi), \quad (11)$$

wo  $H_\psi$  durch (2) definiert ist; nach Proposition 1 gilt

$$I_\psi = \psi J^1(G, H_\psi). \quad (12)$$

Nach (9) ist stets

$$I_\psi \subset I^\psi. \quad (13)$$

Die Bedeutung der Ideale  $I^\psi$  und  $I_\psi$ , die einer unitären Funktion  $\psi$  zugeordnet sind, wird sich in konkreten Fällen (§§4, 5) ergeben; hier wollen wir noch ganz allgemein die Beziehungen zwischen den Idealen  $I(\psi, H)$  und den unitären Darstellungen von  $G$  erörtern.

**3.4.** Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $H^\psi$  derart, daß auf dem Quotientenraum  $G/H$  ein invariantes Maß existiert; diese letztere Voraussetzung dient der Einfachheit der Darstellung – in den Anwendungen (§§4, 5) wird  $H$  sogar normal sein. Wir können dann zu einer gegebenen unitären Funktion  $\psi$  auf  $G$  eine unitäre Darstellung  $x \mapsto U_x$  von  $G$  in  $L^2(G/H)$  folgendermaßen definieren:

$$U_x F(y) = F(x^{-1}y) \psi(x^{-1}y)/\psi(y), \quad F \in L^2(G/H) \circ \pi_H. \quad (14)$$

Hier bedeutet die Schreibweise „ $F \in L^2(G/H) \circ \pi_H$ “ einfach:  $F = \hat{F} \circ \pi_H$ , wo  $\hat{F}$  eine komplexe, quadratisch integrierbare Funktion auf  $G/H$  und  $\pi_H$  die kanonische Abbildung von  $G$  auf  $G/H$  ist. Man beachte, daß  $y \mapsto \psi(x^{-1}y)/\psi(y)$  eine stetige,  $H$ -rechtsperiodische Funktion auf  $G$  mit Werten vom Absolutbetrag 1 ist; also ist die rechte Seite von (14) als Funktion von  $y \in G$  in  $L^2(G/H) \circ \pi_H$  und der Operator  $U_x$  in  $L^2(G/H)$  unitär, für jedes  $x \in G$ .

Wir wollen im folgenden besonders den in  $L^2(G/H)$  dichten linearen Unterraum  $\mathcal{K}(G/H)$  und entsprechend  $\mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H$  betrachten; für  $F \in \mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H$  gilt dann auch  $U_x F \in \mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H$ . Der unitären Darstellung  $x \mapsto U_x$  von  $G$  in  $L^2(G/H)$  entspricht eine Darstellung  $f \mapsto U(f)$  von  $L^1(G)$  in  $L^2(G/H)$ , und zwar ist für  $f \in L^1(G)$

$$U(f) F(y) = \int_G f(x) F(x^{-1}y) [\psi(x^{-1}y)/\psi(y)] dx, \quad F \in \mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H. \quad (15)$$

Die Einschränkung von  $U(f)$  auf  $\mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H$  ist aus praktischen Gründen nützlich;  $U(f)$  ist dadurch bereits eindeutig bestimmt. Falls  $f$  in  $\mathcal{K}(G)$  liegt, ist für ein derartiges  $F$  natürlich auch  $U(f) F$  wieder in  $\mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H$ .

Wir wollen nun den Kern dieser Darstellung von  $L^1(G)$  bestimmen; zu diesem Zweck ist es bequemer, den adjungierten Operator  $U(f)^* = U(f^*)$  zu betrachten, der durch

$$U(f)^* F(y) = \int_G \overline{f(x)} F(xy) [\psi(xy)/\psi(y)] dx, \quad F \in \mathcal{K}(G/H) \circ \pi_H, \quad (16)$$

bestimmt ist. Die rechte Seite von (16) ist eine *stetige* ( $H$ -rechtsperiodische) Funktion

von  $y \in G$ ; also bedeutet  $U(f)^* = 0$ , daß diese Funktion auf  $G$  verschwindet, was wir auch

$$\int_G \overline{f(xy^{-1})} F(x) \psi(x) dx = 0 \quad \text{für alle } y \in G$$

schreiben können. Ist  $d\dot{x}$  das invariante Maß auf  $G/H$  und  $F = \dot{F} \circ \pi_H$ , so bedeutet dies also

$$\int_{G/H} \dot{F}(\dot{x}) \int_H \overline{f(x\xi y^{-1})} \psi(x\xi) d\xi d\dot{x} = 0, \quad y \in G.$$

Da  $\dot{F} \in \mathcal{K}(G/H)$  beliebig ist, bedeutet dies wiederum  $T_H((r_y f)^- \cdot \psi) = 0$  oder

$$T_H((r_y f)^- \bar{\psi}) = 0 \quad \text{für alle } y \in G, \quad (17)$$

wo  $T_H$  die kanonische Abbildung von  $L^1(G)$  auf  $L^1(G/H)$  ist (vgl. [14, Kap. 8, §2], mit  $q=1$ ). Die Bedingung (17) besagt also einfach

$$r_y f \in \psi J^1(G, H) \quad \text{für alle } y \in G,$$

wo  $J^1(G, H)$  der Kern von  $T_H$  ist, und umgekehrt ist für jedes solche  $f \in L^1(G)$  auch  $U(f)^* = 0$ .

**3.5.** Wir haben also für eine beliebige unitäre Funktion  $\psi$  folgendes Ergebnis erhalten:

**PROPOSITION 2.** *Sei  $H \subset H^\psi$  derart, daß auf  $G/H$  ein invariantes Maß existiert. Dann ist das Ideal  $I(\psi, H)$  von §3.3, Definition 2, der Kern der Darstellung (15) von  $L^1(G)$  in  $L^2(G/H)$ ; insbesondere ist also  $I(\psi, H)$  selbstadjungiert bezüglich der Involution von  $L^1(G)$ .*

Es kann übrigens vorkommen, daß  $I(\psi, H)$  keine Funktion in  $\mathcal{K}(G)$  außer 0 enthält, aber  $\neq (0)$  ist (vgl. §5.11).

**3.6.** Es sei noch bemerkt, daß man im Fall der Ideale  $I_\psi$  (vgl. (11)) die Quotientenalgebra  $L^1(G)/I_\psi$  explizit angeben kann. Dazu betrachtet man den trivialen Multiplikator  $\kappa = \kappa_\psi$  von §2.4. Die in §2.5 definierte Untergruppe  $H_\kappa$  fällt dann natürlich mit der Untergruppe  $H_\psi$  von §3.1 zusammen und der Multiplikator  $\kappa_\psi$  für  $G$  ist von einem Multiplikator  $\dot{\kappa}_\psi$  für  $G/H_\psi$  abgeleitet. Man zeigt dann analog wie in §2.8, daß der Isomorphismus – im Sinne involutiver Banachalgebren –

$$L^1(G/H_\psi, \dot{\kappa}_\psi) \cong L^1(G)/I_\psi$$

besteht; die Fälle  $H_\psi = G$  oder  $H_\psi = \{e\}$  sind natürlich trivial. Es sei noch darauf hingewiesen, daß  $I_\psi$  bezüglich der Involution von  $L^1(G)$  selbstadjungiert ist (vgl. dazu §3.5, Proposition 2).

#### §4. Erste Anwendung: Gruppen vom Heisenbergtyp

**4.1.** Das Ergebnis, zu dem wir auf Grund der bisherigen Vorarbeiten gelangen werden, sei gleich an die Spitze gestellt.

**SATZ 1.** *Sei  $G$  eine Gruppe vom Heisenbergtyp,  $G^\dagger$  die zugehörige Abelsche Gruppe mit dualer Gruppe  $\hat{G}^\dagger$ . Für  $w \in \hat{G}^\dagger$  sei*

$$\psi_w(x) = \chi_w(x) \equiv \langle x, w \rangle, \quad x \in G,$$

sodaß also  $\psi_w$  eine unitäre Funktion auf  $G$  im Sinne von §3.1 ist. Dann gilt für die zugeordneten Ideale  $I^{\psi_w}, I_{\psi_w}$  (§3.3) von  $L^1(G)$

$$I^{\psi_w} = I_{\psi_w} = I_w \quad \text{für jedes } w \in \hat{G}^\dagger, \quad (1)$$

wo  $I_w$  das in §1.13 (33) definierte Ideal ist.<sup>1)</sup>

Für jedes  $w \in \hat{G}^\dagger$  ist  $I_w$  sowohl ein Maximalideal von  $L^1(G)$  als auch der Kern einer IRREDUZIBLEN Darstellung von  $L^1(G)$ . Zwei Ideale  $I_w, I_{w'}$  fallen genau dann zusammen, wenn die Relation §1.11 (30) gilt.

Die Ideale  $I_w, w \in \hat{G}^\dagger$ , sind SÄMTLICHE Maximalideale von  $L^1(G)$  und jedes eigentliche Ideal von  $L^1(G)$  ist in einem Maximalideal enthalten. Die Quotientenalgebren  $L^1(G)/I_w$  lassen sich als verschränkte  $L^1$ -Algebren (§2) auf Quotientengruppen  $G/H_w$  darstellen und zwar gilt die Relation §2.8 (10).

**4.2. Beweis.** Die in §3.1 eingeführten Untergruppen lassen sich im vorliegenden Fall, wo  $G = (X_1, X_2, X_3)_B$ ,  $\psi = \psi_w = \chi_w$  ist, leicht bestimmen, wenn man §2.6 (6), (7) berücksichtigt; man erhält

$$\begin{aligned} H^{\psi_w} &= \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in H_{2,w}, \xi_3 \in X_3\}, \\ \tilde{H}^{\psi_w} &= \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 \in H_{1,w}, \xi_2 \in X_2, \xi_3 \in X_3\}, \end{aligned} \quad (2)$$

wo die Untergruppen  $H_{1,w} \subset X_1, H_{2,w} \subset X_2$  durch §1.8 (22) definiert sind. Die Untergruppen  $H^{\psi_w}, \tilde{H}^{\psi_w}$  sind beide normal in  $G$ , also ist hier nach §3.1 (2)

$$H_{\psi_w} = H^{\psi_w} \cap H_{\psi_w}.$$

Die rechte Seite ist nun gerade  $H_w$ , nach der Definition §1.8 (23), also gilt

$$H_{\psi_w} = H_w.$$

Es gilt daher weiter auf Grund von §3.3 (12):  $I_{\psi_w} = \psi_w J^1(G, H_w)$ . Nun ist  $\psi_w J^1(G, H_w)$  gerade das *Maximalideal*  $I_w$  von  $L^1(G)$ , nach §1.13 (es ist ja  $\psi_w = \chi_w!$ ); andererseits gilt  $I_{\psi_w} \subset I^{\psi_w}$  (vgl. §3.3 (13)). Da  $I^{\psi_w} \neq L^1(G)$  ist – dies gilt ganz allgemein nach der Definition 2 in §3.3 – folgt also (1).

Die Relation (1) beinhaltet übrigens (vgl. §3.3 (9), (10), (11)): Für jede abgeschlossene Untergruppe  $H$  von  $G$ , die die Bedingung

$$H^{\psi_w} \supset H \supset H_{\psi_w} (= H_w) \quad (3)$$

erfüllt, gilt

$$I(\psi_w, H) = I_w.$$

Nach §3.5, Proposition 2, ist also  $I_w$  der Kern einer Darstellung von  $L^1(G)$  in  $L^2(G/H)$  für jede abgeschlossene Untergruppe  $H$ , die (3) erfüllt (man beachte, daß  $H$  dann sogar normal in  $G$  ist!). Wir wollen noch einen einfachen Beweis dafür geben, daß im „Extremfall“  $H = H^{\psi_w}$  die entsprechende unitäre Darstellung §3.4 (14) von  $G$  irreduzibel ist.

**4.3.** Die erwähnte unitäre Darstellung von  $G = (X_1, X_2, X_3)_B$  läßt sich so beschreiben. Die Funktionen auf  $G$ , die bezüglich  $H^{\psi_w}$  periodisch sind, sind hier von der Form  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \hat{F}(\dot{x}_2)$ , wo  $\hat{F}$  eine Funktion auf  $X_2/H_{2,w}$  und  $x_2 \mapsto \dot{x}_2$  die kanonische Abbildung von  $X_2$  auf  $X_2/H_{2,w}$  ist (vgl. (2)). Weiter gilt für  $w = (w_1, w_2, w_3)$  in  $\hat{G}^\dagger$  und  $a = (a_1, a_2, a_3)$  in  $G$  nach §2.6 (6), (7):

$$\chi_w(a^{-1}x)/\chi_w(x) = \chi_w(a^{-1}) \langle -B(a_1, x_2), w_3 \rangle.$$

Also ist nach §1.8 (15)

$$\chi_w(a^{-1}x)/\chi_w(x) = \chi_w(a^{-1}) \langle x_2, B_2(a_1, w_3) \rangle^-. \quad (4)$$

Nun ist  $B_2(a_1, w_3)$  in  $H_{2,w}^\perp$  (vgl. §1.8 (19), (20)), der dualen Gruppe von  $X_2/H_{2,w}$ ; wir haben daher

$$\langle x_2, B_2(a_1, w_3) \rangle = \dot{\chi}_{B_2} \circ \pi_2(x_2), \quad [\pi_2: X_2 \rightarrow X_2/H_{2,w}], \quad (5)$$

wo  $\dot{\chi}_{B_2}$  ein Charakter von  $X_2/H_{2,w}$  ist.

Die allgemeine Darstellung §3.4 (14) von  $G$  in  $L^2(G/H)$  läßt sich also für  $H = H^{\psi_w}$  (vgl. (2)) als Darstellung in  $L^2(X_2/H_{2,w})$  auffassen, und zwar hat sie die besonders einfache Form

$$U_a \hat{F} = \chi_w(a^{-1}) \bar{\chi}_{B_2} L_{\dot{a}_2} \hat{F}, \quad \hat{F} \in L^2(X_2/H_{2,w}), \quad (6)$$

wo  $a = (a_1, a_2, a_3)$  in  $G$ ,  $B_2 = B_2(a_1, w_3)$  in  $(X_2/H_{2,w})^\wedge$  und  $\dot{a}_2 = \pi_2(a_2)$  in  $X_2/H_{2,w}$  ist

(vgl. (4), (5)). Nun ist  $a_2$  in  $X_2/H_{2,w}$  beliebig, weil ja  $a \in G$  beliebig ist, und aus demselben Grund ist  $B_2(a_1, w_3)$  ein beliebiges Element der Menge  $B_2(X_1, w_3)$ , die ja in  $H_{2,w}^\perp = (X_2/H_{2,w})^\wedge$  dicht ist (vgl. §1.8 (20)). Daher sind für  $\hat{F} \neq 0$  die Linearkombinationen der Funktionen  $U_a \hat{F}$ ,  $a \in G$ , dicht in  $L^2(X_2/H_{2,w})$ ; also ist die Darstellung (6) von  $G$  irreduzibel. Der Vollständigkeit halber sei noch ein kurzer Beweis jener bekannten Tatsache angeführt.

**4.4.** Es ist zu zeigen: Sei  $X$  eine lokalkompakte Abelsche Gruppe. Ist  $F \in L^2(X)$ ,  $F \neq 0$ , dann kann für  $\Phi \in L^2(X)$  die Beziehung

$$\int_X \chi_t \cdot L_x F \cdot \bar{\Phi} = 0 \quad \text{für alle } x \in X \quad \text{und alle } t \in \hat{X} \quad (7)$$

(oder für alle  $x$  bzw. alle  $t$  aus einer dichten Teilmenge von  $X$  bzw.  $\hat{X}$ ), wo  $\chi_t$  der durch  $t$  definierte Charakter von  $X$  ist, nur stattfinden, wenn  $\Phi = 0$  ist.

*Beweis.* Die linke Seite von (7) ist eine stetige Funktion von  $x \in X$  bzw.  $t \in \hat{X}$ , also können wir einfach von der Voraussetzung (7) ausgehen. Das Produkt  $L_x F \cdot \bar{\Phi}$  ist (für festes  $x \in X$ ) in  $L^1(X)$ ; da laut (7) die Fouriertransformierte dieses Produktes auf  $\hat{X}$  verschwindet, folgt

$$L_x F \cdot \bar{\Phi} = 0 \quad (\text{in } L^1(X)) \quad \text{für jedes } x \in X. \quad (8)$$

Es gilt nun (sogar für beliebige lokalkompakte Gruppen  $X$ !): Wenn  $F \in L^2(X)$  und  $\Phi \in L^2(X)$  die Relation (8) erfüllen und  $F \neq 0$  ist, so folgt  $\Phi = 0$ , wie man folgendermaßen sieht. Man setze  $f = |F|^2$ ,  $g = |\Phi|^2$  und betrachte in  $L^1(X)$  die Faltung  $g * f^*$  (Involution in  $L^1(X)$ !). Wegen (8) ist auch  $g * f^* = 0$  (in  $L^1(X)$ ), daher  $\int_X g \cdot \int_X f^* = 0$ ; da  $\int_X f^* = \|F\|_2^2 > 0$  ist, folgt  $\int_X g = 0$ , d.h.  $\|\Phi\|_2^2 = 0$ , also  $\Phi = 0$  in  $L^2(X)$ .

**4.5.** Damit ist der Beweis von Satz 1 (§4.1) vollständig, denn die Behauptungen über Maximalideale im letzten Teil des Satzes wurden bereits in §1, diejenigen über Quotientenalgebren in §2 bewiesen.

Im Zusammenhang mit Satz 1 sei auf Theorem 2 von Leptin [5] verwiesen, das der Ausgangspunkt für diesen Satz war.

## §5. Zweite Anwendung: Halbdirekte Produkte Abelscher Gruppen

**5.1.** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe, die zwei abgeschlossene Untergruppen  $N, G_1$  enthält, wobei  $N$  normal ist und folgendes gilt:

- (i)  $G = N \cdot G_1 (= G_1 \cdot N)$ ,  $N \cap G_1 = \{e\}$ ;
- (ii) die Topologie von  $G$  ist diejenige des Produktes  $N \times G_1$  (bzw.  $G_1 \times N$ ).

Dann heißt  $G$  bekanntlich *halbdirektes Produkt* von  $N$  und  $G_1$ . Im folgenden werden sowohl  $N$  als auch  $G$  immer als *Abelsch* vorausgesetzt.

Wir gehen hier direkt von  $G$  aus; dies ist für die weiteren Entwicklungen am einfachsten. Da  $N$  und  $G_1$  also als Untergruppen von  $G$  gegeben sind, verwenden wir auch für  $N$  und  $G_1$  multiplikative Schreibweise.

Für das *linke* Haarmaß auf  $G$  gilt (vgl. z.B. [14, S. 161, (ii)])

$$\int_G f(t) dt = \int_{G_1} dg \int_N f(gn) dn, \quad f \in L^1(G). \quad (1)$$

Man beachte rechts die Reihenfolge  $gn$ !

Wir setzen noch

$$\sigma_g n = gng^{-1}, \quad g \in G_1. \quad (2)$$

Dies ist also ein Automorphismus von  $N$ .

**5.2.** In der Praxis ist der Ausgangspunkt aber oft umgekehrt wie in §5.1. Zunächst sind (Abelsche) lokalkompakte Gruppen  $N$  und  $G_1$  gegeben;  $N$  wird additiv,  $G_1$  multiplikativ geschrieben, mit neutralem Element 0 bzw. 1. Weiter ist ein (algebraischer) Homomorphismus  $a \rightarrow \sigma_a$  von  $G_1$  in die Gruppe der (topologischen) Automorphismen von  $N$  gegeben derart, daß die Abbildung  $(x, a) \mapsto \sigma_a x$  von  $N \times G_1$  in  $N$  stetig ist.  $G$  wird dann als die Menge aller Paare  $(x, a)$  definiert, mit der Produkttopologie und der Multiplikation

$$(x, a)(y, b) = (x + \sigma_a y, ab) \quad (3)$$

(auch die „entgegengesetzte“ Multiplikation kommt hier vor, vgl. z.B. Müller-Römer [10]). Die Untergruppe aller  $(x, 1)$  bzw. aller  $(0, a)$  ist dann isomorph zu  $N$  bzw.  $G_1$  und  $G$  ist halbdirektes Produkt von  $N$  und  $G_1$ ; dabei entspricht  $\sigma_a$  dem Automorphismus (2). Man schreibt

$$G = N \times_{\sigma} G_1. \quad (4)$$

Die Formel (1) wird in „Koordinaten“  $(x, a)$ , bei Verwendung von (3)

$$\int_G f(x, a) d(x, a) = \int_{G_1} da \int_N f(\sigma_a x, a) dx, \quad f \in L^1(G).$$

Für die allgemeinen Beweise, die im folgenden zu geben sind, ist es aber einfacher, die „koordinatenfreie“ Formel (1) zu verwenden.

BEISPIELE. (i)  $N = \mathbf{R}^r$ ;  $G_1 = \mathbf{R}^*$  (multiplikative Gruppe aller reellen Zahlen  $\neq 0$ ),  $\sigma_a x = ax$  ( $x \in \mathbf{R}^r$ ,  $a \in \mathbf{R}^*$ ),  $r = 1, 2, \dots$ .

(ii) Analogon zu (i) für einen beliebigen lokalen Körper  $\mathbf{K}$ .

(iii)  $N$  wie in (ii),  $G_1$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $\mathbf{K}^*$  mit  $\mathbf{K}^*/G_1$  kompakt, z.B.  $G_1 = (\mathbf{K}^*)^m$ ,  $m \geq 2$ ;  $\sigma_a$  analog wie in (i).

(iv) Analogon zu (ii) oder (iii) für endliche Körper.

(v)  $N = A^{\mathbf{Z}}$ , wo  $A$  eine *endliche* Abelsche Gruppe ist;  $A^{\mathbf{Z}}$  ist definiert als die additive Gruppe aller Folgen  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ,  $x_n \in A$ , mit der Produkttopologie (also ist  $A^{\mathbf{Z}}$  kompakt).  $G_1 = \mathbf{Z}$  und  $\sigma_a x = (x'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  mit  $x'_n = x_{n+a}$ ; man kann statt  $\sigma_a$  auch  $\sigma_a^m = \sigma_{ma}$  ( $m$  eine feste natürliche Zahl) nehmen.

(vi) Sei  $A^{\mathbf{Z}}$  wie in (v) definiert; für  $n' \geq 0$  sei  $K_{n'}$  die kompakte Untergruppe aller  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  mit  $x_n = 0$  für alle  $n < -n'$ . Dann setze man  $N = \text{ind.}\lim_{n' \geq 0} K_{n'}$  (vgl. [14, Kap. 4, §1.5]).  $G_1$  und  $\sigma_a$  werden wie in (v) definiert. Hier ist übrigens  $N$  selbst-dual.

(vii) Eine Gruppe vom Heisenbergtyp,  $G = (X_1, X_3, X_3)_B$ , läßt sich als halbdirektes Produkt auffassen, indem man z.B.  $N = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1 \in X_1, x_3 \in X_3\}$ ,  $G_1 = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in X_2\}$  wählt.

### 5.3. Die Gruppe $G_1$ wirkt auf $N$ mittels der Automorphismen $\sigma_g$ (vgl. (2)).

DEFINITION 1. Wir sagen, daß die Wirkung  $\sigma$  von  $G_1$  auf  $N$  die *Kompressions-eigenschaft* hat, wenn es für jede kompakte Menge  $K \subset N$  und jede Umgebung  $U$  von  $e \in N$  ein  $g \in G_1$  gibt derart, daß  $\sigma_g K$  in  $U$  liegt.<sup>6)</sup> In den Beispielen von §5.2 haben (i), (ii), (iii) und (vi) die Kompressionseigenschaft, die übrigen nicht (was insbesondere für die Gruppen vom Heisenbergtyp von Bedeutung ist).

Die Kompressionsbedingung ist natürlich auch für nicht-Abelsches ( $G_1$  und)  $N$  sinnvoll; in diesem Zusammenhang gilt: *Wenn  $\sigma$  die Kompressionseigenschaft hat, dann hat  $N$  die Eigenschaft  $P_1$ .* Der Beweis ist genau derselbe wie im klassischen Spezialfall §5.2, Beispiel (i), wie schon Müller-Römer [11, 12] bemerkt hat.

Sei nun  $\hat{\sigma}_g$  der zu  $\sigma_g$  duale (topologische) Automorphismus der dualen Gruppe  $\hat{N}$ , definiert durch

$$\langle \sigma_{g^{-1}} n, \hat{n} \rangle = \langle n, \hat{\sigma}_g \hat{n} \rangle \quad \text{für alle } n \in N. \quad (5)$$

Wir setzen

$$\text{Bahn}(\hat{n}) = \{ \hat{\sigma}_g \hat{n} \mid g \in G_1 \}, \quad \hat{n} \in \hat{N} \quad (6)$$

und bezeichnen die abgeschlossene Hülle mit  $\overline{\text{Bahn}}(\hat{n})$ .

<sup>6)</sup> Diese Bedingung ist explizit von Eymard [3, S. 100–101] und von Müller-Römer [11, 12] unabhängig voneinander formuliert worden.

DEFINITION 2. Wir sagen, daß die Wirkung  $\hat{\sigma}$  von  $G_1$  auf die duale Gruppe  $\hat{N}$  die *Injektionsbedingung* erfüllt, wenn für jedes  $\hat{n} \neq \hat{e}$  gilt: für  $g \neq g'$  in  $G_1$  ist auch  $\hat{\sigma}_g \hat{n} \neq \hat{\sigma}_{g'} \hat{n}$ . Dies bedeutet also, daß  $g \mapsto \hat{\sigma}_g \hat{n}$  für jedes  $\hat{n} \neq \hat{e}$  in  $\hat{N}$  eine (stetige) Injektion von  $G_1$  in  $\hat{N}$  ist.

Für die Beispiele (i)–(vi) in §5.2 ist die Injektionsbedingung erfüllt, aber nicht für die Gruppen vom Heisenbergtyp (Beispiel (vii)), wie man leicht sieht.

5.4. Wir können jedem halbdirekten Produkt  $G = N \cdot G_1 = G_1 \cdot N$  (vgl. §5.1) eine Abelsche Gruppe  $G^\dagger$  zuordnen, nämlich das (gewöhnliche) Produkt

$$G^\dagger = G_1 \times N.$$

Die Abbildung  $gn \mapsto (g, n)$  von  $G$  auf  $G^\dagger$  ist dann topologisch.

Jeder Funktion  $f$  auf  $G$  entspricht also eine Funktion  $f^\dagger$  auf  $G^\dagger$  mittels der Zuordnung

$$f^\dagger(g, n) = f(gn). \quad (7)$$

Die Integralformel (1) besagt nun: (7) definiert einen Isomorphismus von  $L^1(G)$  und  $L^1(G^\dagger)$ , als Banachräume aufgefaßt. Jeder Funktion  $f \in L^1(G)$  können wir daher eine „Fouriertransformierte“  $\hat{f}^\dagger$ , die Fouriertransformierte von  $f^\dagger$ , zuordnen:

$$\hat{f}^\dagger(\hat{g}, \hat{n}) = \int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g} \rangle} \int_N f(gn) \overline{\langle n, \hat{n} \rangle} dn. \quad (8)$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir nun:

5.5. SATZ 2. Sei die lokalkompakte Gruppe  $G$  ein halbdirektes Produkt der Abelschen Untergruppen  $N$  und  $G_1$ , wobei  $N$  normal ist (§5.1). Sei  $G^\dagger = G_1 \times N$  die zugeordnete Abelsche Gruppe. Sei

$$w = (\hat{g}_w, \hat{n}_w) \in \hat{G}^\dagger = \hat{G}_1 \times \hat{N}_1.$$

Wir setzen

$$\psi_w(gn) = \langle g, \hat{g}_w \rangle \langle n, \hat{n}_w \rangle, \quad g \in G_1, n \in N. \quad (9)$$

Also ist  $\psi_w$  eine unitäre Funktion auf  $G$  (vgl. §3.1); seien  $I^{\psi_w}, I_{\psi_w}$  die zugeordneten Ideale von  $L^1(G)$  (vgl. §3.3).

1. Liegt  $w$  auf der  $\hat{G}_1$ -Achse, d.h. ist  $w = (\hat{g}_w, \hat{e})$ , wo  $\hat{g}_w \in \hat{G}_1$ ,  $\hat{e}$  das neutrale Element von  $\hat{N}$  ist, dann ist  $\psi_w$  natürlich ein Charakter von  $G$  und daher gilt:

$$I^{\psi_w} = I_{\psi_w} = I_{\hat{g}_w}, \quad w = (\hat{g}_w, \hat{e}),$$

wo  $I_{\hat{g}}$  den Kern des Morphismus

$$f \mapsto \int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g} \rangle} \int_N f(gn) dn, \quad \hat{g} \in \hat{G}_1 \quad (10)$$

von  $L^1(G)$  auf  $\mathbb{C}$  bezeichnet. Für jedes  $\hat{g} \in \hat{G}_1$  ist  $I_{\hat{g}}$  ein maximales Ideal von  $L^1(G)$  und der Kern einer eindimensionalen, also irreduziblen Darstellung von  $L^1(G)$ : für  $\hat{g} \neq \hat{g}'$  in  $\hat{G}_1$  ist  $I_{\hat{g}} \neq I_{\hat{g}'}$ . Es gilt nun: Wenn die Wirkung  $\sigma$  (vgl. (2)) von  $G_1$  auf  $N$  die Kompressionseigenschaft (§5.3, Definition 1) hat, so sind die Ideale  $I_{\hat{g}}$ ,  $\hat{g} \in \hat{G}$ , bereits SÄMTLICHE Maximalideale von  $L^1(G)$  und jedes eigentliche Ideal von  $L^1(G)$  ist in einem Maximalideal enthalten.

2. Liegt  $w \in \hat{G}^\dagger$  nicht auf der  $\hat{G}_1$ -Achse, d.h. ist  $w = (\hat{g}_w, \hat{n}_w)$ ,  $\hat{n}_w \neq \hat{e}$ , so gilt, falls die Wirkung  $\hat{\sigma}$  von  $G_1$  auf die duale Gruppe  $\hat{N}$  (vgl. (5)) die Injektionsbedingung (§5.3, Definition 2) erfüllt:

a) Das Ideal  $I^{\psi_w}$  besteht aus allen Funktionen  $f$  in  $L^1(G)$ , deren Fouriertransformierte  $\hat{f}^\dagger$  (vgl. §5.4) auf  $\hat{G}_1 \times \overline{\text{Bahn}(\hat{n}_w)}$  verschwindet.

b)  $I^{\psi_w}$  ist der Kern einer IRREDUZIBLEN Darstellung von  $L^1(G)$ .

c) Falls weiters die Wirkung  $\sigma$  von  $G_1$  auf  $N$  die Kompressionseigenschaft hat, so besteht das Ideal  $I_{\psi_w}$  aus allen denjenigen Funktionen  $f$  in  $L^1(G)$ , deren Fouriertransformierte  $\hat{f}^\dagger$  auf  $\hat{G}_1 \times \overline{\text{Gr}(\text{Bahn}(\hat{n}_w))}$  verschwindet.<sup>7)</sup> Insbesondere gilt:

$$I^{\psi_w} = I_{\psi_w} \Leftrightarrow \overline{\text{Bahn}(\hat{n}_w)} \text{ ist eine Gruppe } [w = (\hat{g}_w, \hat{n}_w), \hat{n}_w \neq \hat{e}]. \quad (11)$$

**5.6. Beweis von Teil 1.** Jedem Ideal  $I \subset L^1(G)$  entspricht unter dem Isomorphismus (7) wieder ein Ideal  $I^\dagger \subset L^1(G^\dagger)$ , denn für die Abbildung  $f \mapsto f^\dagger$  gilt: Die Funktion  $gn \mapsto f(g'g n n')$  auf  $G$  geht über in die Funktion  $(g, n) \mapsto f^\dagger(g'g, n n')$  auf  $G^\dagger$  ( $g' \in G_1$ ,  $n' \in N$ ). Also folgt die Behauptung aus der Äquivalenz von Idealen und translationsinvarianten abgeschlossenen Unterräumen.

Ein Ideal  $I^\dagger \subset L^1(G^\dagger)$ , das einem Ideal  $I \subset L^1(G)$  entspricht, ist auch *invariant unter dem Automorphismus*  $(g, n) \mapsto (g, \sigma_c n)$  von  $G^\dagger$ , für jedes  $c \in G_1$ , wobei  $\sigma$  durch (2) definiert ist. Es ist nämlich  $cgnc^{-1} = gnc^{-1}$ , also gilt für die Abbildung  $f \mapsto f^\dagger$ :

$$\text{Die Funktion } gn \mapsto f(cgnc^{-1}) \text{ geht über in } (g, n) \mapsto f^\dagger(g, \sigma_c n). \quad (12)$$

Man beachte aber, daß hier keine vollständige Charakterisierung derjenigen Ideale  $I^\dagger$  von  $L^1(G^\dagger)$ , die Idealen  $I$  von  $L^1(G)$  entsprechen, gegeben wird, zum Unterschied von Gruppen  $G$  vom Heisenbergtyp (vgl. §1.7), doch genügt die hier aufgestellte *notwendige* Invarianzbedingung für die Ideale  $I^\dagger$  von  $L^1(G^\dagger)$  für den weiteren Beweis.

<sup>7)</sup>  $\overline{\text{Gr}}(A)$  bezeichnet die von  $A$  in  $\hat{N}$  erzeugte abgeschlossene Untergruppe.

Sei nun  $I$  ein eigentliches Ideal von  $L^1(G)$ ; dann ist  $I^\dagger$  ein eigentliches Ideal von  $L^1(G^\dagger)$ , also gibt es nach dem Satz von Wiener ein  $w = (\hat{g}_w, \hat{n}_w) \in \hat{G}^\dagger$  mit  $f^\dagger(\hat{g}_w, \hat{n}_w) = 0$  für alle  $f^\dagger \in I^\dagger$ , d.h. nach (8)

$$\int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g}_w \rangle} \int_N f(gn) \overline{\langle n, \hat{n}_w \rangle} dn = 0 \quad \text{für alle } f \in I.$$

Daher ist sogar für jedes  $c \in G_1$  (vgl. (12))

$$\int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g}_w \rangle} \int_N f(gcnc^{-1}) \overline{\langle n, \hat{n}_w \rangle} dn = 0 \quad \text{für alle } f \in I,$$

also weiter

$$\int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g}_w \rangle} \int_N f(gn) \overline{\langle c^{-1}nc, \hat{n}_w \rangle} dn = 0, \quad f \in I.$$

Da  $c \in G_1$  beliebig war, folgt wegen der vorausgesetzten Kompressionseigenschaft der Wirkung von  $G_1$  auf  $N$  sofort

$$\int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g}_w \rangle} \int_N f(gn) dn = 0 \quad \text{für alle } f \in I,$$

d.h.  $I \subset I_{\hat{g}_w}$  (vgl. (10)). Damit ist Teil 1 des Satzes bewiesen.<sup>8)</sup>

**5.7. Beweis von Teil 2a).** Für die durch (9) definierte unitäre Funktion  $\psi_w$  auf  $G$  ist  $H^{\psi_w}$  (vgl. §3.1) gerade die normale Untergruppe  $N$  von  $G$ , wenn die Wirkung  $\hat{\sigma}$  von  $G_1$  auf die duale Gruppe  $\hat{N}$  die Injektionsbedingung erfüllt. Daß  $N \subset H^{\psi_w}$  gilt, ist trivial. Sei nun umgekehrt  $x_o \in H^{\psi_w}$  und sei  $x_o = g_o n_o$  ( $g_o \in G_1, n_o \in N$ ); dann ist also auch  $g_o \in H^{\psi_w}$ . Die Relation

$$\psi_w(xg_o) = \psi_w(x) \psi_w(g_o) \quad \text{für alle } x \in G$$

reduziert sich im Falle (9), wenn man  $x = gn$  ( $g \in G_1, n \in N$ ) setzt, so daß  $xg_o = gg_o(g_o^{-1}ng_o)$  wird, auf

$$\langle g_o^{-1}ng_o, \hat{n}_w \rangle = \langle n, \hat{n}_w \rangle \quad \text{für alle } n \in N. \quad (13)$$

(13) bedeutet einfach  $\hat{\sigma}_{g_o} \hat{n}_w = \hat{n}_w$ , woraus wegen  $\hat{n}_w \neq \hat{e}$  nach der Injektionsbedingung für  $\hat{\sigma}$  folgt:  $g_o = e$ . Also gilt  $H^{\psi_w} \subset N$ , d.h.  $H^{\psi_w} = N$ .

---

<sup>8)</sup> Vgl. dazu den Beweis bei Müller-Römer [10]; durch eine andere Methode hat Müller-Römer [11, 12] dann eine weit größere Allgemeinheit erzielt.

$I^{\psi_w}$  besteht also hier gemäß (9) oben und §3.3 aus allen  $f \in L^1(G)$ , die folgender Bedingung genügen: Für jedes (feste)  $c \in G$  verschwindet die Funktion

$$g \mapsto \overline{\langle g, \hat{g}_w \rangle} \int_N \overline{\langle n, \hat{n}_w \rangle} f(gnc^{-1}) dn, \quad (14)$$

die auf  $G_1$  (fast überall definiert und) integrierbar ist, fast überall auf  $G_1$ . Hier kann man den Faktor  $\langle g, \hat{g}_w \rangle$  natürlich weglassen und  $c$  auf  $G_1$  beschränken (denn wenn (14) für  $c_0$  fast überall verschwindet, dann gilt dies auch für  $c_0 n_0, n_0 \in N$ ); die Bedingung ist also äquivalent mit folgender: Für jedes (feste)  $c \in G_1$  gilt

$$\int_N \overline{\langle n, \hat{n}_w \rangle} f(gcnc^{-1}) dn = 0 \quad \text{fast überall für } g \in G_1$$

Dabei haben wir links noch  $gc$  statt  $g$  geschrieben, was für  $c \in G_1$  offensichtlich erlaubt ist. Die obige Bedingung ist wiederum äquivalent mit folgender: Für jedes (feste)  $c \in G_1$  ist

$$\int_{G_1} dg \overline{\langle g, \hat{g} \rangle} \int_N \overline{\langle n, \hat{n}_w \rangle} f(gcnc^{-1}) dn = 0 \quad \text{für alle } \hat{g} \in \hat{G}_1.$$

Substituiert man hier  $n \mapsto c^{-1}nc$ , so bedeutet dies also (vgl. (5), (6)):

$$\hat{f}^\dagger(\hat{g}, \hat{\sigma}_c \hat{n}_w) = 0 \quad \text{für alle } \hat{g} \in \hat{G}_1 \quad \text{und jedes } c \in G_1. \quad (15)$$

Wegen der Stetigkeit von  $\hat{f}^\dagger$  erhält man dann die Behauptung 2a) (§5.5), denn aus (15) folgt ja umgekehrt, daß die Funktion (14) fast überall auf  $G_1$  verschwindet.

**5.8. Beweis von Teil 2b).** Daß im vorliegenden Fall die Darstellung §3.4 (14) von  $G$  in  $L^2(G/H)$  für  $H=N$  irreduzibel ist, kann man ganz einfach zeigen.<sup>9)</sup>

Wir betrachten die zur Darstellung §3.4 (14) adjungierte Darstellung  $U_x^* = U_{x^{-1}}$  und erhalten, indem wir  $x = g'n', y = gn$  mit  $g', g$  in  $G_1$  und  $n', n$  in  $N$  setzen und mit  $\pi_N$  die Projektion  $gn \mapsto g$  von  $G$  auf  $G_1 \cong G/N$  bezeichnen,

$$U_{g'n'}^* F(gn) = F(g'n'gn) \psi_w(g'n'gn) / \psi_w(gn), \quad F \in L^2(G_1) \circ \pi_N. \quad (16)$$

Es ist also hier  $F = \hat{F} \circ \pi_N, \hat{F} \in L^2(G_1)$ . Schreibt man in (16)  $g'n'gn = g'g(g^{-1}n'g)n$  und setzt für  $\psi_w$  den Ausdruck (9) ein, so kann man die Darstellung direkt in  $L^2(G_1)$

<sup>9)</sup> Im „separablen“ Fall enthält bekanntlich die Mackeysche Theorie viel weitergehende Ergebnisse; vgl. z.B. die schöne, einführende Übersicht von Mackey [9], insbesondere §8. In dieser Arbeit ist auch die entsprechende Literatur angegeben; der folgende Beweis ist von dieser Literatur unabhängig.

beschreiben:

$$U_{g',n}^* \dot{F}(g) = \dot{F}(g'g) \langle g', \hat{g}_w \rangle \langle g^{-1}n'g, \hat{n}_w \rangle.$$

Die Irreduzibilität ergibt sich nun aus dem folgenden Lemma.

**5.9. LEMMA.** Sei  $\dot{F} \in L^2(G_1)$ ,  $\hat{n}_w$  in  $\hat{N}$ ,  $\hat{n}_w$  nicht das neutrale Element von  $\hat{N}$ ; sei  $\hat{\sigma}$  die durch (5) definierte Wirkung von  $G_1$  auf  $\hat{N}$ . Für  $g' \in G_1, n' \in N$  sei  $A_{g',n} \dot{F}$  in  $L^2(G_1)$  definiert durch

$$A_{g',n} \dot{F}(g) = \dot{F}(g'g) \langle n', \hat{\sigma}_g \hat{n}_w \rangle, \quad g \in G_1.$$

Wenn  $\hat{\sigma}$  die Injektionsbedingung (§5.3, Definition 2) erfüllt, so spannen die Funktionen  $A_{g',n} \dot{F}(g' \in G_1, n' \in N)$  den ganzen Raum  $L^2(G_1)$  auf, sofern  $\dot{F} \neq 0$  ist.

*Beweis.* Es ist zu zeigen: Für  $\dot{\Phi} \in L^2(G_1)$  folgt aus der Bedingung

$$\int_{G_1} \dot{F}(g'g) \langle n', \hat{\sigma}_g \hat{n}_w \rangle \overline{\dot{\Phi}(g)} dg = 0 \quad \text{für alle } g' \in G_1, n' \in N, \quad (17)$$

daß  $\dot{\Phi} = 0$  in  $L^2(G_1)$  gilt.

Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß wir ein beschränktes Maß  $\mu$  auf  $\hat{N}$  erhalten, indem wir

$$\mu(f') = \int_{G_1} f'(\hat{\sigma}_g \hat{n}_w) \dot{F}(g'g) \overline{\dot{\Phi}(g)} dg, \quad f' \in \mathcal{X}(\hat{N}) \quad (18)$$

setzen; es ist ja  $g \mapsto \hat{\sigma}_g \hat{n}_w$  eine stetige Abbildung von  $G_1$  in  $\hat{N}$ . Das Maß  $\mu$  hängt natürlich auch von  $g' \in G_1$  (und von  $\dot{F}$  und  $\dot{\Phi}$  in  $L^2(G_1)$ ) ab.

Sei jetzt  $K$  eine beliebige kompakte Menge in  $G_1$  und  $K'$  das Bild von  $K$  bei dieser Abbildung; sei  $\varphi'$  die charakteristische Funktion der kompakten Menge  $K'$  auf  $\hat{N}$  und  $\varphi_K$  diejenige von  $K$  auf  $G_1$ . Die Funktion  $\varphi'$  ist also  $\mu$ -integrierbar. Weiter gilt auf Grund der Injektionsbedingung:

$$\varphi'(\hat{\sigma}_g \hat{n}_w) = \varphi_K(g) \quad \text{für alle } g \in G_1.$$

Also gilt auch (vgl. (18))

$$\mu(\varphi') = \int_{G_1} \varphi_K(g) \dot{F}(g'g) \overline{\dot{\Phi}(g)} dg. \quad (19)$$

Die Bedingung (17) besagt nun einfach, für festes  $g' \in G_1$ :

$$\int_{\hat{N}} \langle n', \hat{n} \rangle d\mu(\hat{n}) = 0 \quad \text{für alle } n' \in N,$$

d.h. für die Fouriertransformierte  $\hat{\mu}$  gilt:  $\hat{\mu}=0$ ; also ist  $\mu=0$ . Daher gilt nach (19) auch für jede kompakte Menge  $K \subset G_1$

$$\int_{G_1} \varphi_K(g) \dot{F}(g'g) \overline{\dot{\Phi}(g)} dg = 0, \quad g' \in G_1.$$

Daraus folgt weiter nach der Integrationstheorie, daß für jedes  $g' \in G_1$  die Funktion

$$g \mapsto \dot{F}(g'g) \overline{\dot{\Phi}(g)}$$

fast überall auf  $G_1$  verschwindet; man beachte noch, daß diese Funktion in  $L^1(G_1)$  liegt.

Da nun das Element  $g' \in G_1$  beliebig war, folgt weiter:  $\dot{\Phi}=0$  in  $L^2(G_1)$  (vgl. §4.4). Damit ist das Lemma bewiesen und der Beweis von Teil 2b) des Satzes fertig.

**5.10. Beweis von Teil 2c).** Wir wissen bereits, daß  $H^{\psi_w} = N$  ist (§5.7), also gilt auch  $H_{\psi_w} \subset N$ , nach der Definition von  $H_{\psi_w}$  (§3.1). Nun besteht für  $\xi \in H_{\psi_w}$  auch die Relation  $\psi_w(\xi x) = \psi_w(\xi) \psi_w(x)$ , für alle  $x \in G$ ; im vorliegenden Falle bedeutet dies – nach der Definition (9) von  $\psi_w$  –, daß für  $\xi = n_o \in H_{\psi_w}$  gilt:

$$\langle g^{-1}n_o g, \hat{n}_w \rangle = \langle n_o, \hat{n}_w \rangle \quad \text{für alle } g \in G_1. \quad (20)$$

Man beachte den Unterschied gegenüber (13)!

Falls nun die Wirkung  $\sigma$  von  $G_1$  auf  $N$  die Kompressionseigenschaft hat, so folgt aus (20)

$$\langle n_o, \hat{n}_w \rangle = 1 \quad \text{für alle } n_o \in H_{\psi_w}. \quad (21)$$

Sei nun

$$H_w = \{n \mid n \in N, \langle n, \hat{n}_w \rangle = 1\}. \quad (22)$$

$H_w$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $N$ . Relation (21) bedeutet also:  $H_{\psi_w} \subset H_w$ ; definitionsgemäß ist weiters  $H_{\psi_w}$  normal in  $G$ . Es gilt nun einfach:  $H_{\psi_w}$  ist die größte in  $H_w$  enthaltene normale Untergruppe von  $G$ , denn für jedes Element  $n$  dieser letzteren Untergruppe gilt trivialerweise (20), also ist sie in  $\tilde{H}^{\psi_w}$  (vgl. §3.1) enthalten, andererseits liegt sie in  $H^{\psi_w} = N$ . Wir haben also in der Bezeichnung (2)

$$H_{\psi_w} = \bigcap_{g \in G_1} \sigma_g H_w. \quad (23)$$

Jetzt können wir auch das Ideal  $I_{\psi_w} = \psi_w J^1(G, H_{\psi_w})$  (vgl. §3.3) bestimmen.

Zunächst gilt – analog wie in §1.12 (32) –

$$J^1(G, H_{\psi_w}) = J^1(G^\dagger, H_{\psi_w}), \quad (24)$$

wobei  $H_{\psi_w}$  einmal als Untergruppe von  $G$ , das andere Mal als Untergruppe von  $G^\dagger$  aufgefaßt wird; beide Seiten von (24) sind ja die abgeschlossene Hülle – im Banachraum  $L^1(G)$  – aller  $f \in \mathcal{K}(G)$ , für die

$$\int_{H_{\psi_w}} f(gnh) dh = 0 \quad \text{für alle } g \in G_1, n \in N,$$

gilt (vgl. §5.4). Es ist also  $J^1(G, H)$  die Menge aller  $f \in L^1(G)$ , für die  $f^\dagger$  auf der orthogonalen Gruppe von  $H_{\psi_w}$  in  $\hat{G}^\dagger$  verschwindet (vgl. dazu [14, Kap. 4, §4.3]). Diese orthogonale Untergruppe ist nun, da ja  $G^\dagger = G_1 \times N$  ist und  $H_{\psi_w}$  in  $N$  liegt, einfach

$$\hat{G}_1 \times H_{\psi_w}^\perp, \quad (25)$$

wobei  $H_{\psi_w}^\perp$  die zu  $H_{\psi_w} \subset N$  orthogonale Untergruppe von  $\hat{N}$  bedeutet. Da nun  $\psi_w$  nach (9) gerade der durch  $w$  definierte Charakter von  $G^\dagger$  ist und  $w$  in der Untergruppe (25) enthalten ist (vgl. (21)), gilt weiter

$$\psi_w J^1(G^\dagger, H_{\psi_w}) = J^1(G^\dagger, H_{\psi_w}). \quad (26)$$

Also haben wir:

$$I_{\psi_w} = \{f \mid f \in L^1(G), f^\dagger(\hat{G}_1 \times H_{\psi_w}^\perp) = 0\}.$$

Die Untergruppe  $H_{\psi_w}^\perp$  von  $\hat{N}$  ist nun nach (23) einfach die von sämtlichen Gruppen  $(\sigma_g H_w)^\perp$ ,  $g \in G_1$ , erzeugte abgeschlossene Untergruppe. Nun ist

$$(\sigma_g H_w)^\perp = \hat{\sigma}_{g^{-1}}(H_w^\perp).$$

Hier gilt (in der Bezeichnung von Fußnote<sup>7</sup>)  $H_w^\perp = \overline{Gr}(\hat{n}_w)$ , wie man sofort gemäß (22) nachprüft. Die von sämtlichen Untergruppen  $\hat{\sigma}_{g^{-1}}(H_w^\perp)$ ,  $g \in G_1$ , erzeugte abgeschlossene Untergruppe von  $\hat{N}$  ist nun gerade  $\overline{Gr}(\text{Bahn}(\hat{n}_w))$ , wie man ebenfalls sofort nachprüft (man beachte dabei, daß letztere Untergruppe  $\hat{\sigma}_g$ -invariant ist, für jedes  $g \in G_1$ ). Die Behauptung (11) folgt unmittelbar. Also ist auch 2c) bewiesen. *Damit ist der Beweis von Satz 2 (§5.5) beendet.*

**5.11.** Zur Veranschaulichung von Satz 2 sei auf die Beispiele in §5.2 verwiesen; insbesondere kann man für (11) das Beispiel (i) in §5.2 heranziehen.

Weiter ist ein Vergleich der Sätze 1 (§4) und 2 – und ihrer Beweise – wohl empfehlenswert. Man beachte noch, daß im Falle von Satz 2 die Quotientenalgebra  $L^1(G)/I_{\psi_w}$  nichts Neues liefert, weil ja hier  $I_{\psi_w} = J^1(G, H_{\psi_w})$  ist (vgl. (24), (26)); der triviale Multiplikator  $\kappa_{\psi_w}$  für  $G$  ist hier von einem *trivialen* Multiplikator abgeleitet, zum Unterschied gegenüber den Gruppen vom Heisenbergtyp (§§2.8, 3.6).

Bezüglich der Ideale  $I^{\psi_w}$  sei darauf hingewiesen, daß sich der Durchschnitt von  $I^{\psi_w}$  mit  $\mathcal{K}(G)$  auf die konstante Funktion Null reduzieren kann (auch für  $I^{\psi_w} \neq (0)$ ), wie man etwa im Falle von §5.2, Beispiel (iii), für  $N = \mathbf{R}$ ,  $G_1 = (\mathbf{R}^*)^2$ , sofort zeigt.

**5.12.** Aus Teil 2a) von Satz 2 ergibt sich übrigens in Verbindung mit Teil 1: Wenn für  $\sigma$  die Kompressionseigenschaft und für  $\hat{\sigma}$  die Injektionsbedingung gilt, so ist  $I^{\psi_w}$  in *sämtlichen* Maximalidealen von  $L^1(G)$  enthalten, sofern  $w$  nicht auf der  $\hat{G}_1$ -Achse liegt. Dies steht im Kontrast zum Falle *kompakter* Gruppen, wo *der Kern einer irreduziblen Darstellung von  $L^1(G)$  stets ein Maximalideal* ist.<sup>10)</sup>

#### LITERATUR

- [1] AUSLANDER, L. und MOORE, C. C.: *Unitary representations of solvable Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc. Nr. 62 (1966).
- [2] CARTIER, P.: *Quantum mechanical commutation relations*, Algebraic groups and discontinuous subgroups, Symposia in Pure Mathematics, vol. IX, p. 361–383 (Amer. Math. Soc., 1966).
- [3] EYMARD, P.: *Moyennes invariantes et représentations unitaires*. Lecture Notes in Mathematics Nr. 300 (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972).
- [4] GROSSER, S., MOSAK, R., und MOSKOWITZ, M.: *Duality and harmonic analysis on central topological groups*, I, II, Indag. Math. 35 (1973), 65–67, 78–91.
- [5] LEPTIN, H.: *On group algebras of nilpotent Lie groups*, Studia Math. 47 (1973), 37–49.
- [6] —, *Harmonische Analyse auf gewissen nilpotenten Lieschen Gruppen*, Studia Math. 48 (1973), 201–205.
- [7] MACKEY, G. W.: *Functions on locally compact groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 385–412.
- [8] —, *Unitary representations of group extensions*, I, Acta Math. 99 (1958), 265–311.
- [9] —, *Induced representations of locally compact groups and applications*, Functional Analysis and Related Fields, p. 132–166 (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970).
- [10] MÜLLER-RÖMER, P.: *A tauberian group algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 163–166.
- [11] —, *Kontrahierende Erweiterungen und kontrahierbare Gruppen*, (Dissertation, Universität, Bielefeld, 1973).
- [12] —, *Contracting extensions and contractible groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 1264–1269.
- [13] PUKANSZKY, L.: *Leçons sur les représentations des groupes*, (Dunod, Paris, 1967).
- [14] REITER, H.: *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, (Oxford University Press, 1968).
- [15] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra*, Zweiter Teil (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967).

---

<sup>10)</sup> Für Gruppen vom Heisenbergtyp gilt das auch. In den Fällen, wo man die irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen explizit bestimmt hat, ist es direkt ersichtlich, ein allgemeiner Beweis steht aber noch aus; vgl. dazu die Ergebnisse von Leptin [6, Satz 2].

- [16] WEIL, A.: *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. *III* (1964), 143–211.  
[17] WEYL, H.: *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967; unveränderter Nachdruck der 2. Aufl., Leipzig, 1931).

*Mathematisches Institut der Universität  
A-1090 Wien, Strudlhofgasse 4  
Österreich*

Eingegangen den 29. November 1973