

# Formes Différentielles de Degré 1 Fermées Non Singulières: Classes d'Homotopie de leurs Noyaux

Autor(en): **Laudenbach, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39454>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Formes Différentielles de Degré 1 Fermées Non Singulières: Classes d'Homotopie de leurs Noyaux

F. LAUDENBACH

### 0. Introduction

Le problème de la linéarisation des formes différentielles de degré 1 fermées non singulières sur le tore  $T^n$  a servi de motivation à cette étude. Rappelons donc de quoi il s'agit: dans les coordonnées canoniques  $x_1, \dots, x_n$  de  $T^n$  une forme  $\alpha = \sum a_i dx_i$  dont les coefficients  $a_i$  sont constants est dite linéaire; si  $\omega$  est une forme non singulière cohomologue à  $\alpha$ , on peut se poser les questions suivantes: existe-t-il une *conjugaison* entre  $\omega$  et  $\alpha$ , c'est-à-dire un difféomorphisme  $\varphi$  tel que  $\omega = \varphi^* \alpha$ ? Existe-t-il une linéarisation par isotopie de  $\omega$ , c'est-à-dire une famille à un paramètre de difféomorphismes  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , telle que  $\varphi_0 = Id$  et  $\omega = \varphi_1^* \alpha$ ? Cette seconde question, bien qu'elle invoque une relation d'équivalence plus fine que la première, semble plus abordable en partie à cause du lemme de Moser [10], d'après lequel la linéarisation par isotopie de  $\omega$  est impliquée par l'existence d'un chemin de formes fermées non singulières  $\omega_t$ , toutes cohomologues, joignant  $\alpha$  et  $\omega$ . Si  $\mathcal{E}_\alpha$  désigne l'espace des 1-formes non singulières de la classe de cohomologie de la forme linéaire  $\alpha$ , le problème posé est alors le calcul de  $\pi_0(\mathcal{E}_\alpha)$ . Si  $n \geq 6$ , et si  $[\alpha]$  est une classe rationnelle (i.e. les coefficients de  $\alpha$  sont sur une  $\mathbf{Q}$ -droite), on peut faire le calcul de  $\pi_0(\mathcal{E}_\alpha)$ , essentiellement à l'aide des travaux de Hatcher-Wagoner sur la pseudo-isotopie, et l'on trouve un ensemble infini [8]. Notons d'ailleurs que cette obstruction à la linéarisation meurt par relèvement dans un revêtement à deux feuillets. Malheureusement le seul résultat d'approximation est que les formes linéarisables constituent un ouvert dans l'espace de toutes les 1-formes; mais qu'en est-il des formes non linéarisables?

Pour prouver la non-trivialité de  $\pi_0(\mathcal{E}_\alpha)$  dans le cas irrationnel, il faudrait mettre la main sur un invariant stable par approximation. Le candidat le plus simple qui se présente consiste à associer à chaque forme non singulière  $\omega$  sa classe d'homotopie en tant que section sans zéro du cotangent; pour éviter toute confusion avec les déformations évoquées plus haut, nous parlerons plutôt de la classe d'homotopie du *noyau*  $\text{Ker } \omega$ , c'est-à-dire du champ de  $(n-1)$ -plans transversalement orientés, qui en chaque point  $x$  de  $T^n$  est le noyau de  $\omega(x)$ .

Deux champs de plans voisins  $\text{Ker } \omega_1$  et  $\text{Ker } \omega_2$  sont évidemment homotopes, même si les formes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne sont pas cohomologues; cet invariant est donc stable par approximation; malheureusement il ne sert à rien pour notre problème comme l'indique le théorème suivant:

**THÉORÈME I.** *Sur  $T^n$  toutes les 1-formes fermées non singulières ont des noyaux homotopes.*

Ce résultat "négatif" serait sans intérêt s'il n'était rapproché du théorème de J. Wood [16], qui affirme que dans toute classe d'homotopie de champs d'hyperplans il existe un champ intégrable, c'est-à-dire défini par une forme  $\omega$  telle que  $\omega \wedge d\omega = 0$  (théorème valable pour toute une classe de variétés comprenant le tore). De notre côté, nous déduirons du théorème précédent et du théorème de Sacksteder [13], complété par Imanishi [7] le résultat suivant:

**COROLLAIRE.** *Un feuilletage de codimension 1 sur  $T^n$ , dont le champ des hyperplans tangents n'est pas homotope aux champs linéaires, a nécessairement de l'holonomie.*

Tel qu'il est énoncé, le théorème I est dû à A. Douady selon une démonstration très élégante exposée en appendice. En effet, avant Douady, j'avais seulement obtenu le théorème pour  $n \geq 6$  comme conséquence du théorème suivant:

**THÉORÈME II.** *Soient  $V$  une variété  $C^\infty$  fermée de dimension  $n \geq 6$  et  $p_0, p_1: V \rightarrow S^1$  deux fibrations homotopes. Soit  $H = \text{Ker}(p_{i\#}: \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(S^1))$ ; on suppose que  $Wh_1(H) = 0$ . Alors, désignant par  $d\theta$  la 1-forme canonique sur  $S^1$ , on a  $\text{Ker } p_0^*(d\theta) \sim \text{Ker } p_1^*(d\theta)$ .*

*Remarque 1.* En dimension 2 et 3, le théorème I découle du fait beaucoup plus fort que toute 1-forme fermée non singulière est linéarisable par isotopie; la linéarisation par conjugaison résulte en dimension 2 du théorème de Poincaré-Bendixson [11] et en dimension 3 du travail de Rosenberg-Roussarie [12]; on obtient la linéarisation par isotopie grâce à la classification des difféomorphismes de  $T^2$  et de  $T^3$  [15].

*Remarque 2.* Le paragraphe 1, consacré à des rappels généraux sur la théorie d'obstruction, met en évidence une première et une seconde obstruction dans les problèmes de déformations de champs d'hyperplans, selon le programme de Steenrod. La nullité de la première obstruction équivaut à la nullité de certaines

intégrales qui, d'après Bott et Chern, s'introduisent naturellement à l'aide d'une connexion riemannienne; si l'on ne retient du théorème I que ce qui concerne la première obstruction on obtient une proposition (1.6) qui à mon avis devrait apparaître comme cas particulier d'une théorie d'intersection de sous-variétés lagrangiennes dans une variété symplectique.

## 1. Généralités sur la Théorie d'Obstruction dans le Cotangent

Dans ce paragraphe, on considère une variété  $V$  lisse fermée de dimension  $n$ ; on note  $\tau^*$  son fibré cotangent, d'espace total  $E$  et de projection  $p: E \rightarrow V$ . Etant données deux sections sans zéro  $s_0$  et  $s_1$ , la théorie générale de Steenrod décrit une obstruction primaire, la *première différence*,  $d(s_0, s_1) \in H^{n-1}(V; \pi_{n-1}(S^{n-1}))$ ; si elle est nulle, les deux sections sont homotopes sur le  $(n-1)$ -squelette par une homotopie ne s'annulant pas. Une seconde obstruction  $d'(s_0, s_1) \in H^n(V; \pi_n(S^{n-1}))$  est alors définie comme obstruction à prolonger l'homotopie sur toute la base; en fait  $d'(s_0, s_1)$  comporte une certaine indétermination gérée par un homomorphisme

$$H^{n-2}(V; \pi_{n-1}(S^{n-1})) \rightarrow H^n(V; \pi_n(S^{n-1}))$$

qui répercute les modifications éventuellement effectuées sur le  $(n-2)$ -squelette (voir [6] 1ère partie). Bien entendu, les coefficients utilisés ci-dessus sont des coefficients locaux, tordus par l'orientation. Le but de ce paragraphe est de définir un objet géométrique qui, dans le cadre lisse, porte d'un seul coup l'information de ces deux obstructions.

### 1.1. Les courbes caractéristiques

Soient  $C_- = \{x \in V \mid s_1(x) = \lambda s_0(x), \lambda < 0\}$

$$C_+ = \{x \in V \mid s_1(x) = \lambda s_0(x), \lambda > 0\}.$$

Génériquement  $C_-$  et  $C_+$  sont des courbes. Remarquons que si  $C_-$  est vide,  $s_1$  est de façon naturelle homotope à  $s_0$  par l'homotopie  $ts_1 + (1-t)s_0$  qui ne s'annule jamais. La courbe  $C_-$ , non nécessairement connexe, sera appelée *la courbe caractéristique de la paire*  $(s_0, s_1)$ ; elle est équipée des deux structures suivantes: a) une orientation, b) un morphisme, bien défini à homotopie près, du fibré normal  $\nu(C_-, V)$  dans le fibré  $\xi_0$  supplémentaire à  $s_0$ . Nous dirons que ces deux structures constituent une  $\xi_0$ -orientation.

a) *Une orientation*

La variété symplectique  $E$  a une orientation naturelle. Posons  $\bar{s}_0(V) = \{\lambda s_0(x); x \in V, \lambda < 0\}$ . Dans  $E - V$ , où  $V$  est identifié à la section nulle, on a

$$s_1(C_-) = \bar{s}_0(V) \cap s_1(V)$$

et, selon les conventions usuelles, on oriente  $s_1(C_-)$  comme l'intersection ordonnée ci-dessus, en observant que le choix d'une orientation locale sur  $V$  en détermine une sur  $\bar{s}_0(V)$  et une sur  $s_1(V)$ , mais que ce choix n'influe pas sur l'orientation de l'intersection. En termes savants, les deux cycles que l'on intersecte sont à coefficients dans deux systèmes locaux dont le produit tensoriel est constant. Remarquons aussi que l'orientation de  $C_-$  est une fonction antisymétrique de  $(s_0, s_1)$ .

b) *Un morphisme  $\varphi : \nu(C_-, V) \rightarrow \xi_0 | C_-$  bien défini à isotopie près*

Il est donné par la situation d'intersection transversale décrite ci-dessus. Il est compatible avec les orientations dans le sens qu'une orientation locale étant choisie sur  $V$ , il en résulte des orientations locales des fibrés  $\nu(C_-, V)$  et  $\xi_0$ , et que pour ces orientations  $\varphi$  est positif. D'autre part le morphisme  $\varphi$  dépend symétriquement de la paire  $(s_0, s_1)$ ; on observera que cette affirmation a un sens car si  $\xi_1$  est le sous-fibré supplémentaire à  $s_1$ , on a l'égalité

$$\xi_0 | C_- = \xi_1 | C_-.$$

On peut aussi remarquer que cette symétrie est compatible avec l'antisymétrie de l'orientation de  $C_-$  car une orientation locale de  $V$  détermine des orientations locales opposées sur  $\xi_0 | C_-$  et sur  $\xi_1 | C_-$ .

*Remarques.* 1° La courbe  $C_+$ , qui n'est pas caractéristique du point de vue de l'homotopie des sections, est également  $\xi_0$ -orientée comme intersection ordonnée du sous-fibré en demi-droites positives engendré par  $s_0(V)$  avec  $s_1(V)$ ; l'orientation de  $C_+$  est symétrique pour  $n$  impair et antisymétrique pour  $n$  pair et la permutation de  $s_0$  et  $s_1$  multiplie par  $(-1)^{n-1}$  le morphisme

$$\nu(C_+, V) \rightarrow \xi_0 | C_+ = \xi_1 | C_+.$$

2° On peut étendre de façon évidente la notion de  $\xi_0$ -orientation au cas des surfaces orientées plongées dans  $V \times [0, 1]$ : si  $\Sigma$  est une telle surface, une

$\xi_0$ -orientation est un morphisme

$$\nu(\Sigma, V \times [0, 1]) \rightarrow \xi_0 \times [0, 1] | \Sigma$$

compatible avec les orientations locales.

1.2. *Le groupe de cobordisme  $\xi$ -orienté*

Soit  $\xi$  un  $(n-1)$ -sous-fibré de  $\tau^*$ . On définit  $\Omega_1^\xi(V)$  comme quotient de l'ensemble des 1-sous-variétés  $\xi$ -orientées de  $V$  par la relation d'équivalence suivante:  $(C_1, \varphi_1) \sim (C_2, \varphi_2)$  s'il existe une surface orientée  $\Sigma$  dans  $V \times [0, 1]$ , équipée d'un morphisme de  $\xi$ -orientation  $\Psi : \nu(\Sigma, V \times [0, 1]) \rightarrow \xi \times [0, 1] | \Sigma$ , telle que le bord orienté de  $\Sigma$  soit l'union de  $C_2$  et de  $-C_1$  et que  $\Psi |_{C_i} = \varphi$  ( $i = 1, 2$ ).

*Remarque fondamentale.* Soient  $(C, \varphi)$  une courbe  $\xi$ -orientée dans  $V$  et  $W$  un cobordisme élémentaire d'indice 1 orienté dans  $V \times [0, 1]$ , admettant  $C$  pour l'une de ses faces. Alors on peut toujours prolonger  $\varphi$  en une  $\xi$ -orientation de  $W$ ; en effet si  $U$  est le support de la modification, sur  $C \cap U$ , une  $\xi$ -orientation n'est rien d'autre qu'une orientation.

L'opération de la réunion disjointe de deux représentants induit au quotient une opération d'addition bien définie dès que  $n \geq 3$ , munissant  $\Omega_1^\xi(V)$  d'une structure de groupe abélien. Ceci est évident par position générale si  $n > 3$ ; si  $n = 3$  il faut essentiellement vérifier qu'une modification élémentaire de l'entrelacement de deux branches ne modifie pas la classe de  $\xi$ -cobordisme orienté; la suite des deux cobordismes élémentaires d'indice 1 schématisés sur la figure 1 prouve l'équivalence, compte tenu de la remarque fondamentale.

Enfin on peut parler de courbes  $\tau^*$ -orientées dans  $V \times [0, 1]$  et on a un morphisme de stabilisation  $\Omega_1^\xi(V) \rightarrow \Omega_1^{\tau^*}(V \times [0, 1])$  qui est clairement un isomorphisme si  $n \geq 4$ .

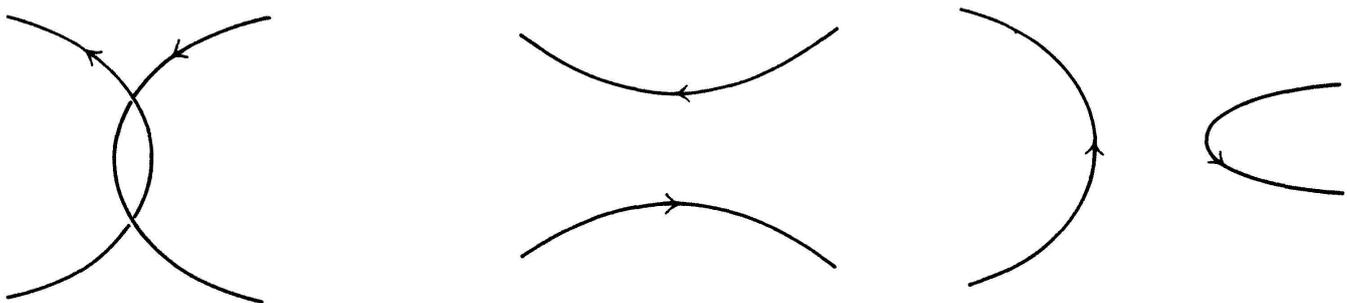


Figure 1

### 1.3. Le calcul de $\Omega_1^\xi(V)$

Par oubli de la  $\xi$ -orientation et en ne retenant que l'orientation usuelle, on construit un épimorphisme

$$\rho : \Omega_1^\xi(V) \rightarrow H_1(V; \mathbf{Z}).$$

Le groupe de cobordisme  $\xi$ -orienté est alors déterminé par la proposition suivante:

**PROPOSITION.** *Si  $n > 3$ , il existe un isomorphisme naturel*

$$T : \text{Ker } \rho \rightarrow \pi_1(0(n-1)).$$

*Démonstration.* Soit  $(C, \varphi)$  représentant un élément de  $\text{Ker } \rho$ . D'après la remarque fondamentale, ce représentant peut être choisi tel que  $C$  soit le bord d'un disque  $\Delta$ . Le choix de ce disque détermine une  $\xi$ -orientation  $\varphi_\Delta$  de  $C$  (elle est telle que  $(C, \varphi_\Delta) \sim 0$ ) et un élément  $\alpha_\Delta \in \pi_1(0(n-1))$  tel que  $\varphi = \alpha_\Delta \cdot \varphi_\Delta$  (l'opération est l'action naturelle de  $\pi_1(0(n-1))$  sur les classes d'isotopie de morphismes de  $(n-1)$ -fibrés au-dessus d'une courbe).

Pour  $n > 3$ ,  $\alpha_\Delta$  ne dépend ni du représentant  $(C, \varphi)$  ni du disque  $\Delta$ . Pour vérifier ce fait, considérons une surface orientable fermée  $\Sigma$ , plongée dans  $V \times \mathbf{R}$ , sur laquelle la fonction hauteur a tous ses points critiques dans  $V \times [0, 1]$  sauf un minimum de valeur négative et un maximum de valeur supérieure à 1. Notons

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \Sigma \cap V \times [0, 1], & \partial \Sigma_0 &= C_0 \cup C_1 \\ \Delta_0 &= \Sigma \cap V \times (-\infty, 0], & C_0 &= \partial \Delta_0 \\ \Delta_1 &= \Sigma \cap V \times [1, +\infty), & C_1 &= \partial \Delta_1. \end{aligned}$$

Considérons une  $\xi$ -orientation  $\varphi$  de  $\Sigma_0$  et ses restrictions  $\varphi_i$  à  $C_i$ . On a  $\varphi_i = \alpha_{\Delta_i} \varphi_{\Delta_i}$  et il s'agit de démontrer que:

$$\alpha_{\Delta_0} = \alpha_{\Delta_1}. \tag{1}$$

Il existe une  $\xi$ -orientation  $\varphi'$  de  $\Sigma_0$  telle que  $\varphi' | C_0 = \varphi_{\Delta_0}$  et  $\varphi' | C_1 = \alpha_{\Delta_0}^{-1} \cdot \varphi_1$ . En effet  $\Sigma_0$  a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles dans lequel la somme connexe de  $C_0$  et  $C_1$  représente un commutateur; alors l'abélianité de  $\pi_1(0(n-1))$  fait que l'on peut construire  $\varphi'$  à partir de  $\varphi$  en faisant agir  $\alpha_{\Delta_0}^{-1}$  sur  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  et en conservant  $\varphi$  au-dessus d'un système de courbes représentant un système libre de

générateurs de  $\pi_1(\Sigma_0)$ . D'ailleurs le même argument prouve que  $\varphi' | C_1$  est entièrement déterminé par l'unique donnée de  $\Sigma_0 \cup \Delta_0$ . Dès lors, l'égalité (1) revient à montrer que  $\Sigma$  est  $\xi$ -orientable.

Puisque  $\Sigma$  est stablement parallélisable, on a stablement un isomorphisme:  $\nu(\Sigma, V \times [0, 1]) \approx \tau^*(V \times [0, 1]) | \Sigma$  et d'autre part  $\xi \times [0, 1] | \Sigma \oplus \epsilon^2 \cong \tau^*(V \Omega 0, 1)$ . Si  $n - 1 > 2$ , on peut déstabiliser l'isomorphisme pour construire une  $\xi$ -orientation de  $\Sigma$ .

Maintenant si  $(C, \varphi) \sim (\partial\Delta, \alpha_\Delta \varphi_\Delta)$ , on peut définir  $T: \text{Ker } \rho \rightarrow \pi_1(0(n-1))$  par  $(C, \varphi) \mapsto \alpha_\Delta$ . Par construction même  $T$  est injectif. *cqfd*.

*Remarque.* Dans le cas  $n = 3$  (cas non stable),  $\text{Ker } \rho$  est isomorphe à un quotient de  $\pi_1(0(2))$ -comparer à l'indétermination de la seconde obstruction. Cela tient au fait que si  $S$  parcourt les sphères plongées de  $V$ , la classe d'Euler  $\xi | S$  peut être n'importe quel entier multiple de 2, tandis que si  $V$  est orientable toute surface orientable  $\Sigma$  dans  $V \times [0, 1]$  a un fibré normal trivial car la théorie des anses montre qu'à isotopie près  $\Sigma$  relève une surface immergée dans  $V$ .

#### 1.4. Le groupe de cobordisme $\xi_0$ -orienté et la théorie d'obstruction

En 1.2, à une section  $s$  en position générale par rapport à  $s_0$ , nous avons associé une courbe caractéristique  $\xi_0$ -orientée  $(C, \varphi)$ ; une homotopie générique de  $s$  modifie  $(C, \varphi)$  par cobordisme  $\xi_0$ -orienté. Nous avons donc une application bien définie

$$\mathcal{O}(\xi_0): \mathcal{S} \rightarrow \Omega_1^{\xi_0}(V)$$

où  $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des classes d'homotopie de sections sans zéro, ensemble pointé arbitrairement par la section  $s_0$ . D'autre part si  $\{s_t, t \in [0, 1]\}$  est une homotopie générique de  $s$  à  $s_0$ , le lieu des zéros de cette homotopie est une courbe de  $V \times [0, 1]$ ,  $\tau^*$ -orientée, dont la classe dans  $\Omega_1^{\tau^*}(V \times [0, 1])$  ne dépend que de celle de  $s$  dans  $\mathcal{S}$ . D'où une application

$$\mathcal{O}(s_0, \cdot): \mathcal{S} \rightarrow \Omega_1^{\tau^*}(V \times [0, 1]).$$

**PROPOSITION.** 1°  $\mathcal{O}(\xi_0)$  est une bijection.

2° Si  $n > 3$ ,  $\mathcal{O}(\xi_0) = \mathcal{O}(s_0, \cdot)$  via l'isomorphisme de stabilisation; le groupe  $\Omega_1^{\tau^*}(V \times [0, 1])$  agit alors simplement transitivement sur  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* La surjectivité de  $\mathcal{O}(\xi_0)$  se prouve par une construction de Thom-Pontrjagin. D'autre part chaque modification sphérique des courbes

caractéristiques par cobordisme élémentaire  $\xi_0$ -orienté se relève en une homotopie de la section selon les constructions classiques de chirurgie plongée, ce qui prouve l'injectivité. *cqfd.*

### *Identification de la première obstruction*

De façon précise  $\rho\mathcal{O}(\xi_0)(s_1) \in H_1(V; \mathbf{Z})$  s'identifie à la "première différence"  $d(s_0, s_1) \in H^{n-1}(V; \pi_{n-1}(S^{n-1}))$  via la dualité de Poincaré. On observera d'abord que la dualité de Poincaré est bien un isomorphisme d'un groupe sur l'autre puisque  $\pi_{n-1}(S^{n-1})$  est un système de coefficients  $\mathbf{Z}$ , tordu par l'orientation du fibré  $\tau^*$ . Pour se convaincre de l'identification de  $\rho\mathcal{O}(\xi_0)(s_1)$  avec  $d(s_0, s_1)$ , on se contentera d'observer que si  $\rho\mathcal{O}(\xi_0)(s_1) = 0$  on peut trouver une homotopie de  $s_0$  à  $s_1$  sur le  $(n-1)$ -squelette. En effet, si la courbe caractéristique de  $(s_0, s_1)$  est homologue à zéro, elle est équivalente au bord d'un 2-disque, par un cobordisme  $\xi_0$ -orienté qui modifie  $s_1$  par homotopie. Cette première homotopie conduit donc à une situation où la courbe caractéristique ne rencontre pas le  $(n-1)$ -squelette; alors l'homotopie barycentrique entre  $s_0$  et  $s_1$  est permise sur le  $(n-1)$ -squelette.

### 1.5. *La première obstruction et les classes d'Euler*<sup>1</sup>

Lorsque  $n$  est *impair*, il y a une obstruction évidente à homotoper la section  $s_1$  jusqu'à  $s_0$ : l'égalité des classes d'Euler  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  des fibrés supplémentaires  $\xi_0, \xi_1$ ; elles habitent aussi dans le groupe  $H^{n-1}(V; \tilde{\mathbf{Z}})$ , où les coefficients sont tordus par l'orientation.

**PROPOSITION.** *Les classes d'Euler  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont congrues modulo 2 et on a la formule  $2d(s_0, s_1) = \gamma_0 - \gamma_1$ .*

*Démonstration.* Notons  $i, j$  deux indices distincts de  $\{0, 1\}$  et  $\pi_i$  la projection naturelle de  $\tau^*$  sur  $\xi_i$ . Dans le fibré  $\xi_i$ ,  $\pi_i s_j$  est une section générique qui s'annule sur les courbes  $C_+$  et  $C_-$  (notations de 1.1). Le dual de Poincaré de  $\gamma_i$  est donné par le cycle  $[C_-] - [C_+]$  pour la  $\xi_i$ -orientation définie sur ces courbes et d'un autre côté  $d(s_0, s_1)$  est le dual de  $[C_-]$  pour la  $\xi_0$ -orientation. On a dit que la  $\xi_0$ -orientation de  $C_-$  est l'opposée de sa  $\xi_1$ -orientation, alors que, pour  $n$  impair, les deux orientations coïncident sur  $C_+$ . Ainsi si l'on calcule tout avec la  $\xi_0$ -orientation,  $\gamma_1$  est dual de  $-[C_-] - [C_+]$ . La formule s'en suit par combinaison linéaire.  $\square$

---

<sup>1</sup> Les paragraphes 1.5 et 1.6 ne sont pas nécessaires pour la démonstration du théorème II.

*Remarque.* D'après 1.4, on peut aussi calculer  $d(s_0, s_1)$  en induisant la classe de Thom de  $\tau^*$  par une homotopie (avec zéros) joignant  $s_0$  et  $s_1$  (voir 1.6). Cette méthode conduit à la formule

$$d(s_0, -s_0) = \gamma_0$$

qui, dans ce cas, est plus précise que la précédente. Il s'en suit un exemple (essentiellement le seul que je connaisse) de deux formes fermées non singulières non homotopes: soit  $F \hookrightarrow V \rightarrow S^1$  une fibration où  $F$  est une variété de caractéristique d'Euler non nulle; alors la classe d'Euler du fibré tangent aux fibres est non nulle; aussi la première différence entre  $p^*(d\theta)$  et  $p^*(-d\theta)$  est elle non nulle.

### 1.6. Calculs riemanniens sur le tore

D'une façon très générale, si  $U$  est une  $n$ -forme sur l'espace total  $E$  du cotangent  $\tau^*$ , à support concentré dans un petit tube autour de la section nulle  $j(V)$ , représentant la classe de Thom et si  $h$  est une homotopie entre deux sections  $s_0$  et  $s_1$ ,  $h^*U$  est une forme relative sur  $V \times [0, 1]$  et l'intégration de cette forme le long des segments  $[0, 1]$  fournit une  $(n-1)$ -forme fermée  $\int_{[0,1]} h^*U$  qui représente la première différence  $d(s_0, s_1)$ ; cette intégration induit en cohomologie l'isomorphisme

$$H^n(V \times [0, 1], V \times \{0, 1\}) \cong H^{n-1}(V).$$

Si on change l'homotopie, on change ce représentant par un cobord. On conviendra de choisir pour  $h$  l'homotopie  $(x, t) \rightarrow (1-2t)s_0(x)$  pour  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  suivie de  $(x, t) \rightarrow (2t-1)s_1(x)$  pour  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Faisons l'hypothèse

(\*)  $U$  est nulle en tout point de la section nulle.

Alors, si  $c(s)$  désigne la classe de  $\int_{[0,1]} S^*U$ , avec  $S(x, t) = ts(x)$ ,  $x \in V$ ,  $t \in [0, 1]$ , on a:

$$d(s_0, s_1) = c(s_1) - c(s_0).$$

Rappelons que le choix d'une connexion riemannienne détermine, selon un calcul établi par Bott-Chern [1] et repris par Marry-Verdier [9] une  $(n-1)$ -forme  $\sigma$  sur  $E - j(V)$ , appelée par ces derniers l'élément d'aire relatif canonique, dont les propriétés sont les suivantes:

1° Soit  $E_0$  l'espace total d'un quelconque fibré en sphères dans  $E$ ; si  $F$  est une fibre de  $E_0$ ,  $\int_F \sigma = 1$ .

2° Si  $\pi$  est la projection du fibré  $\tau^*$ , on a  $d\sigma = \pi^*\chi$ , où  $\chi$  est une forme d'Euler.

3° Sur le fibré en boules  $B$  bordé par  $E_0$ , il existe une forme de Thom  $U$  reliée à  $\chi$  et  $\sigma$  de la façon suivante:

i)  $\chi = j^*U$ .

ii) soit  $q$  l'application naturelle  $E_0 \times [0, 1] \rightarrow B$  qui identifie  $E_0 \times 0$  au bord de  $B$  et projette  $E_0 \times 1$  sur  $j(V)$  par  $\pi$ ; alors  $\sigma = \int_{[0,1]} q^*U$ .

Dans le cadre de l'hypothèse (\*),  $\sigma$  est une forme fermée et on a la formule

$$s^*\sigma = \int_{[0,1]} S^*U$$

forme que nous appellerons *la forme de  $\sigma$ -enlacement* de la section  $s$  avec la section nulle. Si  $V = T^n$ , l'hypothèse (\*) est satisfaite si l'on calcule la forme de Thom à partir de la connexion plate des coordonnées canoniques. De plus, si  $s_0$  est une forme linéaire, on a  $s_0^*\sigma = 0$ ; donc  $d(s_0, s)$  est la classe de  $s^*\sigma$ . Le théorème I affirme que si  $s$  est une *section lagrangienne* ne s'annulant pas,  $d(s_0, s) = 0$ , autrement dit, pour tout  $(n-1)$ -cycle  $\gamma$

$$\int_{\gamma} s^*\sigma = 0.$$

Cet énoncé est peut-être plus intéressant sous la forme suivante:

**PROPOSITION.** *Soit une section lagrangienne du cotangent de  $T^n$ ; soit  $\sigma$  l'élément d'aire canonique du cotangent pour la connexion plate. Si le long d'un certain  $(n-1)$ -cycle  $\gamma$ ,  $s$  ne s'annule pas et y a un  $\sigma$ -enlacement non trivial, alors il existe un zéro de  $s$  sur  $T^n$ .*

A titre d'exemple explicitons le cas  $n = 2$ . Utilisant les coordonnées canoniques  $x, y$  de  $T^2$  et  $x, p = \partial/\partial x, y, q = \partial/\partial y$  du cotangent, on a

$$\sigma = \frac{q dp - p dq}{p^2 + q^2}$$

Pour toute forme sans zéro  $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ , on peut construire par substitution dans  $\sigma$  la forme  $q dp - p dq / p^2 + q^2$  qui est fermée sur  $T^2$ ; si

$p(x, y) dx + q(x, y) dy$  est fermée, le théorème affirme que  $q dp - p dq/p^2 + q^2$  est une forme exacte.

## 2. Fibrations sur le Cercle avec une Fibre-base Donnée

2.0. THÉORÈME. Soient deux fibrations  $p_0, p_1: V \rightarrow S^1$  définies sur une variété fermée  $V$  de dimension  $n \geq 6$ . On suppose que pour un point-base  $\theta_0$  sur  $S^1$ , on a l'égalité des sous-variétés transversalement orientées  $p_0^{-1}(\theta_0) = p_1^{-1}(\theta_0)$ . Alors,  $d\theta$  désignant la 1-forme canonique du cercle, les champs  $\text{Ker } p_0^*(d\theta)$  et  $\text{Ker } p_1^*(d\theta)$  sont homotopes.

### 2.1. Nullité de la première différence

Si l'on coupe  $V$  le long de la fibre commune, on obtient un cobordisme (trivial)  $W$  équipé de deux fonctions sans point critique  $f_0, f_1: W \rightarrow \mathbf{R}$ , induites respectivement par  $p_0$  et  $p_1$ . Soit  $\bar{F}: W \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \times [0, 1]$  une famille à un paramètre de fonctions, joignant  $f_0$  et  $f_1$ , c'est-à-dire que  $\bar{F}(x, t)$  est de la forme  $(F(x, t), t)$  avec  $F(x, 0) = f_0(x)$  et  $F(x, 1) = f_1(x)$ . Si la famille est générique, le lieu singulier  $\Sigma$  est une courbe  $\tau^*$ -orientée donnée par  $df_t(x) = 0$ , où  $f_t = F|_{W \times \{t\}}$ . D'après 1.4 Proposition 2°,  $\Sigma$  est équivalente à la courbe caractéristique de la paire  $(p_0^*(d\theta), p_1^*(d\theta))$ . La nullité de la première différence résulte du lemme ci-dessous.

LEMME. Si  $\dim W \geq 6$  les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  sont joignables par un chemin de fonctions  $f_t, t \in [0, 1]$ , équipées de champs de pseudo-gradient<sup>1</sup>  $X_t$ , ayant la propriété suivante:

- 1° Les points critiques nés ensemble s'éliminent ensemble;
- 2° Si  $(c_t, c'_t)$  est une telle paire de points critiques, il existe une sélection continue  $\alpha_t$  de lignes des champs  $X_t$ , reliant  $c_t$  et  $c'_t$ ;
- 3° Lorsque  $c_t$  et  $c'_t$  sont des points de Morse, le long de  $\alpha_t$  les variétés stables et instables de  $X_t$  se coupent transversalement.

*Démonstration.* Commençons par le cas où  $W = T^{n-1} \times [0, 1]$ , le seul utile pour le théorème I. Puisque  $Wh_2(\mathbf{Z}^{n-1}) = 0$ , d'après Hatcher-Wagoner [5], on peut choisir le chemin  $f_t$  avec un graphique (lieu des valeurs critiques dans  $\mathbf{R} \times [0, 1]$ ) du type indiqué sur la figure 2.

<sup>1</sup> Voir la définition des champs de pseudo-gradient dans [5].

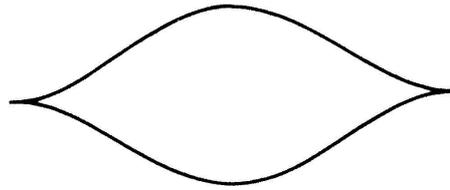


Figure 2

D'après la classification des chemins ayant un graphique de ce type (voir [3]), il existe une sélection continue de lignes de pseudo-gradient joignant à chaque instant les deux points critiques et satisfaisant à la condition de transversalité  $3^\circ$ .

Dans le cas général, on peut prendre le chemin de fonctions dans l'espace  $\mathcal{F}_i$  des fonctions ordonnées à deux indices critiques  $i$  et  $i+1$ ,  $2 \leq i \leq n-3$ , commençant par les naissances de points critiques,  $t \in [0, \frac{1}{3}]$ , se poursuivant par les croisements de valeurs critiques,  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  et se terminant par l'élimination des paires de points critiques,  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ . Puis on modifie le chemin de sorte que les points critiques nés ensemble meurent ensemble; pour cela on utilise la procédure suivante, schématisée par des déformations de graphique: si un point critique  $c_1$  d'indice  $i+1$  naît avec un point critique  $c'_1$  et meurt avec  $c'_2 \neq c'_1$ , on repousse l'élimination de  $c'_1$  au-delà de celle de  $c'_2$ ; alors le graphique a la configuration (1), déformable en (2) par apparition de queue d'aronde, puis en (3) par unicité des naissances (voir Fig. 3; les lemmes sont prouvés dans [2]).

Maintenant on cherche une sélection continue de lignes de pseudo-gradient. Pour cela on munit le chemin de fonctions d'une famille de champs de pseudo-gradient  $X_t$  telle que les naissances et les morts soient indépendantes au sens de Hatcher–Wagoner; la numérotation des points critiques et l'orientation des nappes sont faites de sorte que la matrice d'intersection de  $f_{1/3}$  soit l'identité; alors celle de  $f_{2/3}$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont des unités triviales  $\epsilon g$  de  $\mathbf{Z}[\pi]$ , où  $\pi$  est le groupe fondamental,  $\epsilon \in \{+, -\}$ ,  $g \in \pi$ . Si le  $k$ -ième terme de la diagonale n'est pas  $\pm 1$ , alors la courbe décrite par la  $k$ -ième paire de points critiques n'est pas homotope à zéro. Heureusement, on peut gréffer sur le chemin de fonctions un lacet convenable d'origine  $f_{2/3}$  et ainsi se ramener au cas où la matrice de  $f_{2/3}$  est l'identité (voir [4] ou [5]; l'hypothèse

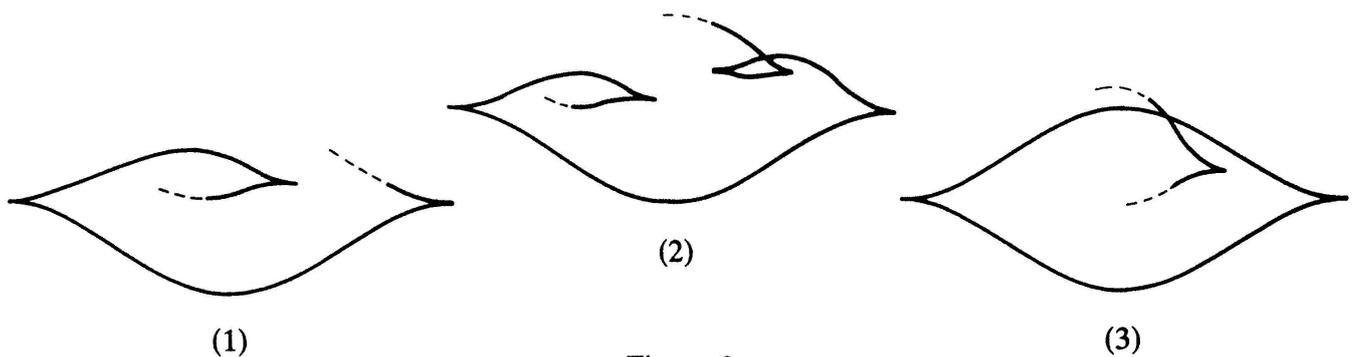


Figure 3

dimensionnelle intervient ici, la construction d'un tel lacet nécessitant le lemme de la queue d'aronde; l'interprétation algébrique de ce lacet est la suivante: une matrice diagonale dont les coefficients sont des unités triviales de  $\mathbf{Z}[\pi]$  et qui est produit de matrices élémentaires peut se relever dans le groupe de Steinberg  $St(\mathbf{Z}[\pi])$  en un élément dont la classe est nulle dans  $Wh_2(\pi)$ .

Suivant la terminologie de Hatcher-Wagoner, appelons  $j/i$ -intersection toute ligne de  $X_t$  descendant d'un point critique d'indice  $j$  jusqu'à un point critique d'indice  $i$ . Génériquement les  $i+1/i+1$ -intersections et les  $i/i$ -intersections n'existent qu'à des instants isolés  $t_1, \dots, t_k, \dots, t_q \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ; au franchissement de ces instants, la structure des  $i+1/i$ -intersections est modifiée selon la règle expliquée dans [5] p. 249 et suivantes; mais, comme  $1 \leq i \leq n-2$ , on peut déformer la famille  $X_t$  pour que toute  $i+1/i$ -intersection transversale existant juste avant  $t_k$  persiste après  $t_k$ . Ainsi la sélection continue qui est évidente et unique pour  $t \in [0, \frac{1}{3}]$ , se prolonge naturellement pour  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  avec la condition de transversalité 3°).

Soit  $(c, c')$  une paire de points critiques à éliminer de la fonction  $f_{2/3}$ ; soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_q$  les  $i+1/i$ -intersections les joignant. Disons que  $\alpha_0$  est l'arc sélectionné. Puisque la matrice d'intersection est l'identité, on peut, par le procédé de Whitney déformer  $X_{2/3}$  jusqu'à éliminer  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  et ne conserver que  $\alpha_0$ ; ce nouveau champ  $X'_{2/3}$  de pseudo-gradient de  $f_{2/3}$  permet de construire une élimination de  $(c, c')$  pour laquelle la sélection continue se prolonge. Si cette élimination n'est pas celle indiquée par le chemin  $f_t$ ,  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ , on utilise comme dans le cas du tore la classification des chemins d'élimination pour constater que la sélection continue, compatible avec un chemin d'élimination, est compatible avec tous les chemins d'élimination. *cqfd*.

## 2.2. Nullité de la seconde obstruction

La  $\tau^*$ -orientation  $\varphi$  du lieu des points critiques est donnée en coordonnées locales par la matrice

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t), \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(x, t) \right).$$

Regardons, comme (2.1) nous le permet, le lieu d'une paire de points critiques  $(c_i, c'_i)$  d'indice respectif  $i+1$  et  $i$ , joints par une sélection continue  $\alpha_t$  de lignes des champs  $X_t$ . Dans  $W \times [0, 1]$  la collection des  $\alpha_t$  engendre un 2-disque  $\Delta$ . En tout point  $(x, t) \in \partial\Delta$ , notons  $q_t$  la forme quadratique définie par la fonction  $f_t$  sur  $T_x W \times \{t\}$ ; elle est de rang  $n$  sauf aux deux sommets de  $\partial\Delta$ , points critiques de la  $t$ -projection de  $\partial\Delta$ ; en ces points, correspondants aux valeurs  $t_0$  et  $t_1$  du

paramètre, son rang est  $n - 1$  et son noyau est la tangente à  $\partial\Delta$ . Pour  $(x, t) \in \partial\Delta$ ,  $t \neq t_0, t_1$ , on définit  $T'_{(x,t)}W$  comme le sous-espace de dimension  $n - 1$  orthogonal à  $\alpha_t$  par rapport à la forme quadratique  $q_t$ . Lorsque  $t \rightarrow t_0$ ,  $T'_{(c'_0,t)}W$  et  $T'_{(c_0,t)}W$  ont la même limite qui est un supplémentaire au noyau de  $q_{t_0}$ ; il en est de même lorsque  $t \rightarrow t_1$ . On observe que pour tout  $(x, t) \in \partial\Delta$ ,  $q_t$  induit sur  $T'_{(x,t)}W$  une forme quadratique non dégénérée d'indice  $i$ ; d'autre part le champ  $T'_{(x,t)}W$  se prolonge à  $\Delta$  en un champ de  $(n - 1)$ -plans tangents à  $W$  et supplémentaire à  $\alpha_t$ .

Pour montrer que la  $\tau^*$ -orientation  $\varphi$  coïncide à isotopie près avec celle induite pour  $\Delta$ , il suffit de montrer qu'il existe un champ de  $i$ -plans  $P_{(x,t)} \subset T'_{(x,t)}W$ , tels que, pour  $(x, t) \in \partial\Delta$ ,  $q_t$  soit définie négative sur  $P_{(x,t)}$ .

On obtient le champ  $P_{(x,t)}$  de la façon suivante: notons  $D_t$  la nappe de  $X_t$  descendant de  $c_t$ ; l'hypothèse de transversalité (2.1 3°) signifie que l'on peut parler du  $i + 1$ -plan tangent à  $D_t$  au point  $c'_t$ . Alors on pose, pour tout  $(x, t) \in \Delta$

$$P_{(x,t)} = T'_{(x,t)}W \cap T_{(x,t)}D_t.$$

si  $x = c_t$ , il est clair que  $q_t$  est définie négative sur  $P_{(x,t)}$ . Si  $x = c'_t$ ,  $q_t$  est d'indice  $i$  sur  $T_{(x,t)}D_t$  et la tangente à  $\alpha_t$  est un sous-espace "positif" maximal;  $P_{(x,t)}$  est son  $q_t$ -orthogonal et est donc un sous-espace "négatif". *cqfd.*

### 3. Démonstration du Théorème II

Soient  $\omega_0$  et  $\omega_1$  deux formes de degré 1 fermées non singulières et *cohomologues* sur une variété fermée  $V$  de dimension  $n$ . Si pour  $V = T^n$ , on sait prouver que  $\text{Ker } \omega_0 \sim \text{Ker } \omega_1$ , alors le théorème I s'en suivra, car les formes linéaires ont leurs noyaux tous homotopes (champs constants!). D'autre part la classe d'homotopie du noyau étant inchangée par approximation et par multiplication de la forme par un scalaire positif, on peut supposer que la classe de cohomologie de  $\omega_i$  est entière. D'après Tischler [14], nous sommes alors dans la situation de fibration sur le cercle: pour  $i = 0, 1$ , il existe une fibration  $p_i: V \rightarrow S^1$  telle que  $p_i^*(d\theta) = \omega_i$ , où  $d\theta$  est la forme canonique de  $S^1$ ; de plus  $p_0$  et  $p_1$  sont deux applications homotopes. Désignons par  $H$  le groupe fondamental de la fibre-base; comme sous-groupe de  $\pi_1(V)$ , il est le même dans les deux cas.

3.1. (THÉORÈME II). *Si  $n \geq 6$  et si  $Wh_1(H) = 0$ , on a  $\text{Ker } \omega_0 \sim \text{Ker } \omega_1$ .*

Le théorème I est donc essentiellement un cas particulier de cette proposition puisque  $Wh_1(\mathbf{Z}^{n-1}) = 0$ .

*Démonstration.* D'après [8], il existe un difféomorphisme  $G$  de  $V \times [0, 1]$ , tel que  $G_0 = Id$  et que  $p_1 G_1$  ait une fibre en commun avec  $p_0$ . D'après le théorème 2.0.  $\text{Ker } \omega_0 \sim \text{Ker } G_1^* \omega_1$ . Il ne reste donc plus qu'à démontrer qu'une pseudo-isotopie à la source ne modifie pas la classe d'homotopie du champ de plans (voir ci-dessous). *cqfd.*

3.2. PROPOSITION. Soient  $g$  un difléomorphisme de  $V$ , pseudo-isotope à l'identité, et  $\omega$  une 1-forme fermée non singulière sur  $V$ . Si  $\dim V \geq 5$ , on a  $\text{Ker } \omega \sim \text{Ker } g^* \omega$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  une pseudo-isotopie de  $g$  à l'identité. Convenant de considérer  $\omega$  aussi bien comme une forme sur  $V \times [0, 1]$ , la forme  $G^* \omega$  fournit un chemin de formes singulières  $\omega_t$ , joignant  $\omega$  et  $g^* \omega$ : si  $j_t$  est l'inclusion  $V \times \{t\} \rightarrow V \times [0, 1]$ , on prend  $\omega_t = j_t^* G^* \omega$ . Dans le cas générique, la courbe des zéros de ce chemin est  $C = C' \cup C''$ ,

$$C' = \{(x, t) \mid G^* \omega(x, t) = \lambda dt, \lambda > 0\}$$

$$C'' = \{(x, t) \mid G^* \omega(x, t) = \lambda dt, \lambda < 0\}.$$

Ces courbes ont des  $\tau^*$ -orientations naturelles, respectivement  $\varphi, \varphi', \varphi''$  (observer que  $\tau^*$  est le fibré supplémentaire à la section  $dt$  dans le cotangent de  $V \times [0, 1]$ ). La classe de  $(C, \varphi)$  dans  $\Omega_1^*(V \times [0, 1])$ , qui est l'obstruction à déformer  $\text{Ker } \omega$  sur  $\text{Ker } g^* \omega$  d'après 1.4, se décompose comme suit:

$$[(C, \varphi)] = [(C'', \varphi'')] - [(C', \varphi')]$$

(voir une formule analogue dans la démonstration 1.5).

La famille  $\{G^*((1-u)\omega + u dt); u \in [0, 1]\}$  fournit un cobordisme  $\tau^*$ -orienté de  $C''$  avec la courbe

$$\gamma'' = \{(x, t) \mid G^* dt(x, t) = \lambda dt, \lambda < 0\}$$

dont la  $\tau^*$ -orientation naturelle est notée  $\Psi''$ . Il faut remarquer que ce cobordisme reste à l'intérieur de  $V \times [0, 1]$ , car au voisinage du bord on a  $G^* dt = dt$ . On a donc

$$(C'', \varphi'') \sim (\gamma'', \Psi'').$$

De même la famille  $\{G^*((1-u)\omega - u dt); u \in [0, 1]\}$  fournit un cobordisme  $\tau^*$ -orienté de  $C'$  avec la courbe

$$\gamma' = \{(x, t) \mid G^*(-dt)(x, t) = \lambda dt, \lambda > 0\}$$

dont la  $\tau^*$ -orientation naturelle est notée  $\Psi'$ . On a donc

$$(C', \varphi') \sim (\gamma', \Psi').$$

Bien sûr, ensemblistement  $\gamma' = \gamma''$ . Mais on déduit l'une de l'autre via l'antipodie radiale du cotangent de  $V \times [0, 1]$  qui change l'orientation par  $(-1)^{n+1}$ . Donc

$$[(\gamma', \Psi')] = (-1)^{n+1}[(\gamma'', \Psi'')].$$

Pour  $n$  impair, la nullité de  $[(C, \varphi)]$  est formelle. Pour  $n$  pair, on a  $[(C, \varphi)] = 2[(\gamma'', \Psi'')]$ ; or  $[(\gamma'', \Psi'')]$  n'est autre que l'obstruction à déformer  $\text{Ker } G^* dt$  en  $\text{Ker } dt$  par une homotopie fixe sur le bord; c'est donc la situation du paragraphe 2 et d'après le théorème 2.0,  $(\gamma'', \Psi'') \sim 0$ . *cqfd*.

### 3.3. Démonstration du corollaire

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage sans holonomie sur  $T^n$ , défini par une 1-forme  $\omega$  ne vérifiant que la condition d'intégrabilité  $\omega \wedge d\omega = 0$ . Soit  $\mathcal{O}$  la famille d'orbites d'un champ de vecteurs transversal à  $\mathcal{F}$ . D'après le théorème de Sacksteder-Imanishi [7], il existe un feuilletage  $\mathcal{F}'$ , défini par une forme fermée  $\omega'$ , transversale à  $\mathcal{O}$ , et un *homoéomorphisme*  $h$  conjugant  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Puisque  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont transversaux à un même champ de vecteurs, la combinaison barycentrique  $t\omega + (1-t)\omega'$  ne s'annule jamais; donc on a  $\text{Ker } \omega \sim \text{Ker } \omega'$ .

Je remercie Harold Rosenberg d'avoir attiré mon attention sur l'article de Imanishi.

### Appendice<sup>(1)</sup>—Démonstration de A. Douady pour le théorème I

Si  $\omega$  et  $\omega_0$  sont deux formes linéaires, la proposition est claire: les sections  $s_\omega$  et  $s_{\omega_0}$  qu'elles définissent dans le cotangent apparaissent comme constantes dans la trivialisatation canonique. On peut donc se limiter à  $\omega_0$  linéaire et  $\omega$  cohomologue à

<sup>(1)</sup> Extrait d'un exposé au séminaire d'Orsay sur le fibré cotangent (février 1976).

$\omega_0$ ; si  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{\omega}_0$  désignent les relèvements sur  $\mathbf{R}^n$ ,  $\tilde{\omega}_0 = dL$  où  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction linéaire,  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + dg$  où  $g$  est une fonction périodique. Le théorème revient à démontrer:

(\*)  $\text{grad}(L + g)$  est homotope à  $\text{grad} L$  parmi les champs de vecteurs périodiques ne s'annulant pas sur  $\mathbf{R}^n$ .

Evidemment si le produit scalaire  $\langle \text{grad}(L + g), \text{grad} L \rangle$  est positif, le chemin barycentrique donne l'homotopie. On se ramène à cette situation grâce aux déformations suivantes: on commence par une homothétie pour remplacer  $\text{grad}(L + g)$  par  $X = \text{grad}(L + g) / \|\text{grad}(L + g)\|^2$ ; puisque  $X$  est périodique, il admet un flot global  $\psi(x, t)$ :

$$X(x) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0), \quad \psi(x, 0) = x.$$

On vérifie que  $(L + g)(\psi(x, t)) - (L + g)(x) = t$ . Puisque  $|(L + g)(x) - L(x)| \leq m = \max g$ , on voit que si  $t > 2m$ , on a

$$L(\psi(x, t)) - L(x) > 0$$

c'est-à-dire  $t > 2m \Rightarrow \langle \psi(x, t) - x, \text{grad} L \rangle > 0$ .

Posons  $X_t(x) = 1/t[\Psi(x, t) - x]$ ; c'est un champ périodique qui ne s'annule jamais; en effet  $X$  n'a pas d'orbite fermée puisque la fonction  $L + g$  est strictement croissante sur les orbites. Lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $X_t \rightarrow X$  et pour  $t > 2m$ ,  $\langle X_t, \text{grad} L \rangle > 0$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] R. BOTT et S. S. CHERN, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. (1965), 71-112.
- [2] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970), 185-353.
- [3] A. CHENCINER et F. LAUDENBACH, *Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe*, Ann. Scient. E.N.S. 3 (1970), 409-478.
- [4] A. CHENCINER et F. LAUDENBACH, *Le  $Wh_2$  et le théorème de la pseudo-isotopie dans le cas simplement connexe*, preprint 1972, Centre Math. Ecole Polytechnique, Paris (Première partie de Publ. Math. Orsay no. 17).

---

<sup>(1)</sup> Hatcher a signalé que son calcul de la seconde obstruction était faux en général. Mais il reste juste en particulier dans le cas du tore.

- [5] A. HATCHER et J. WAGONER, *Pseudo-isotopies of compact manifolds*,<sup>(1)</sup> Astérisque 6 (1973), Soc. Math. France.
- [6] H. HENDRIKS, *Sur les équivalences d'homotopie en dimension 3*, thèse, Orsay 1975.
- [7] H. IMANISHI, *On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy*, J. Math. Kyoto Univ., 14-3 (1974), 607-634.
- [8] F. LAUDENBACH, *Submersions sur le cercle*, Bull. Soc. Math. France (à paraître).
- [9] P. MARRY et J. L. VERDIER, *Quelques problèmes d'intersection en géométrie riemannienne*, preprint, E.N.S., Paris.
- [10] J. MOSER, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 286-294.
- [11] H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Comptes rendus Acad. Sc. 90 (1880), 673-675.  
I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math. 24 (1901), 1-88.
- [12] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, *Topological equivalence of Reeb foliations*, Topology 9 (1970), 231-242.
- [13] R. SACKSTEDER, *Foliations and pseudo-groups*, Amer. J. of Math. 87 (1965), 79-102.
- [14] D. TISCHLER, *On fibering certain foliated manifolds over  $S^1$* , Topology 9 (1970), 153-154.
- [15] F. WALDHAUSEN, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [16] J. WOOD, *Foliations of codimension one*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 1107-1111.

Université de Paris XI  
Centre d'Orsay, Mathématique 425  
F-91405 Orsay

Reçu Août, 1975