Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel

Autor(en): **Vust, Th.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38001

Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel

par TH. VUST

Soit G un groupe algébrique réductif opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. On note m_M le maximum des dimensions des orbites de G dans M. Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble des points de M dont l'orbite est de dimension m_M est ouvert. On sait d'autre part (cf. [7], [4]) qu'il existe un type principal pour les orbites de G dans M, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert de M, stable par G, formé d'orbites G-isomorphes. En particulier, les orbites de type principal sont de dimension m_M.

Dans le cas où G est simple, A. G. Élashvili a donné dans [3] la liste complète des représentations rationnelles $G \to GL(M)$ pour lesquelles m_M est strictement inférieure à la dimension de G. De plus, pour chacune de ces représentations, il décrit l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du sous-groupe d'isotropie d'un point d'une orbite de type principal. L'examen des tables de [3] fait apparaître certaines propriétés de la structure des algèbres $\mathfrak{h}$. En particulier, notant $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, on a le résultat que voici, relatif au radical de $\mathfrak{h}$:

THÉORÈME 3. *On suppose G simple. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe d'isotropie d'un point d'une orbite de type principal.*

(i) *Si $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ est soit semi-simple, soit commutative.*

(ii) *Si $\mathfrak{h}$ n'est pas réductive dans $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ est produit semi-direct d'une sous-algèbre semi-simple par son radical nilpotent.*

Le but de ce travail est de donner une démonstration «à priori» du théorème 3. L'auteur tient enfin à préciser qu'une démonstration due à J. L. Koszul du point (i) a été utilisée à la proposition 2, §2.

§1. Résultats préliminaires

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit H un groupe algébrique affine qui opère (morphiquement) dans une variété affine X. On note H_x le sous-groupe d'isotropie et $H(x)$ l'orbite du point $x \in X$; $T_xH(x) \subset T_xX$ est alors l'espace tangent à $H(x)$ en x. On désigne par $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X, par $s \cdot f$ l'image de $f \in k[X]$ par l'automorphisme de $k[X]$ associé à $s \in H$ et par $k[X]^H$ la sous-algèbre des invariants de $k[X]$.

Soit K un sous-groupe réductif de H; on suppose que K opère dans une variété affine Y. On considère alors l'opération de K dans $H \times Y$ définie par $t(s, y) =$

$(st^{-1}, t\cdot y)$. On définit la variété affine $H\times_K Y$ par $k[H\times_K Y]=k[H\times Y]^K$ (qui est une algèbre de type fini puisque K est réductif). L'opération à gauche de H sur le premier facteur de $H\times Y$ commute à l'opération de K et induit donc une opération de H dans $H\times_K Y$. Ecrivant $\overline{(s, y)}$ l'image de $(s, y)\in H\times Y$ dans $H\times_K Y$, il n'est pas difficile de vérifier que $H_{\overline{(s,y)}}=sK_y s^{-1}$.

De manière générale, on note H^0 la composante connexe de l'élément neutre e de H et DH le sous-groupe dérivé de H.

Dans la suite de ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique réductif opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie. Soit $x\in M$; en vertu d'un théorème de Matsushima (cf. [4]), pour que $G(x)$ soit affine, il faut et il suffit G_x soit réductif. On note enfin m_M (resp. a_M) le maximum des dimensions des orbites (resp. des orbites affines) de G dans M. Si $m_M=\dim M$, c'est-à-dire si G a une orbite ouverte dans M, on dit que G opère presque transitivement dans M ou que M est un G-module presque homogène.

LEMME 1. *Soit $x\in M$ tel que G_x est réductif de dimension* $\dim G-a_M$. *Le G_x^0-module $T_xM\simeq M$ se décompose alors en*

$$M=T_xG(x)\oplus T\oplus P$$

où l'opération de G_x^0 dans T est triviale et l'opération induite de DG_x^0 dans P est presque transitive.

Preuve. Le sous-groupe G_x étant réductif, on peut trouver un supplémentaire G_x-stable N de $T_xG(x)$ dans $T_xM\simeq M$. On considère alors la variété affine $G\times_{G_x}N=M'$ et le morphisme $\varphi: M'\to M$ défini par $\varphi(s, y)=s(x+y)$. Ce morphisme commute aux opérations de G dans M' et M, et est étale au voisinage de $\overline{(e, 0)}$ (cf. [7], [5]). Il en résulte que, pour tout y dans un voisinage de l'origine dans N, on a

$$G_{x+y}^0=G_{\overline{(e,y)}}^0=(G_x)_y^0\,.$$

L'hypothèse faite sur x et le fait que $(G_x)_{\lambda y}=(G_x)_y$ pour tout $\lambda\in k-(0)$ et $y\in N$, impliquent que, pour tout $y\in N$, $(G_x)_y$ est réductif si et seulement si $(G_x)_y^0=G_x^0$. Cela signifie que l'origine est la seule orbite affine de G_x^0 dans le supplémentaire G_x^0-stable P de $(N)^{G_x^0}=T$; l'origine est donc aussi la seule orbite affine de DG_x^0 dans P. Il résulte alors du corollaire 2 de [5] que DG_x^0 opère presque transitivement dans P.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\varrho: \mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(M)$ la représentation de $\mathfrak{g}$ correspondant à l'opération de G dans M. Pour tout $x\in M$, on note $\mathfrak{g}_x$ (resp. $D\mathfrak{g}_x$) l'algèbre de Lie du groupe G_x (resp. DG_x). Enfin, pour tout endomorphisme a d'un espace vectoriel N de dimension finie, on note $\mathrm{Tr}_N(a)$ la trace de a.

LEMME 2. *On suppose que G est semi-simple de dimension* >0 *et que G opère* *presque transitivement dans M. Il existe alors un élément $a \in \mathfrak{g}$ vérifiant les deux conditions suivantes:*

(i) *a est semi-simple non nul et les valeurs propres de $ad(a)$ sont rationnelles,*

(ii) $\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) < \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2)$.

Preuve. a) Soit $x \in M$ tel que $G(x)$ est ouvert dans M. L'ensemble E des éléments $b \in \mathfrak{g}$ vérifiant $\varrho(b)x = x$ est non vide et contient la composante semi-simple de ses éléments. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h} \cap E \neq \emptyset$, Λ l'ensemble des poids de ϱ relatifs à $\mathfrak{h}$ et $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ la décomposition de x suivant les sous-espaces de poids de M. La condition $b \in \mathfrak{h} \cap E$ est alors équivalente à $\lambda(b) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $x_\lambda \neq 0$. Il est maintenant clair qu'il existe un élément $a \in \mathfrak{h} \cap E$ tel que les valeurs propres de $\varrho(a)$, et par suite celles de $ad(a)$, sont rationnelles; autrement dit, l'ensemble E' des éléments de E vérifiant (i) est non vide.

b) Soit $a \in E'$ et N un supplémentaire stable par $ad(a)$ de $\mathfrak{g}_x$ dans $\mathfrak{g}$. L'application linéaire $\psi: N \to M$ définie par $\psi(b) = \varrho(b)x$ est bijective et on a

$$\varrho[a, b]x = \varrho(a)\,\varrho(b)\,x - \varrho(b)\,\varrho(a)\,x = \varrho(a)\,\varrho(b)\,x - \varrho(b)\,x$$

pour tout $b \in N$. Ainsi, si $t_1, \ldots, t_n$ sont les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de l'endomorphisme $ad(a)$ de N, les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de $\varrho(a)$ sont $1 + t_1, \ldots, 1 + t_n$. Il en résulte que

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \dim M + 2Tr_N(ad(a)) + Tr_N(ad(a)^2)$$

d'où

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = -\dim M + \mathrm{Tr}_N(ad(a)^2)$$

puisque, $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, $\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)) = \dim M + Tr_N(ad(a)) = 0$. Comme d'autre part, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_N(ad(a)^2)$, l'élément a vérifie aussi (ii).

PROPOSITION 1. (cf. [1]) *On suppose que $m_M < \dim G$. Il existe alors un élément $a \in \mathfrak{g}$ vérifiant les deux conditions suivantes:*

(i) *a est semi-simple non nul et les valeurs propres de $ad(a)$ sont rationnelles,*

(ii) $\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) \leqslant \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2)$.

Preuve. Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G - a_M$. Le $\mathfrak{g}_x$-module M se décompose en

$$M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \oplus T \oplus P$$

comme au lemme 1, et l'hypothèse implique que $\mathfrak{g}_x \neq (0)$. Il convient alors de distinguer deux cas:

1) $D\mathfrak{g}_x = (0)$. Dans ce cas G_x^0 est un tore et par suite $\mathfrak{g}_x$ contient des éléments vérifiant la condition (i).

Pour tout élément $a \in \mathfrak{g}_x$ vérifiant (i), on a

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2)$$

puisque le fait que $D\mathfrak{g}_x = (0)$ implique que $P = (0)$; par conséquent,

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2).$$

2) $D\mathfrak{g}_x \neq (0)$. On prend dans ce cas un élément $a \in D\mathfrak{g}_x$ vérifiant les conditions du lemme 2 appliqué à la représentation de $D\mathfrak{g}_x$ dans P; cet élément a vérifie (i). De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + Tr_P(\varrho(a)^2)\\ &< \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_{D\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2)\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2),\end{aligned}$$

et a vérifie (ii).

§2. Le cas des groupes simples

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique simple opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie. Soit $\varrho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ la représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Du fait que $\mathfrak{g}$ est simple, résulte que les deux formes bilinéaires symétriques invariantes

$$(a, b) \to \mathrm{Tr}_M(\varrho(a)\,\varrho(b))$$

et

$$(a, b) \to \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)\,ad(b))$$

sont proportionnelles. Le facteur de proportionnalité $\mathfrak{l}(\varrho)$ défini par

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)\,\varrho(b)) = \mathfrak{l}(\varrho)\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)\,ad(b))$$

est en fait un nombre rationnel et s'appelle l'indice de ϱ (cf. [1]).

PROPOSITION 2. *Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension* $\dim G - a_M$. *Deux cas sont alors possibles:*

1) $\mathfrak{l}(\varrho) \neq 1$ *et $\mathfrak{g}_x$ est semi-simple.*

2) $\mathfrak{l}(\varrho) = 1$ *et $\mathfrak{g}_x$ est commutative.*

La preuve de la proposition se fait en plusieurs temps.

a) On considère la décomposition du $\mathfrak{g}_x$-module M donnée au lemme 1

$$M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \oplus T \oplus P.$$

On a alors, pour tout $a \in \mathfrak{g}_x$,

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2)$$

et

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2),$$

d'où, par définition de $\mathfrak{l}(\varrho)$,

$$(1 - \mathfrak{l}(\varrho))\,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) = \mathfrak{l}(\varrho)\,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) - \mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2). \tag{1}$$

b) Si $\mathfrak{l}(\varrho) = 1$, alors $P = (0)$ et $\mathfrak{g}_x$ est commutative. En effet (1) donne dans ce cas

$$\mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2) = Tr_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) \tag{2}$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_x$. Si P n'est pas réduit à (0), alors $D_{\mathfrak{g}_x}$ n'est pas réduit à (0) (lemme 1); le lemme 2 appliqué à la représentation de $D\mathfrak{g}_x$ dans P affirme alors l'existence dans $D\mathfrak{g}_x$ d'un élément a tel que

$$\mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2) < Tr_{D\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2),$$

ce qui contredit (2). On a donc $P = (0)$ et (2) signifie cette fois que $\mathfrak{g}_x$ est commutative.

c) Si $\mathfrak{g}_x$ possède un centre non trivial, alors $\mathfrak{l}(\varrho) = 1$.

En effet, la composante neutre du centre de G_x étant un tore, $\mathfrak{g}_x$ contient un élément central non nul b tel que les valeurs propres de $\varrho(b)$ sont rationnelles; pour un tel élément, on a en vertu de (1)

$$(1 - \mathfrak{l}(\varrho))\,\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(b)^2) = -\mathrm{Tr}_P(\varrho(b)^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

Etant donné que $\mathfrak{g}_x$ n'est pas réduit à (0), m_M est strictement inférieure à la dimension de G[1]), et par conséquent $(1 - \mathfrak{l}(\varrho))$ est positif (proposition 1). Il résulte donc de (3) que $\mathfrak{l}(\varrho) = 1$.

Il sera commode pour la fin de ce paragraphe d'introduire la notation que voici.

On suppose que G opère dans une variété affine lisse et irréductible X. On sait qu'il existe alors un type principal pour les orbites de G dans X (cf. [7], [4]); cela signifie qu'il existe un ouvert de X, stable par G et formé d'orbites G-isomorphes. Soit $x \in M$ un point d'une orbite de type principal; on note $\mathfrak{h}(G, X)$ (ou $\mathfrak{h}(X)$ si aucune confusion n'en résulte) la classe de conjugaison dans $\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_x$.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}(M)$.

1) *Si* $\mathfrak{l}(\varrho) \neq 1$, *alors il existe* $x \in M$ *et un sous* G_x^0*-module* P *du* G_x^0*-module* M *tels que:*

a) G_x^0 *est semi-simple et opère presque transitivement dans* P*;*

---

[1]) Sinon le sous-groupe d'isotropie d'un point en position générale dans M serait fini, donc réductif; on aurait ainsi $m_M = a_M = \dim G$, d'où $\mathfrak{g}_x = (0)$.

b) $\mathfrak{h}$ *est conjuguée dans* $\mathfrak{g}$ *d'un élément de* $\mathfrak{h}(P)$.

2) *Si* $\mathfrak{l}(\varrho)=1$, *alors* $\mathfrak{h}$ *est commutative et réductive dans* $\mathfrak{g}$.

Preuve. Soit $x\in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G-a_M$. Soit $N\subset T_xM\simeq M$ un supplémentaire G_x-stable de $T_xG(x)$. Le G-morphisme $\varphi: G\times_{G_x}N\to M$ défini par $\varphi(\overline{(s,y)})=s(x+y)$ étant étale au voisinage de $\overline{(e,o)}$, $\mathfrak{h}(G\times_{G_x}N)$ et $\mathfrak{h}(M)$ coïncident. Comme $G_{\overline{(s,y)}}=s(G_x)_y\,s^{-1}$ pour tout $\overline{(s,y)}\in G\times_{G_x}N$, $\mathfrak{h}(M)$ admet un représentant dans $\mathfrak{h}(G_x, N)=\mathfrak{h}(G_x^0, N)$. On considère la décomposition du G_x^0-module N en $N=T\oplus P$ comme au lemme 1. On a $\mathfrak{h}(G_x^0, N)=\mathfrak{h}(G_x^0, P)$ puisque G_x^0 opère trivialement dans T. Sachant que P est un DG_x^0-module presque homogène, les affirmations du théorème sont alors des conséquences faciles de ces remarques et de la proposition 2.

Remarques. 1) Dans le cas 1) du théorème 1, $\mathfrak{h}$ n'est réductive dans $\mathfrak{g}$ que si $P=(0)$ (cf. proposition 3 ci-dessous). On voit donc que, pour l'ensemble des G-modules M tels que $\mathfrak{h}(M)\neq\{(0)\}$, la condition $\mathfrak{l}(\varrho)=1$ est nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{h}(M)$ soit formée de sous-algèbres commutatives réductives dans $\mathfrak{g}$; ce résultat est démontré dans [3].

2) Dans le cas 2) du théorème 1, $\mathfrak{h}$ n'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ que si ϱ est la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Soit en effet $x\in M$ tel que $\mathfrak{g}_x$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et appartient à $\mathfrak{h}(M)$. On a alors $a_M=m_M=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_x$. Le $\mathfrak{g}_x$-module M se décomposant donc en $M=\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x\oplus T$ suivant le lemme 1, on voit que les poids relatifs à $\mathfrak{g}_x$ de la représentation ϱ sont 0 et les racines de $\mathfrak{g}$ relatives à $\mathfrak{g}_x$, c'est-à-dire que ϱ est en fait la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

3) Il résulte immédiatement de la proposition 1 que si $\mathfrak{l}(\varrho)>1$, alors $\mathfrak{h}(M)=\{(0)\}$. Il peut arriver que $\mathfrak{l}(\varrho)\leqslant 1$ et que $\mathfrak{h}(M)=\{(0)\}$: par exemple, si $M_p=\oplus^p M_1$ où M_1 est le $SL(n)$-module usuel de dimension n et si ϱ_p est la représentation correspondante, on a $\mathfrak{l}(\varrho_p)=p/2n$ et $\mathfrak{h}(M_p)=\{(0)\}$ pour $n\leqslant p$. Cependant, si M est un G-module irréductible, pour que $\mathfrak{h}(M)=\{(0)\}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{l}(\varrho)>1$ (cf. [1]).

§3. Le cas des modules presque homogènes

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique semi-simple connexe et M un G-module rationnel de dimension finie presque homogène et non réduit à (0). On note x un point de M dont l'orbite $G(x)$ est ouverte dans M.

Soit X une variété affine; par dimension de X, on entend le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X. Si X est irréductible et F est un fermé de X, on dit que F est de codimension p dans X si $\dim F=\dim X-p$.

PROPOSITION 3. (i) $M-G(x)$ *est un fermé de codimension* >1 *dans* M.

(ii) $G(x)$ *n'est pas affine.*

(iii) G_x *n'est pas réductif.*

Preuve. Les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes en vertu d'un théorème de Matsushima (cf. [4]); (i) implique (ii) puisque le complémentaire d'un ouvert affine de M, s'il n'est pas vide, est toujours de codimension 1 dans M; enfin (i) résulte de [5] lemme 4.

Remarque. L'affirmation (iii) de la proposition 3 est démontrée dans [6].

PROPOSITION 4. *Le groupe G_x est connexe.*

Preuve. Le morphisme canonique $p: G/G_x^0 \to G/G_x$ est un revêtement étale connexe de la variété G/G_x qui est isomorphe à la variété $G(x) \subset M$. Le fermé $M - G(x)$ étant de codimension > 1 dans M (proposition 3), on sait (cf. [8] exposé X) qu'il existe une équivalence entre la catégorie des revêtements étales de G/G_x et celle des revêtements étales de M. Le morphisme p est ainsi un isomorphisme et par suite $G_x = G_x^0$.

LEMME 3. *Soit H un groupe algébrique affine opérant dans deux variétés affines irréductibles X et Y. On fait opérer H dans $Y \times X$ par le produit des actions de H dans Y et X. On suppose de plus qu'il existe un point $x \in X$ dont l'orbite $H(x)$ est ouverte dans X. Alors, pour tout fermé G_x-stable Z de Y, on a:*

(i) $\overline{H(Z \times \{x\})} \cap (Y \times \{x\}) = Z \times \{x\}$;

(ii) *si Z est de codimension p dans Y, $\overline{H(Z \times \{x\})}$ est de codimension p dans $Y \times X$.*

Preuve. Soit pr_2 la projection de $Y \times X$ sur X; on vérifie facilement que pr_2: $H(Z \times \{x\}) \to H(x)$ est un fibré localement trivial (au sens étale) de fibre type Z, c'est-à-dire qu'il existe une variété U et un morphisme $U \to H(x)$ étale et surjectif tel que $U \times (Z \times \{x\}) \simeq U \times_{H(x)} H(Z \times \{x\})$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& U \times (Z \times \{x\}) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[rr] & & H(Z \times \{x\}) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
U \arrow[rr] & & H(x) & \\
& U \times (Y \times \{x\}) \arrow[ul] \arrow[rr] & & H(Y \times \{x\}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des morphismes étales et surjectifs, et où les variétés $U \times (Z \times \{x\})$ et $U \times (Y \times \{x\})$ s'identifient aux produits fibrés correspondants. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\dim H(Z \times \{x\}) &= \dim U + \dim Z = \dim H(x) + \dim Z \\ &= \dim X + \dim Z\end{aligned}$$

et que $H(Z \times \{x\})$ est fermé dans $H(Y \times \{x\})$. Les affirmations du lemme sont dès lors claires.

PROPOSITION 5. *Le groupe des caractères de G_x est trivial.*

Preuve. Soit χ un caractère de G_x; on sait qu'il existe un G-module rationnel N de dimension finie et une forme linéaire f sur N tels que $s \cdot f = \chi(s) f$ pour tout $s \in G_x$ (cf. [2]). On note Z l'hyperplan de N annulé par f et on fait opérer G dans $N \times M$ par le produit des actions de G dans N et M. On considère alors $\overline{G(Z \times \{x\})} \subset N \times M$; $\overline{G(Z \times \{x\})}$ est un fermé irréductible de codimension 1 dans $N \times M$, stable par G et tel que $\overline{G(Z \times \{x\})} \cap N \times \{x\} = Z \times \{x\}$ (lemme 3). L'idéal de $\overline{G(Z \times \{x\})}$ est principal et est engendré par une fonction polynomiale G-invariante a sur $N \times M$ (puisque G est semi-simple et connexe); de plus, la restriction b de a à $N \times \{x\}$ est G_x-invariante et s'annule exactement sur $Z \times \{x\}$. Il en résulte qu'il existe un entier n et une constante $\lambda \neq 0$ tels que $b = \lambda (f_x)^n$, où f_x est la fonction sur $N \times \{x\}$ correspondant à f. On a alors pour tout $s \in G_x$

$$s \cdot b = \lambda (s \cdot f_x)^n$$

d'où

$$b = \lambda (f_x)^n = \lambda (\chi(s))^n (f_x)^n.$$

Ainsi $(\chi)^n = 1$; sachant que G_x est connexe (proposition 4) on a bien $\chi = 1$.

THÉORÈME 2. *Le sous-groupe d'isotropie G_x d'un point x de l'orbite ouverte de G dans M est un groupe non réductif connexe produit semi-direct d'un sous-groupe semi-simple connexe par son radical unipotent.*

Preuve. Les propositions 3 et 4 affirment que G_x est non réductif et connexe. On condidère alors le groupe G_x/R où R est le radical unipotent de G_x; G_x/R est un groupe réductif connexe dont le groupe des caractères est isomorphe au groupe des caractères de G_x qui est trivial (proposition 5). Il en résulte facilement que G_x/R est semi-simple, ce qui achève la démonstration.

Remarques. 1) Si G opère presque transitivement et non transitivement dans une variété affine X vérifiant les deux conditions

(i) $k[X]$ est un anneau factoriel,

(ii) tout revêtement étale connexe de X est trivial,

alors les affirmations du théorème 2 sont encore visiblement vraies.

2) Le radical unipotent de G_x n'est pas nécessairement commutatif, comme le montre l'exemple du $Sp(n)$-module usuel de dimension $2n$.

§4. Démonstration du Théorème 3

Le théorème 3 est une conséquence des théorèmes 1 et 2: le théorème 1 donne le résultat lorsque l'indice de la représentation est égal à 1, et transforme le problème en le problème analogue pour les modules presque homogènes lorsque l'indice est différent de 1, le groupe étant cette fois semi-simple; le théorème 2 fournit l'affirmation dans ce dernier cas.

Remarque. Soit M_1 le $SL(n)$-module usuel de dimension n. L'exemple du $SL(n) \times SL(n)$-module $(M_1 \otimes k) \oplus (k \otimes \mathfrak{sl}(n))$ (où $SL(n)$ opère dans $\mathfrak{sl}(n)$ par la représentation adjointe) et d'autres exemples du même type, montrent que le théorème 3 ne s'étend pas tel quel au cas des groupes semi-simples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREEV, E. M., VINBERG, E. B., et ÉLASHVILI, A. G., *Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen *1* (1967), 3–7; English transl. Functional Anal. Appl. *1* (1967), 257–261.

[2] BIALYNICKI-BIRULA, A., HOCHSCHILD, G., et MOSTOW, G. D., *Extensions of representations of algebraic linear groups*, Amer. J. Math. *85* (1963), 131–144.

[3] ÉLASHVILI, A. G., *Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen *6* (1972), 51–62; English transl. Functional Anal. Appl. *6* (1972), 44–53.

[4] LUNA, D., *Slices étales*, Bull. Soc. math. France, Mémoire *33* (1973), 81–105.

[5] LUNA, D. et VUST, TH., *Un théorème sur les orbites affines des groupes algébriques semi-simples*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. *27* (1973), 527–535.

[6] POPOV, V. L., *Stability criteria for the action of a semi-simple group on a factorial manifold*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Mat. *34* (1970), 523–531; English transl. Math. U.S.S.R.-Izvestija *4* (1970), 527–535.

[7] RICHARDSON, R. W. jr., *Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero*, Inventiones math. *16* (1972), 6–14.

[8] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), un séminaire dirigé par A. Grothendick, Lecture notes in mathematics, vol. 224, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag (1971).

Université scientifique et médicale de Grenoble
Institut de mathématiques pures associé au CNRS
Boîte postale 116
38402-Saint-Martin-d'Hères

Reçu le 28 janvier 1974