Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 66–82 0010–2571/81/001066–17\$01.50+0.20/0

Anwendung einer zahlengeometrischen Methode von C. L. Siegel auf Probleme der Analysis

E. Hlawka

Prof. Chandrasekharan zum 60. Geburtstag gewidmet

In dem bekannten Buch von Chandrasekharan "Introduction to Analytic Number Theory" (Springer Verlag 1968) wird im 9. Kapitel "Geometry of Numbers" der Fundamentalsatz von Minkowski behandelt, der folgendermaßen lautet: Es sei K ein konvexer Körper im s-dimensionalen Raum, d.h. mit je 2 Punkten von K liegen auch alle Punkte der Verbindungsstrecke in K. Er besitze innere Punkte und weiterhin den Punkt $O=(0,\dots,0)$ als Mittelpunkt, d.h. wenn der Punkt x in K liegt, dann liegt auch $-x$ in K. Ist nun sein Volumen $V(K)>2^s$, dann enthält K einen Gitterpunkt g, d.h. einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, der aber von O verschieden ist und zwar im Inneren von K. Für diesen Satz sind viele Beweise gegeben worden. Chandrasekharan gibt in seinem Buch einen analytischen Beweis, der von C. L. Siegel (Acta mathematica 1935 Gesammelte Abhandlungen I, Springer Verlag 1965, S. 311) zum ersten Mal gegeben wurde. Der Beweis beruht auf einer Identität (Siegelsche Identität genannt).

Man betrachtet mit K alle Translate $K+2g$, wo g alle Gitterpunkte durchläuft. Es gilt dann

$$V(K)+\sum_{g\neq 0} V(K\cap K+2g)=\frac{1}{2^s}\left(V^2(K)+\sum_{g}\left|\int_K e^{\pi i\langle gx\rangle}\,dx\right|^2\right)$$

Dabei bedeutet $\langle gx\rangle$ das skalare Produkt von g und x, und dx das s-dimensionale Volumselement. Wenn nun K keinen Gitterpunkt $g\neq 0$ im Inneren enthält, dann muß $V(K\cap K+2g)=0$ sein, denn sonst würde es ein x in K geben, so daß auch $x-2g$ in K wäre, daher auch g in K.

Dann folgt aber aus der Identität, daß $V(K)\leq 2^s$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung im Minkowskischen Satz. Die Siegelsche Beweismethode besteht darin, daß man die Funktion $\sum_g \chi_K(x+2g)$, wo χ_K die charakteristische Funktion von K ist, in eine Fourierreihe entwickelt und dann die Parseval'sche Gleichung benützt. Diese Siegelsche Methode gestattet noch andere Anwendungen.

So werden wir in §1 der vorliegenden Arbeit eine Ungleichung von N. Wiener, (vgl. Shapiro, Quart. J. *26*, 1975) verallgemeinern (siehe Formel (3) und Formel (13)).

Im §2 verallgemeinern wir Untersuchungen von A. Renyi (Acta Mat. Szeged *13*, 77–92, 1949–50) und vertiefen frühere Untersuchungen des Verfassers (E. Hlawka, Math. Annalen *125* (1952) 183–207, insbesondere S. 200).

Im §3 bauen wir die Überlegungen zu einem Summierungsverfahren für Fouriersche Reihen aus, das im eindimensionalen Spezialfall das Riemannsche Summierungsverfahren enthält. Der Grundgedanke beruht auf einer Behandlung des Riemannschen Summierungsverfahrens von Schechter (Monatshefte für Math. *22* (1911) 224–34).

Im §4 leiten wir eine Ungleichung ab, die im eindimensionalen Spezialfall eine Ungleichung enthält, die verallgemeinert, in der Theorie des großen Siebes, erhöhte Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat.

§1

Es sei K ein konvexer Körper im R^s mit dem Mittelpunkt O und Volumen $V(K)$. Mit αK bezeichnen wir, wie üblich, die Menge aller αx, wo $x \in K$. Sein Volumen ist $\alpha^s V(K)$. Es sei E^s der s-dimensionale Einheitswürfel $0 \leq \varepsilon_1 < 1, \ldots, 0 \leq \varepsilon_s < 1$ und G das Würfelgitter, d.h. die Menge aller Punkte g im R^s mit ganzzahligen Koordinaten. Wir betrachten eine quadratische integrierbare Funktion F auf R^s, welche G als Periodengitter besitzt, d.h. es ist für alle $x \in R^s$ und alle $x \in G$

$$F(x+g) = F(x). \tag{1}$$

Die Fourierkoeffizienten $A(F, g)$ sind gegeben durch

$$A(F, g) = \int_{E^s} F(x) e(-\langle xg \rangle)\, dx, \tag{2}$$

wo $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$ ist.

SATZ 1. *Sind alle Fourierkoeffizienten $A(F, g)$ der Funktion F nicht negativ, enthält der Körper $2K$ keinen Gitterpunkt $g \neq 0$, und betrachten wir $\tilde{K} = \bigcup_g (g + 2K)$, dann ist*

$$\int_{E^s \cap \tilde{K}} |F(x)|^2 \geq V(K) \int_{E^s} |F(x)^2|\, dx. \tag{3}$$

Ist $s=1$ und K ein Intervall $|x|\leq\alpha$, wo $\alpha<1/2$ ist, dann erhalten wir eine Ungleichung von N. Wiener (vgl. Shapiro loc. cit.). Wir gehen nun zum Beweis über. Wir setzen $\psi(K,x)$ definiert durch $\psi(K,x)=\sum_g \chi_K(x+g)$, dabei sei noch χ_K die charakteristische Funktion einer *beliebigen*, quadrierbaren Menge. Wir definieren

$$c(K,g)=A(\psi,g)=\int_{E^s}\sum_g \chi_K(x+g)e(-\langle xg\rangle)\,dx.$$

Da die Mengen E^s+g, wenn g alle Gitterpunkte durchläuft, den R^s einfach und lückenlos überdecken, so ist

$$c(K,g)=\int_{R^s}\chi_K(x+g)e(-\langle xg\rangle)\,dx. \tag{4}$$

Wir betrachten die Funktion ψ_t $(t\in R^s)$, definiert durch $\psi_t(x)=\psi(x+t)$ für alle x. Es ist $A(\psi_t,g)=c(K,g)e(\langle gt\rangle)$. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\int_{E^s}\psi(x)\bar{\psi}_t(x)\,dx=\sum_g |c(K,g)|^2\,e(-\langle gt\rangle|. \tag{5}$$

Wir beachten noch, daß nach (4)

$$c(K,0)=\text{Volumen von } K=V(K) \text{ ist.}$$

Weiters betrachten wir

$$\rho(K,t)=\frac{1}{V(K)}\int_{E^s}\psi(x)\bar{\psi}_t(x)\,dx. \tag{I}$$

Es ist

$$V(K)\rho(K,t)=\int_{E^s}\sum_k \chi_K(x+k)\bar{\psi}_t(x)\,dx,$$

also ist

$$V(K)\rho(K,t)=\int_{R^s}\chi_K(x)\bar{\psi}_t(x)\,dx. \tag{6}$$

Es ist stets für alle t

$$\rho(K, t) \geq 0 \tag{6'}$$

Aus (5) entnehmen wir, daß $\rho(g+t)=\rho(t)$ für alle g und alle t ist. Es ist

$$V(K)\rho(K, t) = \int_{R^s} \chi_K(x) \sum_k \chi_K(x+k+t), \tag{6''}$$

also ist

$$V(K)\rho(K, t) = \sum_k \int \chi_K(x)\chi_K(x+k+t),$$

also

$$V(K)\rho(K, t) = \sum_k V(K, K+k+t)$$

wo $V(K, K+x)$ das Volumen des Durchschnittes von K und der Translate $K+x$ ist.

Es sei nun K *konvex* und O sein Mittelpunkt. Dann ist stets

$$\rho(K, t) \leq \sum_g \chi_{2K}(g+t). \tag{7}$$

Dies ist klar, wenn $\rho=0$ ist. Nehmen wir nun an, daß $\rho(t)>0$ ist. Dann muß es nach (6) ein $\bar{x}$ geben, welches in K liegt und für welches

$$\psi_t(x) = \sum_g \chi_K(\bar{x}+g+t) > 0$$

ist. Dann muß es ein $\bar{g}$ geben, so daß

$$\bar{y} = \bar{x}+\bar{g}+t \in K$$

ist. Da O Mittelpunkt von K ist, gehört auch $-\bar{x}$ zu K, und da K konvex ist, gehört $(\bar{y}-\bar{x})/2$ zu K, also $\bar{g}+t$ zu $2K$. Es ist also

$$\sum_g \chi_{2K}(g+t) \geq 1.$$

Andererseits ist stets $\rho \le 1$. Es ist nämlich stets $\chi_K(x) \le 1$. Es ist aber auch $\psi_t(x) \le 1$, denn wäre $\psi_t(x) > 1$, dann gäbe es Gitterpunkte g_1, g_2, wo $g_1 \ne g_2$, und einen Punkt $\bar{x}$, sodaß $\bar{x} + g_1 + t$ und $\bar{x} + g_2 + t$ in K. Dann würde aber, wenn man wie vorher schließt, $g = g_1 - g_2$ in $2K$, wobei $g \ne 0$ ist. Dies soll aber nicht sein. Es ist also

$$\int_{R^s} \chi_K(x)\psi_t(x)\, dx \le \int_{R^s} \chi_K(x)\, dx = V(K),$$

also $\rho \le 1$. Damit ist (7) bewiesen.

Es sei nun S eine integrierbare Funktion, so daß für alle t stets $S(t) \ge 0$ ist. Weiter seien alle ihre Fourierkoeffizienten $A(S, g) \ge 0$. Es ist natürlich

$$A(S, 0) = \int_{E^s} S(t)\, dt.$$

Dann folgt aus (7)

$$\rho(t)S(t) \le S(t) \sum_g \chi_{2K}(g + t)\, dt,$$

also

$$\int_{E^s} S(t)\rho(t)\, dt \le \int_{E^s} S(t) \sum_g \chi_{2K}(g + t)\, dt. \tag{8}$$

Nun ist nach (5)

$$V(K) \int_{E^s} S(t)\rho(t)\, dt = \sum_g |c(K, g)|^2 \int_{E^s} S(t)e(-\langle gt \rangle\, dt),$$

also

$$V(K) \int_{E^s} S(t)\rho(t)\, dt = \sum_g |c(K, g)|^2\, A(S, g).$$

Es ist also

$$\int_{E^s} S(t)\rho(t)\, dt \ge V(K)A(S, 0). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt

$$\int_{E^s \cap \tilde{K}} S(t)\, dt = \int_{E^s} S(t) \sum_g \chi_{2K}(g+t)\, dt \geq V(K) \int_{E^s} S(t)\, dt \tag{10}$$

eine auch an sich interessante Ungleichung.

Nun können wir Satz 1 in üblicher Weise herleiten. Es sei F eine integrierbare Funktion und

$$S(t) = |F(t)|^2.$$

Ist $\sum_g A(F, g) e(\langle xg \rangle)$ die Fourierreihe von F, so ist

$$\sum_{g,k} A(F, g) \bar{A}(F, k) e(\langle g-k, x \rangle) = \sum_L e(\langle Lx \rangle) \sum_{g-k=L} A(F, g) \bar{A}(F, k)$$

die Fourierreihe von S. Es ist

$$A(S, L) = \sum_{g-k=L} A(F, g) \bar{A}(F, k) \geq 0.$$

Es ist insbesondere nach der Parsevalschen Gleichung

$$A(S, 0) = \sum_g |A(F, g)|^2 = \int_{E^s} |F(x)|^2\, dt.$$

Daraus folgt (3).

§2

Es sei wieder K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt O, es sei aber jetzt für alle Gitterpunkte $g \neq 0$ stets K und $K+g$ disjunkt. Es sei weiter eine endliche Menge B von Punkten b gegeben.

Wir bilden uns die Menge

$$K(B) = \bigcup_b (K+b+g). \tag{I}$$

Wir verlangen, daß die konvexen Mengen $K+b+g$ nie übereinandergreifen sollen. Wir betrachten die Funktion $\rho(K(B), t)$, wie sie in §1(I) für den Fall, daß die Menge $B = \{0\}$ ist, definiert wurde. Es gilt nun, wenn $|B|$ die Kardinalzahl von

B ist,

$$|B|\, c_K(0)\rho(K(B), t) = \sum_g |c(K, g)|^2 \, |S(B, g)|^2 \, e(-\langle gt\rangle). \tag{II}$$

Dabei ist

$$S(B, g) = \sum_b e(-\langle bg\rangle). \tag{1}$$

Beweis. Es ist nach §1(4)

$$c(K(B), g) = \sum_b \int_{R^s} \chi_{K+b}(x+g) e(-\langle xg\rangle)\, dx = \sum_b e(-\langle bg\rangle) c(K, g). \tag{2}$$

Es ist insbesondere $c(K(B), 0) = |B|\, c(K, 0)$.

Aus §1(5) folgt die Behauptung

Wie machen nun die *Voraussetzung*, daß es nicht negative Q und ϑ gibt, so daß für alle b aus B und alle $g \neq 0$.

$$\big||S(B, g)|^2 - Q\big| < \frac{\vartheta Q V}{1-V} \tag{III}$$

gilt. Dabei ist $V = V(K) = c(0)$. Aus (II) folgt, wenn $B = \{0\}$ und $t = 0$ ist, daß

$$|c(K, 0)| = \sum_g |c(K, g)|^2, \tag{3}$$

also $c(K, 0) \leq 1$ ist. Es ist ja nach §1(6)

$$\rho(K, 0)c(K, 0) = \int_{R^s} \chi_K(x) \sum_g \chi_K(x+g)\, dx = c(K, 0), \tag{4}$$

da ja die Mengen $K+g$ nicht übereinandergreifen sollen (Es liegt wieder der Minkowskische Fundamentalsatz vor). Wir behaupten im folgenden

SATZ 2. *Es ist für alle $t \in R^s$*

$$\rho(K(B), t) \geq V(K)\left(|B| - \frac{(Q(l+\vartheta))}{|B|}\right). \tag{IV}$$

Beweis. Es ist ja nach (II)

$$|B|\, c(K,0)\rho(K(B),t) = |C(K,0)|^2\, |B|^2 + A, \tag{5}$$

wo

$$A = \sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, |S(B,g)|^2\, e(-\langle gt\rangle) \tag{6}$$

ist. Nun ist nach Voraussetzung (III)

$$|S(B,g)|^2 = Q + \vartheta_g R, \tag{7}$$

wo

$$R = \frac{\vartheta Q V}{1-V} \tag{8}$$

gesetzt ist. Es ist $|\vartheta_g| \leq 1$. Es ist also

$$A = \sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, (Q + \vartheta_g R) e(-\langle gt\rangle),$$

also

$$A = Q \sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, e(-\langle gt\rangle) + R_1, \tag{9}$$

wo

$$R_1 = R \sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, \vartheta_g e(-\langle gt\rangle)$$

ist. Es ist nun

$$\sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, e(-\langle gt\rangle| = c(K,0)\rho(K,t) - c^2(K,0)$$

wie aus (II) für $B = \{0\}$ folgt. Weiter ist

$$\sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2\, \vartheta_g e(-gt) \geq -\sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2.$$

Nun ist wieder nach (II) und (4)

$$\sum_{g\neq 0} |c(K,g)|^2 = c(K,0)\rho(K,0) - c^2(K,0) = c(K,0) - c^2(K,0).$$

Wir erhalten also

$$R_1 \geq -R(c(K, 0)\rho(K, 0) - c^2(K, 0)) \tag{9'}$$

und

$$\sum_{g \neq 0} |c(K, g)|^2 \geq c(K, 0) - c^2(K, 0) = V - V^2. \tag{9''}$$

Wir erhalten also aus (8), (9'), (9'')

$$A \geq -QV^2 - R(V - V^2).$$

Es ist also nach (5)

$$|B|\, V\rho(K(B), t) \geq V^2\, |B|^2 - QV^2 - RV(1 - V),$$

und dies ergibt nach (8) gerade (IV). Es hat Satz 2 nur dann eine Bedeutung, wenn

$$|B|^2 \geq Q(1 + \vartheta)$$

ist. Ein bemerkenswerter Fall liegt vor, wenn statt (III) die folgende Voraussetzung gilt: Es gibt eine natürliche Zahl d, so daß für alle $g \neq 0$ und $b \in B$

$$|S(B, g)|^2 = |B| - d \tag{V}$$

gilt. Es gilt dann

SATZ 3. *Unter der Voraussetzung* (V) *ist für alle* $t \in R^s$

$$|B|\, \rho(K(B), t) \geq dV(K) \tag{10}$$

Es gilt sogar schärfer

$$\rho(K(B), t) \geq V\left(|B| - 1 + \frac{d}{|B|}\right). \tag{10'}$$

Es gilt, wenn wir (5) und (6) benützen

$$\begin{aligned} A &= \sum_{g \neq 0} |c(K, 0)|^2\, (|B| - d)e(-\langle gt \rangle) \\ &= (|B| - d)(\rho(K(t) - |c(K, 0)|^2), \end{aligned}$$

also ist

$$A \geq -(|B|-d)\,|c(K,0)|^2,$$

also ist

$$|B|\; V\rho(K(B),t) \geq V^2(|B|^2-|B|+d) \geq V^2 d.$$

Damit ist alles bewiesen.

Wie wollen nun einen Fall betrachten, wo (V) erfüllt ist. Es sei C eine endliche Obermenge von B (ihre Elemente bezeichnen wir mit c), so daß $\bigcup_{g,c}(g+c)$ eine Gruppe in bezug auf die Vektoraddition ist, also eine Obergruppe des Gitters G aller ganzzahligen Punkte von R^s. Es sei Γ^* die duale Gruppe zu Γ, welche in G enthalten ist. Es ist Γ^* die Menge aller Punkte l, für die stets für alle $\gamma \in \Gamma$, $\langle \gamma, l \rangle$ in Z liegt.

Es gilt dann bekanntlich für alle $l \in \Gamma^*$

$$\sum_c e(\langle l, c\rangle) = 0 \tag{11}$$

Dabei erstreckt sich in (11) die Summe über alle $c \in C$, also ist

$$\sum_{c \neq 0} e(\langle l, c\rangle) = -1. \tag{12}$$

Weiters ist für alle $c \neq 0$

$$\sum_l e(\langle lc\rangle) = 0 \tag{12'}$$

wo sich die Summe über alle inkongruenten l aus G modulo Γ^* erstreckt.

Wir nennen nun B eine *Differenzenbasis* von C von der Ordnung d, wenn sich jedes $c \neq 0$ genau d-mal in der Form $b'-b''$ schreiben läßt, wo b', b'' aus B sind. (Man vergleiche für den eindimensionalen Fall Renyi loc. cit. und für den allgemeinen Fall E. Hlawka loc. cit.) Wir zeigen nun

SATZ 4. *Es ist B genau dann Differenzenbasis von C von der Ordnung d, wenn* (V) *gilt.*

Beweis. Wenn B eine Differenzenbasis von C von der Ordnung d ist, so ist

$$|S(B,g)|^2 = \sum_{b',b'' \in B} e(\langle g(b'-b'')\rangle) = |B| + D$$

wo

$$D = \sum_{b',b'',b'\neq b''} e(g(b'-b'')) = \sum_{c\neq 0} A(c)e(\langle gc\rangle)$$

ist. Dabei ist $A(c)$ die Anzahl der b', b'', für die $b'-b''=c$ ist. Nun soll für alle $c\neq 0$ ja $A(c)=d$ sein. Dann ist also nach (11)

$$D = d\sum e(\langle g, c\rangle) = -d.$$

Damit ist (V) schon bewiesen.

Wir zeigen nun die Umkehrung: Es sei also für alle $g\neq 0$

$$\sum_{c\neq 0} A(c)e(\langle gc\rangle) = -d.$$

Setzen wir $K(c)=A(c)-d$ für $c\neq 0$ und $K(0)=0$, so ist also

$$\sum_{c} K(c)e(\langle gc\rangle) = 0 \tag{13}$$

für alle $g\neq 0$. Es gilt also insbesonderes (13) für alle inkongruenten Gitterpunkte l modulo Γ^*, ausgenommen $l=0$. Es ist nun für ein beliebiges c' aus C

$$\sum_{l} e(-\langle lc'\rangle)\sum_{c} K(c)e(\langle lc\rangle) = K(c')\,|C|,$$

($|C|$ Kardinalzahl von C). Es ist ja nach (12')

$$\sum_{l} e(\langle l(c-c')\rangle) = 0, \quad \text{falls} \quad c\neq c'.$$

Andrerseits ist

$$\sum_{l} e(-\langle lc'\rangle)\sum_{c} K(c)e(\langle lc\rangle) = \sum_{l}\sum_{c} K(c)e(\langle l(c-c')\rangle),$$

also ist diese Summe gleich

$$\sum_{c} K(c) + \sum_{l\neq 0} e(-\langle lc'\rangle)\sum_{c} K(c)(e(\langle lc\rangle),$$

also nach (13) gleich $\sum_c K(c)$. Es ist also

$$K(c')\,|C| = \sum_{c} K(c).$$

Es sind also alle $K(c)$ einander gleich und wir haben nach (13)

$$K(c) \sum_{c \neq 0} e(\langle gc \rangle) = 0.$$

Da nach (12) diese Summe gleich -1 ist, so ist $K(c)=0$ für alle $c \neq 0$, also ist $A(c)=d$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§3

Wir können die bisherigen Überlegungen auch zu einem Summierungsverfahren von Fourierschen Reihen periodischer Funktionen ausbauen. Wir hatten nach § 1 (6′) (es ist ja $c(K,0)=V(K)$)

$$\frac{1}{V(K)} \rho(K, t) = \frac{1}{V^2(K)} \sum_g \int_{R^s} \chi_K(x) \chi_K(x+g+t)\, dx. \tag{1}$$

Andererseits ist ($c(K, 0) = c_0$ gesetzt)

$$\frac{1}{c_0} \rho(K, t) = 1 + \frac{1}{c_0^2} \sum_{g \neq 0} |c(K, g)|^2\, e(-\langle gx \rangle). \tag{2}$$

Es ist

$$\frac{1}{c_0} \int_{E^s} \rho(K, t)\, dt = 1. \tag{3}$$

Weiter ist

$$\rho(K, t) = 0 \tag{4}$$

für alle $t \in E^s - \tilde{K}$, wo $\tilde{K} = \bigcup (2K+g)$, wie in §1 definiert. Ist nämlich $\rho(t) > 0$, dann gibt es nach (1) ein $x \in K$ und einen Gitterpunkt g, so daß $x+g+t \in K$. Dann ist aber $-x$ in K, also $g+t$ in $2K$, also ist t in $\tilde{K}$, was nicht sein soll (vgl. die Überlegung in §1). Wir betrachten nun statt K den konvexen Körper hK, dann ist also

$$\rho(hK, t) = 0 \tag{4'}$$

für alle t in $E^s - \widetilde{hK}$. Es sei nun Φ eine stetige periodische Funktion, so daß also für alle g stets $\Phi(x+g) = \Phi(x)$ ist. Es besitze also Φ die Fourierreihe

$$\sum_{g} A(\Phi, g) e(\langle gt \rangle). \tag{5}$$

Wir behaupten nun

SATZ 5. *Es ist*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{g} |c(hK, g)|^2 A(\Phi, g) e(\langle gx \rangle) = \Phi(x). \tag{6}$$

Beweis. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\sum_{g} |c(hK, g)|^2 A(\Phi, g) e(\langle gx \rangle) = \int_{E^s} \Phi(x+t) \frac{\rho(hK, t)}{c_0(hK)},$$

wo $c_0(hK) = c(hK, 0)$ gesetzt ist. Es ist nach (4')

$$\int_{E^s} (\Phi(x+t) - \Phi(x)) \rho(hK, t) c_0^{-1}(hK)\, dt$$

gleich

$$\int^{*} (\Phi(x+t) - \Phi(x)) \rho(hK, t) c_0^{-1}(hK)\, dt, \tag{7}$$

wo sich die Integration in (7) über $E^s \cap \widetilde{hK} = H(K)$ erstreckt. Nun ist nach (3)

$$\left| \int^{*} (\Phi(x+t) - \Phi(x)) \rho(hK, t) c_0^{-1}(hK)\, dt \right| \leq \sup_{t \in H} |\Phi(x+t) - \Phi(x)|.$$

Es ist also

$$\left| \sum_{g} |c(hK, g)|^2 A(\Phi, g) e(\langle gx \rangle) - \Phi(x) \right| \leq \sup_{t \in H} |\Phi(x+t) - \Phi(x)|. \tag{7'}$$

Wir wollen nun *voraussetzen*, daß die Körper $2K + g$ nicht übereinandergreifen. Das gleiche gilt dann für $2hK + g$, wenn $h \leq 1$.

Es ist also

$$\sup_{t\in H} |\Phi(x+t)-\Phi(x)| \leq \omega(\Phi, 2hK)$$

wobei

$$\omega(\Phi, 2hK) = \sup_{t\in 2hK} |\Phi(x+t)-\Phi(x)|$$

ist. Es ist $\omega(\Phi, 2hK)$ ein Maß für den Fehler in diesem Summierungsverfahren. Es ist $\lim_{h\to 0} \omega(\Phi, 2hK) = 0$.

Betrachten wir ein Beispiel: Es sei K das Parallepiped

$$\begin{aligned} |L_1(x)| &= |b_{11}x_1 + \cdots + b_{1s}x_s| < \lambda_1 \\ |L_s(x)| &= |b_{s1}x_1 + \cdots + b_{ss}x_s| < \lambda_s, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei die Matrix $B = (b_{ik})$ nicht singulär sein soll. Es ist dann

$$c(K, g) = \frac{1}{|d(B)|} \prod_{j=1}^{s} \frac{\sin \pi l_j \lambda_j}{\pi l_j},$$

wobei l_j die j-te Komponente zur $(B^{-1})^* g$ ist. Es ist also:

$$\lim_{h\to 0} \sum_g \frac{1}{d^2(B)} \prod_{j=1}^{s} \frac{\sin^2 \pi l_j \lambda_j h}{(\pi l_j)^2} A(\Phi, g) e(\langle gx \rangle) = \Phi(x) \tag{7''}$$

Für $s=1$, $\lambda_1 = 1$, $b_{11} = 1$ ist es das Riemannsche Summierungsverfahren. Man kann noch ein anderes Summierungsverfahren entwickeln. Es gilt

SATZ 5

$$\lim_{h\to 0} \sum_g c(hK, g) A(\Phi, g) e(\langle gx \rangle) = \Phi(x).$$

Wir betrachten statt $\rho(K, t)$ jetzt $\psi(K, t)$, wo $\psi(K, t)$ in §1 definiert ist. Es ist

$$\frac{1}{c_0} \int_{E^s} \psi(K, t)\, dt = 1, \tag{4'}$$

da ja

$$\frac{\psi(K, t)}{c_0} = 1 + \sum_g \frac{c(K, g)}{c_0} e\langle gt\rangle.$$

Es ist wieder

$$\psi(K, t) = 0,$$

wenn $t \in E^s - \hat{K}$ ist, wo $\hat{K} = \bigcup_g (K+g)$ ist. Wir haben wieder

$$\sum_g c(hK, g) A(\Phi, g) e(\langle gx\rangle) = \int_{E^s} \Phi(x+t) \frac{\psi(hK, t)}{c_0(hK)}\, dt.$$

Es ist wieder

$$\int_{E^s} \Phi(x) \cdot \psi(hK, t)\, dt = \int^* \Phi(x)\psi(hK, t)\, dt,$$

wo sich die Integration rechts über $\hat{h}K = \hat{H}(K)$ erstreckt. Es ist also

$$\left| \int_{E^s} (\Phi(x+t) - \Phi(x)) \frac{\psi(hK, t)}{c_0(hK)} \right| \leq \sup_{t \in \hat{H}} |\Phi(x+t) - \Phi(x)|.$$

Wenn wir voraussetzen, daß die Körper $K+g$ nicht übereinandergreifen, so gilt auch für $h \leq 1$, daß $hK+g$ nicht übereinandergreifen. Es ist also

$$\sup_{t \in \hat{H}} |\Phi(x+t) - \Phi(x)| \leq \omega(\Phi, hK).$$

Nehmen wir das Beispiel (8), so erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \sum_g \prod_{j=1}^{s} \frac{\sin l_j \lambda_j h}{d(B) l_j} A(\Phi, g) e(\langle gx\rangle) = \Phi(x)$$

Der Fall $s=1$ wurde von Lebesgue betrachtet.

Nehmen wir die Kugel $K: |x| \leq \rho$, so erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \sum_l \frac{J_{s/2}(|l|\, h\rho)}{|l|^{s/2}} A(\Phi, g) e(\langle gx\rangle) = \Phi(x).$$

§4

Im Zusammenhang mit dem zweiten Summierungsverfahren in §3 steht die folgende Ungleichung:

Es sei wieder Φ eine periodische integrierbare Funktion mit einer Fourierentwicklung §3(5). Es sei wieder K ein konvexer Körper mit Mittelpunkt O, so daß für alle g die Körper $K+g$ nicht übereinandergreifen. Dann gilt

SATZ 6. *Es ist stets*

$$\sum_{k,l} A(\Phi, k)\bar{A}(\Phi, l)c(K, k-1) \le (1-V(K)) \sum_{g} |A(\Phi, g)|^2. \tag{1}$$

Wir können (1) noch verallgemeinern: Es sei außer Φ noch eine weitere periodische Funktion Φ_1 gegeben, dann gilt

$$\sum_{k,l} A(\Phi, k)\bar{A}(\Phi_1, l)c(K, k-l) \le (1-V(K))\sqrt{S_k S_l}, \tag{2}$$

wo

$$S = \sum_{g} |A(\Phi, g)|^2 \quad \text{und} \quad S_1 = \sum_{g} |A(\Phi_1, g)|^2$$

ist.

Beweis. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$J = \int_{E^s} \Phi(t)\bar{\Phi}_1(t)(\psi(K, t) - c(K, 0)) \tag{3}$$

gleich

$$\int_{E^s} \sum_{g,k,l} c(K, g)A(\Phi, k)A(\Phi_1, l)e(\langle l-k+g\rangle t)\, dt. \tag{4}$$

Nun ist

$$\int_{E^s} e(\langle l-k+g, t\rangle)\, dt = 0, \quad \text{außer für} \quad g = k-l,$$

also ist nach (4) und (3)

$$J = \sum_{k,l} c(K, k-l)A(\Phi, k)A(\Phi_1, l) \le \sup_{t \in E^s} |\psi(K, t) - c(K, 0)|\, J_1,$$

wo

$$J_1 = \int_{E^s} |\Phi(t)\bar{\Phi}_1(t)|\, dt$$

ist. Nun ist $0 \le \psi(K, t) \le 1$, da die $K + g$ nicht übereinandergreifen. Weiter ist

$$J_1^2 \le \int_{E^s} |\Phi(t)|^2\, dt \int_{E^s} |\Phi_1(t)|^2\, dt = SS_1,$$

damit ist alles gezeigt. Nehmen wir wieder ein Beispiel §3(8), so erhalten wir

$$\frac{1}{d(B)} \sum_{k,l} A(\Phi, k) A(\Phi_1, l) \prod_{j=1}^{s} \frac{\sin \pi l_j \lambda_j (k_j - l_j)}{\pi(k_j - l_j)} \le \left(1 - \frac{\lambda_1 \lambda_s}{d(B)}\right) \sqrt{SS_1},$$

wenn die Ungleichungen

$$|L_1(g)| < 2\lambda_1, \ldots, |L_s(g)| < 2\lambda_s$$

nur die triviale Lösung $g = (0, \ldots, 0)$ hat. Für $s = 1$, $b_{11} = 1$, $\lambda_s = \lambda$ erhalten wir

$$\sum_{k,l} A(\Phi, k) \bar{A}(\Phi, l) \frac{\sin \pi(k - l)}{\pi(k - l)} \le (1 - 2\lambda)\sqrt{SS_1},$$

Dabei muß $\lambda < 1/2$ sein, denn dann hat $|g| < 2\lambda$ nur die Lösung $g = O$. Ein anderes Beispiel ist $K : |x| < \rho$. Dann erhalten wir

$$\sum_{k,l} A(\Phi, k) \bar{A}(\Phi, l) \frac{J_{s/2}(\pi(k - l)\rho)}{|(k - l)\rho|^{s/2}} \le (1 - V(J)\rho^s)\sqrt{SS_1},$$

wo $V(J)$ das Volumen der s-dimensionalen Einheitskugel ist, und aus $|g| < \rho$ folgt $g = O = (0 \ldots 0)$.

Mathematisches Institut,
Strudlhofgasse 4,
A-1090, Wien

Eingegangen den 20. August 1980.