

Sur les Distributions Images Réciproques par une Fonction analytique

Autor(en): **Maire, H.-M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39451>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur les Distributions Images Réciproques par une Fonction analytique

par H.-M. MAIRE

Introduction

Soient F une fonction analytique réelle non constante définie sur une variété analytique réelle X de dimension n et U un ouvert connexe, relativement compact de X ; désignons par $\mathcal{D}'_F(U)$ l'ensemble des distributions sur U qui sont limites de fonctions continues sur U , constantes sur les fibres de F . Dans cet article, nous montrons que $\mathcal{D}'_F(U)$ est facteur direct de l'espace $\mathcal{D}'(U)$ des distributions sur U et qu'il s'identifie à un espace de fonctions généralisées $\mathcal{A}'_F(J)$ sur l'intervalle $J = F(U)$; l'identification se fait par le prolongement naturel de l'image réciproque $F^*: C^\infty(J) \rightarrow C^\infty(U)$ à $\mathcal{A}'_F(J)$.

Plus précisément, soit $\mathcal{A}^{N,n}(J)$ l'espace des 1-formes différentielles impaires de classe C^∞ sur $J \setminus \{0\}$, à support compact dans J , qui admettent en 0 un double développement asymptotique dans l'échelle de comparaison

$$(\pm t)^{-1+j/N}(\log(\pm t))^{k-1} dt, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < k \leq n, \quad \pm t > 0, \quad N > 0.$$

Notons $\mathcal{D}(U)$ l'espace des n -formes différentielles impaires de classe C^∞ , à support compact sur U et supposons que 0 est la seule valeur critique de F dans U . Alors, le prolongement analytique de la distribution F_+^λ (cf. Atiyah [1]) permet de montrer que l'intégration sur les fibres non singulières de F , des éléments de $\mathcal{D}(U)$, définit une application linéaire continue $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{N,n}(J)$, pour N entier convenable. Ce résultat, dû à P. Jeanquartier [5], repose sur une version du théorème de résolution des singularités de H. Hironaka.

Soit $\mathcal{A}_F(J) = F_*(\mathcal{D}(U))$; nous montrons que $\mathcal{A}_F(J)$ est fermé dans $\mathcal{A}^{N,n}(J)$ et que l'application $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}_F(J)$ admet une section linéaire continue. La transposée de F_* est alors un isomorphisme de $\mathcal{A}'_F(J)$ sur $\mathcal{D}'_F(U)$.

Nous considérons aussi un autre sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(U)$ lié à F , $\mathcal{D}'(U; F)$ formé des distributions sur U qui sont invariantes par tout difféomorphisme local de U conservant F . L'inclusion $\mathcal{D}'_F(U) \subset \mathcal{D}'(U; F)$ résulte des définitions; si F n'a pas de singularités dans U , alors $\mathcal{D}'_F(U) = \mathcal{D}'(U; F)$ et le même résultat est vrai

lorsque F est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$ (cf. Methée [9], Tengstrand [12]). Mais, en général, $\mathcal{D}'_F(U) \neq \mathcal{D}'(U; F)$ (cf. l'exemple (4.6)) et $\mathcal{D}'(U; F)$ n'est pas facteur direct de $\mathcal{D}'(U)$ (même exemple).

Les résultats présentés ici ont fait l'objet de ma thèse et ont été annoncés dans [8]; je remercie vivement le Professeur P. Jeanquartier de m'avoir guidé dans mes recherches et utilement conseillé pendant la rédaction du manuscrit.

1. Fonctions Test Singulières et Fonctions Généralisées

Dans ce paragraphe, $p = (p_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ désignera une suite strictement croissante de nombres réels tendant vers l'infini et $m = (m_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres entiers positifs. Au couple (p, m) , nous associerons l'ensemble $P = \{p_j; j \in \mathbb{N}^*\}$ et l'application $M: P \rightarrow \mathbb{N}^*$, telle que $M(p_j) = m_j$.

Pour j et k entiers positifs, soit $\chi_{jk}(t) = \rho(t)t^{p_j}(\log t)^{k-1}$, $t > 0$, où $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vaut 1 au voisinage de 0 et a son support dans un intervalle précisé ultérieurement; les fonctions χ_{jk} forment une échelle de comparaison au voisinage de 0. Nous désignerons par $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$, $\beta > 0$, l'espace des fonctions complexes $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, nulles pour $t \geq \beta$, admettant en 0 un développement asymptotique

$$f \sim \sum_{j \geq 1} \sum_{0 < k \leq m_j} a_{jk} \chi_{jk}, \quad a_{jk} \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

indéfiniment dérivable terme à terme. Pour $h \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$, soit $A_h f$ la somme de (1) limitée aux entiers j tels que $p_j \leq h$; ainsi, $f - A_h f \in C^h(\mathbb{R}_+)$. L'espace que nous venons de définir sera muni de la topologie engendrée par les semi-normes $f \mapsto |a_{jk}|$ et $f \mapsto \sup |D^l(f - A_h f)|$, pour $0 \leq l \leq h$ entiers.

Si β est un nombre positif, fini ou non, nous noterons $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta[)$ la réunion des $\mathcal{A}^{p,m}([0, \gamma])$, pour $0 < \gamma < \beta$, munie de la topologie limite inductive. Pour $-\infty \leq \alpha < 0$, soit $\mathcal{A}^{p,m}(] \alpha, 0])$ l'espace des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}_+^*$, dont les symétriques appartiennent à $\mathcal{A}^{p,m}([0, -\alpha])$. Finalement, nous poserons $\mathcal{A}^{p,m}(] \alpha, \beta[) = \mathcal{A}^{p,m}(] \alpha, 0]) \times \mathcal{A}^{p,m}([0, \beta[)$.

Si J est l'un des intervalles ci-dessus, on montre, en utilisant le théorème d'Ascoli, que $\mathcal{A}^{p,m}(J)$ est un espace de Montel complet. Les éléments de $\mathcal{A}^{p,m}(J)$ sont appelés des *fonctions test singulières de type (p, m) sur J* .

Lorsque g est une fonction complexe définie sur $]0, \infty[$ et qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $t^r g(t) \in L^1(]0, \infty[)$, nous poserons, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda = r$,

$$\mathcal{M}g(\lambda) = \int_0^\infty t^\lambda g(t) dt.$$

La fonction $\mathcal{M}g$ ainsi définie sur la verticale $\operatorname{Re} \lambda = r$, sera appelée *transformée de Mellin de g* (il y a un décalage de 1 avec la définition classique). Si g_1 et g_2 sont comme cidessus, alors la convolée $g_1 \vee g_2$ définie par

$$g_1 \vee g_2(t) = \int_0^\infty g_1(t/s) g_2(s) ds/s$$

satisfait $\mathcal{M}(g_1 \vee g_2)(\lambda) = \mathcal{M}g_1(\lambda) \cdot \mathcal{M}g_2(\lambda)$, pour $\operatorname{Re} \lambda = r$ (cf. Titchmarsh [13]).

Tout élément f de $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$ a une transformée de Mellin définie et holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda > -p_1 - 1$; de plus, l'existence du développement asymptotique de f au voisinage de 0 permet de prolonger $\mathcal{M}f$ en un fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec des pôles éventuels aux points $q_j = -p_j - 1$, $j = 1, 2, \dots$; il suffit en effet de remarquer que

$$X_{jk}(\lambda) = \mathcal{M}\chi_{jk}(\lambda) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(\lambda - q_j)^k} + \text{fonction entière.}$$

Soit $M^{p,m}$ l'espace des fonctions méromorphes dans le plan complexe, holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \{q_1, q_2, \dots\}$, l'ordre du pôle au point q_j étant $\leq m_j$. Pour $G \in M^{p,m}$, nous avons donc un développement de Laurent

$$G(\lambda) = \sum_{k \leq m_j} b'_{jk} (\lambda - q_j)^{-k}$$

au voisinage de chaque point q_j , avec $b'_{jk} \in \mathbb{C}$. Pour $h \in \mathbb{N}$, nous poserons $B_h G = \sum b_{jk} x_{jk}$, la somme portant sur les couples (j, k) tels que $p_j \leq h$ et $0 < k \leq m_j$, où $b_{jk} = (-1)^{k-1} b'_{jk} / (k-1)!$; ainsi $G - B_h G$ est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geq -h - 1$.

Dans $M^{p,m}$, considérons le sous-espace $\mathcal{M}^{p,m}(\beta)$ formé des fonctions F qui jouissent de la propriété suivante:

$$\begin{aligned} &\text{pour tous } h \text{ et } l \in \mathbb{N}, \text{ il existe } C_{h,l} > 0 \text{ tel que} \\ &|\lambda^l (F - B_h F)(\lambda)| \leq C_{h,l} |\beta^\lambda|, \quad \text{pour } \operatorname{Re} \lambda \geq -h - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

(On choisit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle pour $t \geq \beta$, dans la définition des χ_{jk} .) L'espace $\mathcal{M}^{p,m}(\beta)$ sera muni de la topologie engendrée par les semi-normes $F \mapsto |b_{jk}|$ et $F \mapsto \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq -h-1} |\lambda^l \beta^{-\lambda} (F - B_h F)(\lambda)|$, pour $l, h = 0, 1, 2, \dots$

PROPOSITION (1.1). *La transformation de Mellin établit un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$ sur $\mathcal{M}^{p,m}(\beta)$.*

En employant les résultats de Doetsch [4], p. 115, on obtient que $\mathcal{M}$ est une bijection de $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$ sur $\mathcal{M}^{p,m}(\beta)$ et le fait que les semi-normes $f \mapsto |a_{jk}|$ et $f \mapsto \sup_{0 < t < \beta} t^{-h+1} |D^l(f - A_h f)(t)|$, $l, h \in \mathbb{N}$ engendrent aussi la topologie de $\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])$, montre la partie topologique.

COROLLAIRE (1.2). *Si β', β'' sont positifs, la convolution sur $\mathbb{R}_+^*$ induit une application bilinéaire continue*

$$\mathcal{A}^{p',m'}([0, \beta']) \times \mathcal{A}^{p'',m''}([0, \beta'']) \rightarrow \mathcal{A}^{p,m}([0, \beta' \cdot \beta''])$$

où la suite p correspond à l'ensemble $P' \cup P''$ et m correspond à la fonction $M' + M''$, étant entendu que M' [resp. M''] est prolongée par 0 sur $P'' \setminus P'$ [resp. $P' \setminus P''$].

Nous aurons encore besoin du résultat suivant au paragraphe 3.

LEMME (1.3). *Soit $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}^*}$ une famille quelconque de nombres complexes. Alors, il existe une fonction $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, à support dans l'intervalle $[0, 1]$, telle que*

$$D^k \mathcal{M} f_0(q_j) = \alpha_{jk}, \quad \text{pour tous } j \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq m_j.$$

Démonstration. Soient E l'espace de Fréchet des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support dans $[0, 1]$ et Σ le sous-espace vectoriel du dual E' de E engendré par les formes linéairement indépendantes

$$f \mapsto \int_0^1 t^{q_j} (\log t)^k f(t) dt, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq k \leq m_j.$$

L'énoncé revient à dire que toute forme linéaire sur Σ admet un prolongement linéaire continu à E' , puisque E est réflexif. Or, il découle d'un théorème de Banach sur les convexes faiblement fermés du dual d'un Fréchet (Bourbaki [3]) que tout sous-espace vectoriel de Σ est fermé dans E' ; en effet, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'intersection de Σ avec le sous-espace E'_h de E' des formes linéaires sur E , continues pour la norme $f \mapsto \sup |D^h f|$, est de dimension finie.

L'espace dual de $\mathcal{A}^{p,m}(J)$ sera noté $\mathcal{A}'^{p,m}(J)$; nous le munirons de la topologie forte et appellerons ses éléments *fonctions généralisées de type (p, m) sur J* . Les coefficients a_{jk} de la relation (1) définissent des fonctions généralisées de type (p, m) sur $\mathbb{R}_+$. Lorsque $p = (0, 1, 2, \dots)$ et $m = (1, 1, \dots)$, l'espace $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$ est identique à l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ des distributions sur $\mathbb{R}_+$.

On dira que $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$ est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}_+$, si $T|_{\mathcal{D}(U \setminus \{0\})}$ est nulle et s'il existe $\beta > 0$ avec $[0, \beta[\subset U$, tel que $T|_{\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta[)}$ est nulle. Le support de $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$ sera, par définition, le complémentaire, dans $\mathbb{R}_+$, du plus grand ouvert dans lequel T s'annule; cet ensemble sera noté $\text{supp } T$. Lorsque $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$, on posera $\text{supp } T = \text{supp } T_- \cup \text{supp } T_+$, où $T = (T_-, T_+)$ avec $T_{\pm} \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_{\pm})$ et $\text{supp } T_-$ défini par symétrie.

Une fonction généralisée $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$ est dite d'ordre fini s'il existe un entier $h \geq 0$ tel que, pour tout $\beta > 0$, $T|_{\mathcal{A}^{p,m}([0, \beta])}$ est continue pour la norme

$$f \mapsto \max_{0 \leq h} \sup |D^h(f - A_h f)| + \sum_{p_j \leq H} |a_{jk}|.$$

Le plus petit entier ayant cette propriété sera l'ordre de T . Par symétrie, on définit l'ordre d'une fonction généralisée sur $\mathbb{R}_-$, et l'ordre de $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$ sera le maximum des ordres de T_+ et T_- . Il découle immédiatement des définitions que toute fonction généralisée à support compact sur $\mathbb{R}$ est d'ordre fini.

PROPOSITION (1.4). Si $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$ a son support réduit à 0, alors T est combinaison linéaire des éléments a_{jk} , $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, m_j$.

La proposition est une conséquence immédiate du fait que, pour toute $f \in \mathcal{A}^{p,m}(\mathbb{R}_+)$, $f - A_h f$ est limite, dans la topologie C^h , d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$.

La dérivation des fonctions généralisées est définie comme suit: pour $T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle DT, f \rangle = -\langle T, Df \rangle, \quad f \in \mathcal{A}^{p+1,m}(\mathbb{R}),$$

où $p+1 = (p_1+1, p_2+1, \dots)$. L'application D de $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{A}'^{p+1,m}(\mathbb{R})$ ainsi obtenue est linéaire continue.

Le produit d'une fonction généralisée de type (p, m) par une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ est commode à définir lorsque (p, m) satisfait les conditions $P+1 \subset P$ et $m_j \leq m_{j+1}$, pour $j \geq 1$; dans ce cas, le produit par g est une application linéaire continue de $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par:

$$\langle g \cdot T, f \rangle = \langle T, g \cdot f \rangle, \quad T \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}), \quad f \in \mathcal{A}^{p,m}(\mathbb{R}).$$

Pour p quelconque et $r \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, on définit le produit de $T \in \mathcal{A}'^{p+r,m+l}(\mathbb{R}_+)$ et de la fonction $t^r (\log t)^l$ par la même formule.

Il résulte de ces définitions que l'opérateur différentiel tD donne une application linéaire continue de $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Il est possible de définir la convolée de deux fonctions généralisées de type (p, m) sur $\mathbb{R}_+$ à supports limités à droite; on pose $\langle S \vee T, f \rangle = \langle S, h \rangle$ où $h(s) = \langle T, f_s \rangle$ et $f_s(t) = f(st)$, lorsque $f \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$. La convolution est alors associative et commutative mais ne permet pas de régulariser les fonctions généralisées, car si le support de T est réduit à 0, on montre que le support de $S \vee T$ est aussi réduit à 0, quelle que soit $S \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R}_+)$. Toutefois, on a le résultat suivant:

PROPOSITION (1.5). *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$ est partout dense dans $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. D'après la réflexivité de $\mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{A}'^{p,m}(\mathbb{R})$ est telle que $\langle g, f \rangle = 0$, pour toute $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors $f = 0$. Cette propriété a lieu puisque f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Image Directe des Formes C^∞ .

Soit F une fonction analytique réelle non constante sur une variété analytique réelle X connexe de dimension n . Fixons un ouvert connexe, relativement compact U de X , tel que $F^{-1}(0) \cap U \neq \emptyset$, sur lequel F n'a que la valeur critique 0 et notons $J = F(U)$. L'image réciproque par F des fonctions C^∞ sur J donne une application linéaire continue $F^*: C^\infty(J) \rightarrow C^\infty(U)$; par transposition, on en déduit une application linéaire continue F_* : c'est l'image directe, par F , des n -courants impairs à support compact sur U . Remarquons que, si T est un tel courant, on a:

$$F_*(F^*g \cdot T) = g \cdot F_*T, \quad \text{où } g \in C^\infty(J).$$

Désignons par $\mathcal{D}(U)$ l'espace des n -formes différentielles impaires de classe C^∞ , à support compact sur U et par $\mathcal{A}^{N,n}(J)$ l'espace $\mathcal{A}^{p,m}(J)$ du paragraphe 1, où $p = (-1 + j/N)_{j \in \mathbb{N}^*}$ et $m = (n, n, \dots)$, pour un entier $N \geq 1$. A l'aide de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, nous identifierons $\mathcal{A}^{N,n}(J)$ à un sous-espace des 1-courants impairs sur J . Dans [5], P. Jeanquartier a montré le résultat suivant:

PROPOSITION (2.1). *Sous les hypothèses précédentes, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $F_*(\mathcal{D}(U))$ soit contenu dans $\mathcal{A}^{N,n}(J)$. De plus, l'application $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{N,n}(J)$ est linéaire continue.*

La démonstration de P. Jeanquartier repose sur le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka.

Remarque. Dans certains cas particuliers, les travaux de I. N. Bernstein [2] et M. Kashiwara [7] sur le prolongement analytique de la distribution F^λ permettent d'obtenir la proposition (2.1) sans employer le théorème de résolution. En effet, comme conséquence de la proposition (1.1), il suffit de vérifier que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, la fonction

$$(I\varphi)(\lambda) = \int_{F \geq 0} F^\lambda \varphi, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

appartient à $\mathcal{M}^{N,n}(\beta)$, où β est la borne supérieure de F dans U et que l'application $I: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{M}^{N,n}(\beta)$ est linéaire continue. Or, d'après [6], il existe localement un opérateur différentiel $Q(\lambda, x, D_x)$ à coefficients polynomiaux en λ , analytiques en x et un polynôme $b \in \mathbb{C}[\lambda]$, tels que

$$Q(\lambda, x, D_x)F^{\lambda+1} = b(\lambda)F^\lambda.$$

On en déduit que $I\varphi$ admet un prolongement analytique méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec des pôles aux points $s_1 - j_1, \dots, s_k - j_k$, où $s_1, \dots, s_k$ sont les zéros de b et $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$.

De plus, l'existence (cf. [7]) d'un entier ν et d'un opérateur différentiel $Q_0(\lambda, x, D_x)$ de degré inférieur à ν en λ , tel que

$$Q_0(\lambda, x, D_x)F^\lambda = \lambda^\nu F^\lambda,$$

montre que la condition (2) du paragraphe 1 est satisfaite pour $I\varphi$.

Si l'on sait que les zéros de b sont rationnels négatifs, par exemple lorsque F a des singularités isolées dans U , on a démontré la proposition (2.1).

En vue de décrire l'image de l'application $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}^{N,n}(J)$, introduisons le sous-espace $\mathcal{A}_\infty(J)$ de $\mathcal{A}^{N,n}(J)$ formé des éléments dont le développement asymptotique est identiquement nul en 0; la notation s'explique par le fait que les formes de $\mathcal{A}_\infty(J)$ sont C^∞ -plates en 0.

LEMME (2.2). *Il existe une n -forme impaire $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ telle que $F_*\varphi \notin \mathcal{A}_\infty(J)$.*

Démonstration. Si $X = \mathbb{R}^n$ et U contient un voisinage V de 0 de la forme $V' \times V''$, $V' \subset \mathbb{R}^q$, $V'' \subset \mathbb{R}^{n-q}$, tel que $F^{-1}(0) \cap V = V' \times \{0\}$, on peut procéder comme suit. Lorsque $q = n - 1$, on a $F(x) = x_n^k \cdot G(x)$, où G est analytique, non divisible par x_n ; quitte à changer l'origine dans V , on peut supposer que $F(x) = \pm x_n^k$, et, dans ce cas, le lemme est banal.

Lorsque $q < n-1$, F ne change pas de signe dans V , par exemple $F \geq 0$. Choisissons $\omega = \varphi' \wedge \varphi''$, où $\varphi' \in \mathcal{D}(V')$ et φ'' est une forme différentielle de degré $q-1$ à support compact dans V'' , qui s'écrit $x_{q+1} dx_{q+2} \wedge \cdots \wedge dx_n$, au voisinage de 0. D'après la formule de Stokes, on a:

$$\int_{F^{-1}(t)} \omega = \int_{\partial V_t} \omega = \int_{V_t} d\omega, \quad \text{où } V_t = \{x \in V; F(x) \leq t\}, \quad t > 0.$$

En employant l'inégalité de Lojasiewicz et la formule de Taylor, on sait qu'il existe $\theta \geq 1$, C et $D > 0$, tels que

$$C |x''|^\theta \leq F(x', x'') \leq D |x''|, \quad (x', x'') \in V.$$

Si on choisit φ' telle que $\int_{V'} \varphi' = (-1)^q$, ces inégalités entraînent que:

$$C' t^{n-q} \leq \int_{F^{-1}(t)} \omega \leq D' t^{(n-q)/\theta}, \quad \text{avec } C', D' > 0.$$

Ces dernières estimations montrent que si $\varphi = dF \wedge \omega$, $F_*\varphi$ n'a pas un développement asymptotique nul en 0.

Le cas général se ramène à ce cas particulier en considérant la dimension q du sous-ensemble analytique $F^{-1}(0) \cap U$.

PROPOSITION (2.3). *Il existe une application linéaire continue $\sigma: \mathcal{A}_\infty(J) \rightarrow \mathcal{D}(U)$ telle que $F_* \circ \sigma = 1$. En particulier, $\mathcal{A}_\infty(J)$ est contenu dans $F_*(\mathcal{D}(U))$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ telle que le développement asymptotique de $F_*\varphi|_{\mathbb{R}_\pm}$ ne soit pas identiquement nul lorsque $J \cap \mathbb{R}_\pm \neq \emptyset$; le lemme (2.2) permet de construire une telle forme. En modifiant φ hors d'un voisinage de $F^{-1}(0) \cap U$, on peut supposer que $F_*\varphi(t) \neq 0$, pour tout $t \in J \setminus \{0\}$ (φ ne sera plus à support compact, mais le support de φ coupe l'image réciproque de tout compact de J suivant un compact de U). Pour toute $f \in \mathcal{A}_\infty(J)$, le quotient $f/F_*\varphi$, prolongé par 0 en 0, est de classe C^∞ sur J . Il suffit de choisir $\sigma f = \varphi \cdot F^*(f/F_*\varphi)$.

3. Image Réciproque des Fonctions Généralisées

Nous reprenons les notations et hypothèses du paragraphe 2 pour X, F, U, J . Nous poserons, pour simplifier, $\mathcal{A}(J) = \mathcal{A}^{N,n}(J)$ et $\mathcal{A}_F(J) = F_*(\mathcal{D}(U))$, où N est un

entier fixe donné par la proposition (2.1). L'application transposée de F_* sera notée $F^*: \mathcal{A}'(J) \rightarrow \mathcal{D}'(U)$; nous l'appellerons *image réciproque, par F , des fonctions généralisées de type (N, n) sur J* , puisqu'elle prolonge l'image réciproque des fonctions C^∞ .

Dans ce paragraphe, nous montrons que $F^*(\mathcal{A}'(J))$ est facteur direct de $\mathcal{D}'(U)$; il est donc fermé et, par conséquent, si $\mathcal{D}'_F(U)$ est l'adhérence dans $\mathcal{D}'(U)$ des fonctions continues sur U , constantes sur les fibres de F , on a $\mathcal{D}'_F(U) = F^*(\mathcal{A}'(J))$, d'après la proposition (1.5).

Pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{N}^* \times [-n, n]^*$, où $[-n, n]^*$ représente l'intervalle de nombres entiers privé de 0, soit a_{jk} la fonction généralisée sur J définie par:

$$\langle a_{jk}, f \rangle = \begin{cases} a_{jk}(f|_{\mathbb{R}_+}) & \text{si } k > 0 \text{ et } J \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset, \\ e^{i\pi j/N} a_{j,-k}(\check{f}|_{\mathbb{R}_+}) & \text{si } k < 0 \text{ et } J \cap \mathbb{R}_-^* \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad f \in \mathcal{A}(J)$$

où on a noté, pour $g \in \mathcal{A}^{N,n}(\mathbb{R}_+)$, $a_{jk}(g)$ le coefficient de χ_{jk} (cf. le paragraphe 1) dans le développement asymptotique de g au voisinage de 0 et $\check{f}(t) = f(-t)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Avec cette définition, on obtient que:

$$t \cdot a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < N+1, \\ a_{j-N,k} & \text{si } j \geq N+1. \end{cases}$$

D'après la formule $F^*(gT) = F^*g \cdot F^*T$, pour $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{A}'(J)$, on a:

$$F \cdot F^* a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < N+1, \\ F^* a_{j-N,k} & \text{si } j \geq N+1. \end{cases} \quad (0)$$

Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^* \times [-n, n]^*$, nous désignerons par $\mathcal{T}_{jk}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(U)$ engendré par $F^* a_{j+qN,k}$, $q \in \mathbb{N}$, et poserons $\mathcal{T} = +\mathcal{T}_{jk}$, la somme portant sur $(j, k) \in [1, N] \times [-n, n]^*$.

LEMME (3.1). *Il existe un nombre fini de couples $(j_1, k_1), \dots, (j_r, k_r) \in \mathbb{N}^* \times [-n, n]^*$ tels que les images réciproques par F des éléments $b_{sq} = a_{j_s+qN,k_s}$, $1 \leq s \leq r$, $q \in \mathbb{N}$, forment une base de $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Soit B un sous-ensemble de $[1, N] \times [-n, n]^*$ et supposons qu'on a déjà construit une base de $\mathcal{T}_B = +\mathcal{T}_{j',k'}$, où la somme porte sur $(j', k') \in B$, du type désiré. Si $(j, k) \in [1, N] \times [-n, n]^*$ et $\mathcal{T}_{jk} \not\subset \mathcal{T}_B$, soit j_0 le plus petit entier de la forme $j + qN$ tel que $F^* a_{j_0,k} \notin \mathcal{T}_B$; alors, d'après (0), $\mathcal{T}_B \oplus \mathcal{T}_{j_0,k} = \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_{jk}$ et on obtient une base de $\mathcal{T}_B + \mathcal{T}_{jk}$ en ajoutant à la base de $\mathcal{T}_B$ les éléments $F^* a_{j_0+qN,k}$, $q \in \mathbb{N}$.

Le lemme est démontré par récurrence sur B en commençant par $B = \emptyset$.

Dans la suite, nous noterons T_{sq} la distribution F^*b_{sq} . Il existe un entier Q tel que les distributions $F^l \cdot T_{s0}$, pour $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq r$, sont combinaisons linéaires des $T_{s',q'}$, avec $q' < Q$. On aura alors que, pour tout $(s, q) \in [1, r] \times \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, la distribution $F^l \cdot T_{sq}$ est combinaison linéaire des $T_{s',q'}$, avec $q' \leq \max(q - l, Q - 1)$.

Pour $1 \leq s \leq r$ et $0 \leq q \leq Q$, choisissons $\varphi_{sq} \in \mathcal{D}(U)$ telles que, pour $1 \leq s' \leq r$ et $0 \leq q' \leq Q$, $\langle T_{s',q'}, \varphi_{sq} \rangle = 1$ si $(s', q') = (s, q)$, $= 0$ sinon. L'existence de ces formes provient de l'indépendance linéaire des T_{sq} .

Soit K la réunion des supports des formes φ_{sq} , pour $1 \leq s \leq r$ et $0 \leq q \leq Q$. Si $(s, q) \in [1, r] \times \mathbb{N}$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ telle que, pour $1 \leq s' \leq r$ et $0 \leq q' \leq q$, on ait:

$$\langle T_{s',q'}, \varphi \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } (s', q') \neq (s, q), \\ 1 & \text{si } (s', q') = (s, q). \end{cases} \quad (1)$$

Il suffit en effet de choisir $\varphi = F^{q-Q}\varphi_{sQ}$, pour $q > Q$.

Notons $\mathcal{T} | K$ l'image de $\mathcal{T}$ par l'application de restriction $\mathcal{D}'(U) \rightarrow \mathcal{D}'(K)$. Comme conséquence de (1), on obtient que $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} | K$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

PROPOSITION (3.2). *Toute forme linéaire sur $\mathcal{T}$ admet un prolongement linéaire continu à $\mathcal{D}'(U)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'ordre de la distribution

$$T = \sum_{1 \leq s' \leq r} \sum_{0 \leq q' \leq q} c_{s',q'} T_{s',q'}, \quad \text{où } c_{s',q'} \in \mathbb{C},$$

sur K est minoré par $q - Q$, si $(c_{1q}, \dots, c_{rq}) \neq 0$. Pour $q - Q > 0$, on a:

$$F^{q-Q} \cdot T | K = \sum_{1 \leq s' \leq r} \{c_{s',q} T_{s',Q} | K + \sum_{1 \leq q' < Q} d_{s',q'} | K\},$$

où $d_{s',q'} \in \mathbb{C}$. Donc $F^{q-Q} \cdot T | K \neq 0$. Comme $T | K$ a son support dans $F^{-1}(0) \cap K$ et que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $F^{q-Q}\varphi$ est petite dans la topologie C^{q-Q-1} au voisinage de $F^{-1}(0) \cap K$, l'ordre de $T | K$ est $\geq q - Q$.

Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{T}$; notons $\Phi | K$ la forme linéaire sur $\mathcal{T} | K$ qu'on en déduit. En procédant comme au lemme (1.3), on montre que le noyau de $\Phi | K$ est fermé. En prolongeant $\Phi | K$ à $\mathcal{D}'(K)$ et par réflexivité de $\mathcal{D}(K)$, on obtient une forme $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ telle que $\langle T, \varphi \rangle = \Phi(T)$, pour toute $T \in \mathcal{T}$. La proposition est démontrée.

COROLLAIRE (3.3). *On a $\mathcal{A}_F(J) = (\text{Ker } F^*)^0$. En particulier, $\mathcal{A}_F(J)$ est fermé dans $\mathcal{A}(J)$.*

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{A}_F(J) \subset (\text{Ker } F^*)^0$ provient de la relation générale $(\text{Im } u)^{00} = (\text{Ker } {}^t u)^0$ pour une application linéaire continue u .

Montrons l'inclusion inverse et choisissons $f \in (\text{Ker } F^*)^0$; comme f définit une forme linéaire sur $\mathcal{A}'(J)$, nulle sur le noyau de F^* , elle définit une forme linéaire sur $\mathcal{T}$. Cette dernière admet un prolongement linéaire continu à $\mathcal{D}'(U)$ d'après la proposition (3.2) et fournit donc $\varphi_0 \in \mathcal{D}(U)$ telle que $f - F_*\varphi_0 \in \mathcal{A}_\infty(J)$. Il reste à employer la proposition (2.3) pour obtenir $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ telle que $F_*\varphi = f$.

Fixons $j \in \mathbb{N}^*$; l'existence d'une fonction $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec les propriétés du lemme (1.3) permet, par convolution, de définir une application linéaire continue σ de $\mathcal{A}^{N,n}(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même telle que

$$\begin{aligned} {}^t\sigma a_{j'+qN,k} &= 0, & \text{si } j' \neq j, & \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in [1, n], \\ {}^t\sigma a_{j+qN,n} &= a_{j+qN,n}, & & \quad \forall q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La répétition de cet argument et un résultat de R. Seeley [11] conduit au lemme ci-dessous, où χ_{jk} est un élément de $\mathcal{A}^{N,n}(\mathbb{R})$ tel que $\langle a_{j',k'}, \chi_{jk} \rangle = 1$ si $(j', k') = (j, k)$, $= 0$ sinon.

LEMME (3.4). *Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^* \times [-n, n]^*$. Alors il existe une application linéaire continue $\rho_{jk} : \mathcal{A}^{N,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, pour tous $f \in \mathcal{A}^{N,n}(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}$:*

$$\langle a_{j+qN,k}, \chi_{jk} \rho_{jk}(f) \rangle = \langle a_{j+qN,k}, f \rangle.$$

THÉORÈME (3.5). *L'application $F_* : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}_F(J)$ admet une section linéaire continue.*

Démonstration. D'après la proposition (3.2), il existe des formes $\varphi_{sq} \in \mathcal{D}(U)$, pour $1 \leq s \leq r$, $0 \leq q \leq Q$, telles que (1) ait lieu pour tout $(s', q') \in [1, r] \times \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{A}_Q(J) = \{g \in \mathcal{A}_F(J); \langle {}^t b_{sq}, g \rangle = 0, 1 \leq s \leq r, l \geq 1\}$; définissons $\Omega_Q : \mathcal{A}_F(J) \rightarrow \mathcal{D}(U)$ par

$$\Omega_Q(f) = \sum_{1 \leq s \leq r} \sum_{q < Q} \langle b_{sq}, f \rangle \varphi_{sq}, \quad f \in \mathcal{A}_F(J).$$

Si $\omega_Q = F_* \circ \Omega_Q$, on a $\text{Im } (1 - \omega_Q) \subset \mathcal{A}_Q(J)$.

Pour $1 \leq s \leq r$, soit ρ_s l'application ρ_{j_s+QN, k_s} du lemme (3.4), les entiers j_s, k_s étant ceux du lemme (3.1). Définissons $\Omega_\infty: \mathcal{A}_Q(J) \rightarrow \mathcal{D}(U)$ par

$$\Omega_\infty(g) = \sum_{1 \leq s \leq r} F^*(\rho_s(g))\varphi_{sQ}, \quad g \in \mathcal{A}_Q(J).$$

Si $\omega_\infty = F_* \circ \Omega_\infty$, on a $\text{Im}(1 - \omega_\infty) \subset \mathcal{A}_\infty(J)$.

Posons enfin $\Omega = \Omega_\infty \circ (1 - \omega_Q) + \Omega_Q$ et $\omega = F_* \circ \Omega$. Alors $\sigma \circ (1 - \omega) + \Omega$, où σ est l'application de la proposition (2.3), est la section linéaire continue cherchée.

COROLLAIRE (3.6). *Le sous-espace $F^*(\mathcal{A}'(J))$ est facteur direct de $\mathcal{D}'(U)$; il est isomorphe au dual de $\mathcal{A}_F(J)$.*

Démonstration. Elle résulte du théorème (3.5) dès qu'on a remarqué que F^* et la transposée de $F_*: \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathcal{A}_F(J)$ ont la même image.

COROLLAIRE (3.7). $\mathcal{D}'_F(U) = F^*(\mathcal{A}'(J))$.

Démonstration. D'après le lemme (1.5), $C^0(J)$ est partout dense dans $\mathcal{A}'(J)$; donc $F^*\mathcal{A}'(J)$ est contenu dans l'adhérence de $F^*C^0(J)$ qui est par définition $\mathcal{D}'_F(U)$.

D'autre part, $\mathcal{D}'_F(U)$ est contenu dans $F^*\mathcal{A}'(J)$, car ce dernier espace est fermé dans $\mathcal{D}'(U)$, d'après le corollaire (3.6).

Remarques. 1. En modifiant de manière évidente l'espace $\mathcal{A}^{N,n}(J)$, les résultats de ce paragraphe restent valables pour un ouvert connexe, relativement compact U de X , car F n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques dans U .

2. Si U est un ouvert connexe quelconque de X et si l'inclusion $F_*(\mathcal{D}(U)) \subset \mathcal{A}^{N,n}(J)$ est vérifiée, alors les résultats ci-dessus sont aussi vrais. Ce cas se présente, par exemple, lorsque $X = \mathbb{R}^n = U$ et F polynôme homogène à n variables (cf. Raïs [10]).

4. Questions d'Invariance

Dans ce paragraphe, nous faisons les mêmes hypothèses que précédemment pour X, F, U, J , sauf que U n'est plus nécessairement relativement compact (cf. la remarque 2 ci-dessus).

Pour tout ouvert $V \subset U$, notons $\mathcal{G}(V)$ l'ensemble des $h \in C^\infty(V; U)$, tels que h est un difféomorphisme de V sur $h(V)$ qui conserve F . L'ensemble des distributions T sur U qui satisfont $h_*(T|V) = T| h(V)$, pour tous $V \subset U$ et $h \in \mathcal{G}(V)$,

sera noté $\mathcal{D}'(U; F)$. Nous désignerons par $\mathcal{D}'(U; dF)$ l'ensemble des distributions sur U qui, sur tout ouvert $V \subset U$, sont annulées par les champs de vecteurs C^∞ sur V qui annulent F . La notation s'explique par le fait que dans le cas régulier, $dF \neq 0$ partout, $\mathcal{D}'(U; dF) = \{T \in \mathcal{D}'(U); dT \wedge dF = 0\}$.

En considérant le groupe à un paramètre engendré par un champ de vecteurs, on vérifie que

$$\mathcal{D}'(U; F) \subset \mathcal{D}'(U; dF).$$

D'autre part, il découle des définitions que

$$\mathcal{D}'_F(U) \subset \mathcal{D}'(U; F).$$

Ces trois espaces de distributions sur U peuvent être différents comme le montre l'exemple (4.6). Par contre, on a:

PROPOSITION (4.1). $\mathcal{D}'(U; F) \cap C^0(U) = F^*(C^0(J))$.

Démonstration. Si g est un élément du membre de gauche, alors g est constant sur les fibres non singulières de F . Définissons $\bar{g}: J \rightarrow \mathbb{C}$, par $\bar{g}(t) = g(x_t)$, où $F(x_t) = t$ et x_0 est tel que toute suite de J tendant vers 0 se relève en une suite de U tendant vers x_0 . Alors $\bar{g}$ est continue et $\bar{g} \circ F = g$, car on a l'égalité sur $U \setminus F^{-1}(0)$.

Remarquons que, pour $m > 0$, $\mathcal{D}'(U; F) \cap C^m(U) \neq F^*(C^m(J))$, comme le montre l'exemple $F(x) = x^4$.

Le principe du recollement des morceaux a la conséquence suivante:

PROPOSITION (4.2). Si F n'a pas de points critiques dans U , alors $\mathcal{D}'_F(U) = \mathcal{D}'(U; F)$.

Dans la suite, nous supposerons que F est un polynôme homogène de degré m à n variables et $U = X = \mathbb{R}^n$.

LEMME (4.3). Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) F est linéairement équivalent à un polynôme indépendant de x_n ;
- (ii) il existe un difféomorphisme défini au voisinage de 0 qui conserve F et déplace l'origine.

Démonstration. Pour montrer que (ii) entraîne (i), il suffit d'écrire le difféomorphisme h en question sous la forme

$$h(x) = (0, \dots, 0, a) + Dh(0) \cdot x + O(r^2), \quad r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

car, si $F(x) = F_m(x') + F_{m-1}(x')x_n + \dots + F_0(x')x_n^m$, on vérifie par récurrence sur k , que $F_k = 0$, pour $0 \leq k < m$.

Si l'une des deux conditions du lemme (4.3) n'est pas satisfaite, nous dirons que F dépend *effectivement* de n variables.

PROPOSITION (4.4). *Soient F un polynôme homogène dépendant effectivement de n variables et T une distribution à support 0 dans $\mathbb{R}^n$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; F)$ si, et seulement si, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; dF)$ et T est invariante par tout difféomorphisme linéaire conservant F .*

Démonstration. Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $h \in \mathcal{G}(V)$. Si $0 \notin V$, alors $0 \notin h(V)$ d'après le lemme (4.3), et $h_*(T|V) = T|h(V)$, puisque les deux membres sont nuls. Il suffit donc de vérifier l'invariance de T lorsque V est une boule centrée à l'origine.

Pour $0 < \tau \leq 1$, soit $h_\tau : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par $h_\tau(x) = \tau^{-1}h(\tau x)$ et $h_0 = Dh(0)$. Alors $(\tau, x) \mapsto h_\tau(x)$ est de classe C^∞ sur $[0, 1] \times V$ et h_τ est un difféomorphisme de V sur $h_\tau(V)$ qui conserve F .

Si ξ_τ est le champ de vecteurs défini par:

$$(\xi_\tau f) \circ h_\tau^{-1} = \frac{d}{d\sigma} (f \circ h_\sigma^{-1}) \Big|_{\sigma=\tau} = \frac{d}{d\sigma} (h_\sigma)_* f \Big|_{\sigma=\tau}, \quad f \in C^\infty(V),$$

on a $\xi_\tau F = 0$ et donc $0 = (h_\tau)_* \xi_\tau T = (d/d\sigma)(h_\sigma)_* T|_{\sigma=\tau}$. Il s'ensuit que $(h_1)_* T = h_* T = (h_0)_* T = T$, d'après la seconde hypothèse sur T .

Remarque. Si l'on suppose seulement que F est quasi-homogène et $n = 2$, on montre une proposition analogue à (4.4), où difféomorphisme linéaire est remplacé par difféomorphisme algébrique d'un type particulier.

PROPOSITION (4.5). *Soient F un polynôme homogène à n variables non négatif et $T \in \mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n)$ une distribution à support 0. Alors les composantes homogènes de T appartiennent aussi à $\mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n)$; de plus, pour tout entier $\nu \geq 0$, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n)$ formé des distributions à support 0 et homogènes d'ordre ν , est majorée par 1.*

Démonstration. Nous reprenons les notations du paragraphe 3 pour a_{jk} , $j \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, puisque F est non négative. Pour $r > 0$, soit h_r l'homothétie de rapport r .

Le développement de Laurent de $\int F^\lambda \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, au voisinage de $-j/N$ et la relation

$$\int F^\lambda (h_r)^* \varphi = \int (F \circ h_r^{-1})^\lambda \varphi = r^{-m\lambda} \int F^\lambda \varphi$$

montrent qu'il existe des constantes $c_{kl} \neq 0$, telles que

$$(h_r)_*(F^* a_{jk}) = r^{mj/N} \sum_{l=0}^{n-k} c_{kl} (-m \log r)^l \cdot F^* a_{j,k+1}, \quad j \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1)$$

Soit $T = \sum \gamma_{jk} F^* a_{jk}$, $\gamma_{jk} \in \mathbb{C}$, un élément quelconque de $\mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n)$ à support 0. En appliquant la formule (1) et en remarquant que $T|_{\dot{\mathbb{R}}^n} = (h_r)_* T|_{\dot{\mathbb{R}}^n} = 0$, $\dot{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on montre que

$$\gamma_{jk} \neq 0 \Rightarrow F^* a_{jk} |_{\dot{\mathbb{R}}^n} = 0.$$

Considérons maintenant (j, k) tel que $F^* a_{jk} \neq 0$ et $\text{supp } F^* a_{jk} = \{0\}$; alors, puisque $F^* a_{jk}$ est combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac, la formule (1) montre que $(h_r)_* F^* a_{jk} = r^{mj/N} F^* a_{jk}$, et donc que $F^* a_{jk}$ est homogène d'ordre $(mj/N) - n$.

EXEMPLE (4.6). Pour $U = \mathbb{R}^2$ et $F(x, y) = x^4 + y^4$, on a $\mathcal{D}'_F(U) \neq \mathcal{D}'(U; F) \neq \mathcal{D}'(U; dF)$. De plus, $\mathcal{D}'(U; F)$ n'est pas facteur direct de $\mathcal{D}'(U)$.

D'après la proposition (4.4), si T est une distribution à support 0, $T \in \mathcal{D}'(U; F)$ si, et seulement si,

$$y^3 \frac{\partial T}{\partial x} - x^3 \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad h_* T = T, \quad (2)$$

où h est un élément quelconque du groupe du carré.

En écrivant $T = \sum c_{\alpha\beta} \delta^{(\alpha,\beta)}$, les conditions (2) deviennent:

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= 0 && \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est impair,} \\ c_{\alpha\beta} &= c_{\beta\alpha}, && \forall (\alpha, \beta), \\ (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)c_{\alpha+4,\beta} &= (\beta+4)(\beta+3)(\beta+2)c_{\alpha,\beta+4}, && \forall (\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (3)$$

De (3), on déduit que $\mathcal{D}'(U; F) \neq \mathcal{D}'(U; dF)$ et que la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(U; F)$ des distributions homogènes d'ordre ν vaut:

- 1 si $\nu = 0$ ou $4\mu + 2$, $\mu \geq 0$,
- 0 si $\nu = 2\mu + 1$, $\mu \geq 0$,
- 2 si $\nu = 4\mu$, $\mu \geq 0$.

La proposition (4.5) montre que $\mathcal{D}'(U; F) \neq \mathcal{D}'_F(U)$.

Pour voir que $\mathcal{D}'(U; F)$ n'est pas facteur direct de $\mathcal{D}'(U)$, on procède par l'absurde et on aboutit à la contradiction classique suivante: il existe un sous-espace de $\mathcal{D}(K)$, K compact de U , qui est isomorphe au produit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

EXEMPLE (4.7). Pour $F(x) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, avec $k_1, \dots, k_n$ entiers ≥ 0 , on a $\mathcal{D}'_F(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; F) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; dF)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH M. F., Resolutions of singularities and division of distributions, *Comm. on pure and appl. Math.* **23**, (1970), 145–150.
- [2] BERNSTEIN I. N., The analytic continuation of generalised functions with respect to a parameter, *Functional Anal. Appl.* **6**, (1972), 273–285.
- [3] BOURBAKI N., *Espaces vectoriels topologiques*, ch. 3–5, Hermann, Paris, 1967.
- [4] DOETSCH G., *Handbuch der Laplace-Transformation II*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1955.
- [5] JEANQUARTIER P., Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique, *C. R. Acad. Sc. Paris* **271**, (1970), 1159–1161.
- [6] KASHIWARA M., Sur la b -fonction, *Seminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–75*, exposé XXV.
- [7] —, à paraître.
- [8] MAIRE H.-M., Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique, *C. R. Acad. Sc. Paris* **281**, (1975), 427–430.
- [9] METHÉE P.-D., Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz, *Comment. Math. Helv.* **28**, (1954), 224–269.
- [10] RAÏS M., Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent, *C. R. Acad. Sc. Paris* **273**, (1971), 495–498.
- [11] SEELEY R. T., Extension of C^∞ functions defined in a half space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**, (1964), 625–626.
- [12] TENGSTRAND A., Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature, *Math. Scand.* **8**, (1960), 201–212.
- [13] TITCHMARSH E. C., *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1948.

Section de mathématiques
Case postale 124
1211 GENEVE 24

Reçu Décembre, 1975