

Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen.

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **55 (1980)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-42384>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ueber die Dimension der Eigenräume des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

Ernst Specker zum 60. Geburtstag gewidmet

1

Eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g \geq 2$ besitzt genau eine mit der konformen Struktur verträgliche Metrik konstanter Krümmung -1 : die Poincarémetrik. Es sei Δ der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator und

$$\mathcal{E}_\lambda = \{f \in C^2(\mathcal{F}) \mid -\Delta f = \lambda f\}, \quad \lambda \geq 0,$$

wobei nur *reellwertige* Eigenfunktionen zugelassen werden. Es ist bekannt ([1]–[3]), dass

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathcal{E}_\lambda = (g-1)t + O(t^{1/2}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass jedenfalls $\dim \mathcal{E}_\lambda = O(\lambda^{1/2})$. Diese bloss infinitäre Aussage kann folgendermassen⁽¹⁾ präzisiert werden:

Es sei

$$\delta = \min_{p \in \mathcal{F}} d(p), \quad d(p) = \max_{q \in \mathcal{F}} \text{dist}(p, q).$$

Dann gilt für $\lambda \geq 0$:

$$\dim \mathcal{E}_\lambda < e^\delta (\lambda + \tfrac{1}{2})^{1/2} \left(1 + \frac{e(3\delta + 1)}{(2\lambda + 1)^{1/4}} \right) + 1.$$

(Zwischen δ und dem Durchmesser δ^* von $\mathcal{F}$ besteht offenbar die Relation $\delta^*/2 \leq \delta \leq \delta^*$).

2. Beweis

0. Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}, \tag{1}$$

¹ Siehe auch [4], [5].

welche die Krümmung -1 besitzt. Es sei $\rho(0, z)$ die hyperbolische Distanz der Punkte $0, z$, und

$$K_r = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq r\}.$$

Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(0, z), \quad \vartheta = \arg z$$

ein, so wird $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\vartheta^2$. Daher erhält man für das Flächenelement und die Beltrami-Operatoren der Metrik (1):

$$d\omega = \sinh \rho d\rho d\vartheta \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \operatorname{ctgh} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \sinh^{-2} \rho \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad (3)$$

$$\nabla = |\operatorname{grad}|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 + \sinh^{-2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)^2 \quad (4)$$

1. Wir wählen auf $\mathcal{F}$ einen Punkt p mit $d(p) = \delta$. Weil das Geschlecht von $\mathcal{F}$ grösser als eins ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\pi: E \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\pi(0) = p$. Verpflanzen wir die Metrik (1) mit dieser Abbildung, so erhalten wir gerade die in der Einleitung charakterisierte Poincarémetrik von $\mathcal{F}$. Es sei Γ die zu π gehörige Gruppe der Deckisometrien von E . Dann ist

$$D = \{z \in E \mid \rho(0, z) \leq \rho(T(0), z) \forall T \in \Gamma\}$$

ein Fundamentalbereich von Γ , und es gilt für alle $z \in D$:

$$\operatorname{dist}(p, \pi(z)) = \rho(0, z).$$

Daher wird $\operatorname{Max}_{z \in D} \rho(0, z) = d(p) = \delta$:

$$D \subset K_\delta. \quad (5)$$

2. Wir definieren für $f \in \mathcal{E}_\lambda$

$$\hat{f}(\rho, \vartheta) = (f \circ \pi)(z) \quad (6)$$

und beweisen folgendes

LEMMA. Zu jeder ganzen Zahl k gibt es ein lineares Funktional $c_k: \mathcal{E}_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} d\vartheta = c_k(f) F_k(\rho).$$

Dabei ist $y = F_k(\rho)$ die einzige Lösung der Gleichung

$$y'' + (\operatorname{ctgh} \rho) y' + (\lambda - k^2 \sinh^{-2} \rho) y = 0 \quad (7)$$

in $(0, \infty)$ mit $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-|k|} y(\rho) = 1$. Da $F_k = F_{-k}$ reellwertig ist, gilt

$$\overline{c_k(f)} = c_{-k}(f) \quad \forall f \in \mathcal{E}_\lambda. \quad (8)$$

Beweis. Wegen (6) und (3) gilt für jedes $f \in \mathcal{E}_\lambda$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \hat{f} + \operatorname{ctgh} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{f} + \sinh^{-2} \rho \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \hat{f} + \lambda \hat{f} = 0.$$

Daraus ergibt sich sofort, dass

$$G(\rho) := \int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} d\vartheta, \quad \rho > 0,$$

eine Lösung der Gleichung (7) ist. Diese Gleichung hat an der Stelle $\rho = 0$ eine reguläre Singularität mit den Exponenten k und $-k$. Daher besitzt sie genau eine Lösung

$$F_k(\rho) = \rho^{|k|} h_k(\rho), \quad h_k \in C^2[0, \infty), \quad h_k(0) = 1. \quad (9)$$

(F_k ist somit reellwertig und es gilt $F_{-k} = F_k$). Die Wronski-Determinante

$$W = F_k G' - F'_k G \quad (10)$$

ist Lösung der Gleichung $W' + (\operatorname{ctgh} \rho) W = 0$. Daher wird

$$W(\rho) = \alpha / \sinh \rho \quad (11)$$

mit einer passenden Konstanten α . Aus (9)–(11) ergibt sich:

$$\rho^{|k|+1} G'(\rho) = |k| \rho^{|k|} G + \rho^{|k|+1} G h'_k / h_k + \alpha \rho / h_k \sinh \rho.$$

Da G beschränkt ist, folgt hieraus

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{|k|+1} G'(\rho) = \alpha.$$

Daraus schliessen wir, dass $\alpha = 0$ sein muss, da sonst G nicht beschränkt sein könnte. Somit verschwindet die Wronski-Determinante im ganzen Intervall $(0, \infty)$: G und F_k sind linear abhängig. Damit ist aber das Lemma bewiesen.

3. Da die rechte Seite der zu beweisenden Ungleichung grösser als eins ist, dürfen wir gleich annehmen, dass

$$\dim \mathcal{E}_\lambda = 2n \text{ oder } 2n + 1, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Wir zeigen nun: Es gibt eine Eigenfunktion $f \in \mathcal{E}_\lambda$ derart, dass

$$\int_D \hat{f}^2 d\omega = 1, \quad (13)$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} d\vartheta = 0 \quad \forall \rho > 0, \quad |k| \leq n-1. \quad (14)$$

In der Tat: Es gibt Eigenfunktionen $f_1, \dots, f_{2n} \in \mathcal{E}_\lambda$ mit

$$\int_D \hat{f}_j \hat{f}_l d\omega = \delta_{jl} \quad 1 \leq j, l \leq 2n.$$

Machen wir für die gesuchte Funktion den Ansatz

$$f = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j f_j, \quad \alpha_j \in \mathbf{R}, \quad (15)$$

so folgt aus dem Lemma:

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\rho, \vartheta) e^{ik\vartheta} d\vartheta = \left(\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j \right) F_k(\rho).$$

Das homogene System

$$\sum_{j=1}^{2n} c_k(f_j) \alpha_j = 0, \quad |k| \leq n-1$$

besteht aus $2n-1$ linearen Gleichungen für die $2n$ Unbekannten α_j . Daher besitzt es eine nicht triviale Lösung $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in \mathbf{C}$, und somit wegen (8) sogar eine reelle Lösung mit $\sum \alpha_j^2 = 1$. Die zugehörige Funktion (15) hat nun die gewünschten Eigenschaften.

4. Für diese Funktion f definieren wir jetzt

$$A(r) = \int_{K_r} \hat{f}^2 d\omega, \quad B(r) = \int_{K_r} \nabla \hat{f} d\omega. \quad (16)$$

Dann ist nach (2)

$$A(r) = \int_0^r a(\rho) \sinh \rho d\rho, \quad B(r) = \int_0^r b(\rho) \sinh \rho d\rho \quad (17)$$

mit

$$a(\rho) = \int_0^{2\pi} \hat{f}^2(\rho, \vartheta) d\vartheta, \quad b(\rho) = \int_0^{2\pi} (\nabla \hat{f})(\rho, \vartheta) d\vartheta, \quad (18)$$

und wegen (4) gilt:

$$b(\rho) \geq \sinh^{-2} \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta. \quad (19)$$

Aus (14) folgt nun aber, dass

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right)^2 d\vartheta \geq n^2 \int_0^{2\pi} \hat{f}^2 d\vartheta.$$

Daher folgt aus (19):

$$b(\rho) \geq n^2 (\sinh \rho)^{-2} a(\rho) \geq n^2 (\sinh r)^{-2} a(\rho) \quad \text{für } 0 < \rho \leq r,$$

und somit

$$B(r) \geq n^2 (\sin r)^{-2} A(r). \quad (20)$$

Aus

$$\Delta(\hat{f}^2) = 2\hat{f}\Delta\hat{f} + 2\nabla\hat{f}, \quad \Delta\hat{f} = -\lambda\hat{f}$$

und (3) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \hat{f}^2 + \operatorname{ctgh} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{f}^2 + \sinh^{-2} \rho \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \hat{f}^2 + 2\lambda \hat{f}^2 = 2\nabla\hat{f}.$$

Daraus und aus (18) ergibt sich:

$$a''(\rho) + (\operatorname{ctgh} \rho) a'(\rho) + 2\lambda a(\rho) = 2b(\rho),$$

oder, nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\sinh \rho$:

$$(a'(\rho) \sinh \rho)' + 2\lambda a(\rho) \sinh \rho = 2b(\rho) \sinh \rho.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$a'(r) \sinh r + 2\lambda A(r) = 2B(r). \quad (21)$$

Nach (17) ist aber

$$A''(r) = a'(r) \sinh r + a(r) \cosh r. \quad (22)$$

Aus (20)–(22) ergibt sich:

$$A''(r) + 2\lambda A(r) \geq 2n^2 (\sinh r)^{-2} A(r). \quad (23)$$

5. Es sei jetzt

$$R = \delta + y, \quad (24)$$

wobei $y > 0$ später geeignet gewählt werden wird. Dann folgt aus (23):

$$A''(r) - \mu A(r) \geq 0 \text{ in } [\delta, R] \quad (25)$$

mit

$$\mu = 2(n^2 \sinh^{-2} R - \lambda). \quad (26)$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\mu > 0$ und setzen

$$A(r) = F(r) \cosh \sqrt{\mu}(r - \delta). \quad (27)$$

Dann ist

$$F(\delta) = A(\delta), \quad F'(\delta) = A'(\delta) = a(\delta) \sinh \delta \geq 0, \quad (28)$$

und aus (25) ergibt sich:

$$F''(r) \cosh \sqrt{\mu}(r - \delta) + 2\sqrt{\mu} F'(r) \sinh \sqrt{\mu}(r - \delta) \geq 0 \text{ in } [\delta, R]. \quad (29)$$

Setzen wir weiter

$$F'(r) = h(r) \cosh^{-2} \sqrt{\mu}(r - \delta), \quad (30)$$

so wird $h(\delta) = F'(\delta) \geq 0$, und aus (29) ergibt sich, dass $h' \geq 0$ in $[\delta, R]$. Folglich ist $h \geq 0$ in $[\delta, R]$. Daraus folgt nach (30), (28) und (27):

$$A(R) \geq A(\delta) \cosh \sqrt{\mu}(R - \delta) = A(\delta) \cosh \sqrt{\mu}y.$$

Nach (5), (13) und (16) ist aber $A(\delta) \geq 1$ und somit

$$A(R) \geq \cosh \sqrt{\mu}y. \quad (31)$$

6. Nun schätzen wir $A(R)$ nach oben ab: Sei

$$\Gamma' = \{T \in \Gamma \mid T(D) \cap K_R \neq \emptyset\}, \quad m = \text{card } \Gamma'.$$

Dann gilt

$$A(R) \leq m, \quad (32)$$

da die Fundamentalbereiche $T(D)$, $T \in \Gamma'$, die Kreisscheibe K_R überdecken. Weil diese Bereiche paarweise nicht überlappen und wegen (5) in $K_{R+2\delta}$ enthalten sind, so gilt:

$$m \int_D d\omega \leq \int_{K_{R+2\delta}} d\omega = 2\pi(\cosh(R + 2\delta) - 1).$$

Daraus folgt wegen

$$\begin{aligned} \int_D d\omega &= 4\pi(g - 1), \quad g \geq 2: \\ m &< \cosh(R + 2\delta) = \cosh(y + 3\delta). \end{aligned} \quad (33)$$

Aus (31)–(33) schliessen wir nun, dass $\sqrt{\mu}y < y + 3\delta$. Daraus und aus (26) ergibt sich:

$$n^2 \sinh^{-2} R < \lambda + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\delta}{y}\right)^2, \quad R = \delta + y. \quad (34)$$

Dabei hatten wir angenommen, dass $\mu > 0$. Wenn aber $\mu \leq 0$, so ist nach (26) sogar $n^2 \sinh^{-2} R \leq \lambda$. Somit gilt die Ungleichung (34) ausnahmslos für jedes $y > 0$.

7. Für $\lambda \geq 0$, $y > 0$ gilt:

$$\lambda + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\delta}{y}\right)^2 \leq \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{a}{y}\right)^2 \quad (35)$$

mit

$$a = \frac{3\delta}{(2\lambda + 1)^{1/2}} \leq 3\delta. \quad (36)$$

Aus (34) und (35) folgt nun:

$$2n < e^{\delta}(\lambda + \tfrac{1}{2})^{1/2} e^y \left(1 + \frac{a}{y}\right), \quad y > 0. \quad (37)$$

Jetzt wird $y > 0$ so gewählt, dass die rechte Seite minimal wird. Dieses y ist Lösung der Gleichung

$$1 + \frac{a}{y} - \frac{a}{y^2} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{y} = y + a \quad (38)$$

$$y = \tfrac{1}{2}((a^2 + 4a)^{1/2} - a) \quad (39)$$

Aus (39) folgt zunächst $y < 1$ und somit

$$e^y = 1 + y \left(1 + \frac{y}{2!} + \cdots\right) < 1 + y \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots\right) = 1 + (e - 1)y$$

Daher wird wegen (38)

$$e^y \left(1 + \frac{a}{y}\right) < 1 + \frac{a}{y} + (e - 1)(y + a) = 1 + e(y + a). \quad (40)$$

Aus (39) und (36) ergibt sich:

$$y + a = \tfrac{1}{2}a^{1/2}((a + 4)^{1/2} + a^{1/2}) \leq \tfrac{1}{2}a^{1/2}((3\delta + 4)^{1/2} + (3\delta)^{1/2}) < \frac{3\delta + 1}{(2\lambda + 1)^{1/4}}. \quad (41)$$

Aus (37), (40) und (41) folgt endlich:

$$2n < e^{\delta}(\lambda + \tfrac{1}{2})^{1/2} \left(1 + \frac{e(3\delta + 1)}{(2\lambda + 1)^{1/4}}\right).$$

Damit ist aber wegen (12) unser Satz bewiesen.

LITERATUR

- [1] AVAKUMOVIĆ, V. G., *über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Zeitschr. 65 (1956) 327–344.

- [2] HÖRMANDER, L., *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math 121 (1968), 193–218.
- [3] HEJHAL, D. A., *The Selberg Trace Formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$* , vol. 1, Lecture Notes 548 (Springer 1976).
- [4] CHENG, S. Y., *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), 43–55.
- [5] BESSON, G., *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Thèse présentée à l'université Paris VII (1979).

Eingegangen den 22. November 1979