

Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf ausgewählten Beispielen kompakter Riemannscher Flächen.

Autor(en): **Jenni, Felix**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **59 (1984)**

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45391>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf ausgewählten Beispielen kompakter Riemannscher Flächen

FELIX JENNI

1. Einleitung

1.1. Zu $\mu > 0$ betrachten wir das hyperbolische Spitzzeck G_μ mit dem spitzen Winkel $\pi/4$ und einer Seite der Länge $\mu/8$ (Abb. 1).



Abb. 1

Aus 16 Exemplaren dieses Spitzzecks erhalten wir durch geschickte Verheftung eine kompakte randlose Riemannsche Fläche F^μ vom Geschlecht 2 (Abb. 2).

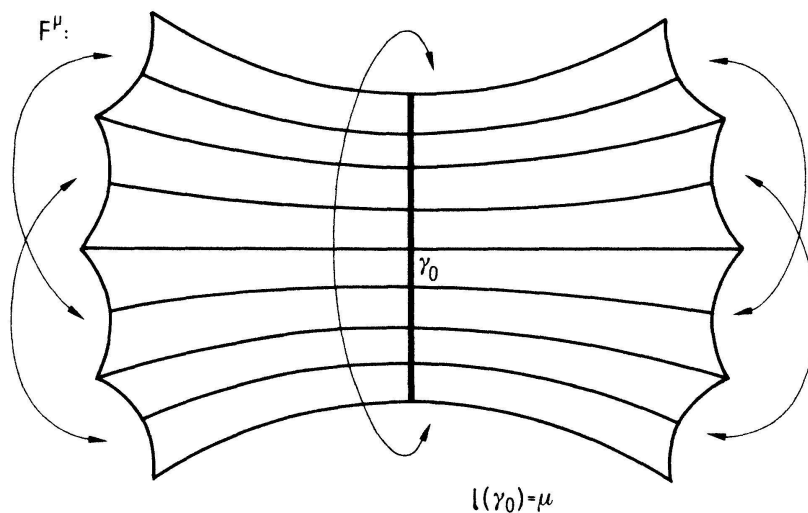


Abb. 2

γ_0 ist für $\mu < \mu^* = 1,83 \dots$ die kürzeste geschlossene Geodätische der Fläche F^μ .

Ueber das Spektrum des Laplace-Operators Δ auf den Flächen F^μ zeigen wir

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\lambda_1(F^\mu)} &= \pi^2 \\ \lambda_1(F^\mu) &< \frac{1}{4} \quad \text{für } \mu < 1 \\ \lambda_2(F^\mu) &> \frac{1}{4} \quad \text{für } \mu > 0 \\ \dim E_{\lambda_1(F^\mu)} &= 1 \quad \text{für } \mu < 1. \end{aligned} \tag{A}$$

Obige Behauptung (A) wird im zweiten Abschnitt ausführlich bewiesen. Nachstehend werden noch analoge Resultate aus der Dissertation [6] vorgestellt, aber aus Platzgründen hier nicht bewiesen (Beweise vgl. [6]).

1.2. Zu $g \geq 2$ betrachten wir diejenige kompakte Riemannsche Fläche F_g , die wir erhalten, wenn wir die gegenüberliegenden Seiten des regelmässigen hyperbolischen $4g$ -Ecks mit Winkeln $\pi/4g$ verheften. Für das Spektrum des Laplace-Operators Δ auf den Flächen F_g erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} g \cdot \lambda_1(F_g) &= 2 \\ \lambda_1(F_g) &< \frac{1}{4} \quad \text{für } g \geq 20 \\ \lambda_1(F_2) &> \frac{1}{4} \\ \dim E_{\lambda_1(F_g)} &= 2 \quad \text{für } g \geq 20. \end{aligned} \tag{B}$$

Genauere Untersuchung der Fläche F_2 bringt die Verschärfungen

$$\begin{aligned} 3,83 &< \lambda_1(F_2) < 3,85 \\ \dim E_{\lambda_1(F_2)} &= 3. \end{aligned}$$

und eine gute Abschätzung für $\Lambda_1 = \sup_{F, g(F) \geq 2} \lambda_1(F)$:

$$3,83 < \Lambda_1 < 4,81. \tag{C}$$

Dieses allgemeine Resultat ist eine Ergänzung und Verbesserung des Resultates von Huber [5]: $\Lambda_2 < 5,2$. Der Beweis von (C) stützt sich wesentlich auf die nachfolgende Abschätzung der Länge l_0 der kürzesten geschlossenen

Geodätischen hyperelliptischer Flächen:

$$L_0(g) = \sup_{\substack{F \text{ hyperell.} \\ g(F)=g}} l_0(F) \leq 4 \cdot \text{Ar Cos} \frac{1}{2 \sin \frac{\pi(g+1)}{12g}} < 5,107. \tag{D}$$

Gleichheit gilt für $g = 2$ und $g = 5$.

2. Beweis von (A)

Wir benötigen dazu die Isometriegruppe I der Flächenschar F^μ (2.1). Die Möglichkeit zu entscheiden, welche irreduzible Darstellung von I im ersten Eigenraum E_1 auftritt (2.2), reduziert die Betrachtungen über den ersten Eigenwert $\lambda_1(F^\mu)$ auf die Abschätzung des ersten Eigenwertes eines gemischten Randwertproblems von G_μ (2.3).

2.1. *Die Isometriegruppe und deren irreduzible Darstellungen.* Die Translation R längs γ_0 um $\mu/4$ und die Spiegelungen S und T an γ_1 bzw. γ_0 (vgl. Abb. 3) sind offensichtlich Isometrien der Flächen F^μ . Die Isometrie $J = R^2$ lässt die Punkte P_1, \dots, P_6 fest. P_1, \dots, P_6 sind somit die Weierstrasspunkte von F^μ (vgl. [7]). Die Isometrien R, S und T sind sogar Erzeugende der ganzen Isometriegruppe I , weil sie schon die grösstmögliche Untergruppe der Permutationen der Weierstrasspunkte und $J = R^2$ erzeugen. Wir erhalten: Die Diedergruppe D_8 wird erzeugt von R und S mit den Relationen $R^4 = S^2 = RSRS = \text{id}$. Die ganze Isometriegruppe I lässt sich schreiben in der Form $I = D_8 \times \{\text{id}, T\} \cdot T$ erfüllt die Relationen $T^2 = \text{id}, RT = TR$ und $ST = TS$.

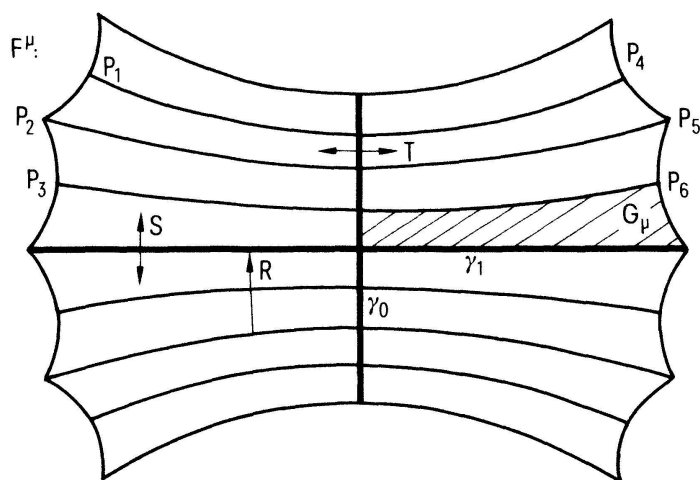


Abb. 3

Die Gruppe I besitzt 2 zweidimensionale und 8 eindimensionale Darstellungen:

$$\rho^\pm(R) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho^\pm(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^\pm(T) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\alpha\beta\gamma}(R) = \alpha, \quad \rho_{\alpha\beta\gamma}(S) = \beta, \quad \rho_{\alpha\beta\gamma}(T) = \gamma \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$$

Wir schreiben anstelle von ± 1 jeweils nur die Vorzeichenkombinationen: ρ_{++++} , ρ_{+++-} , ... etc.

2.2. *Darstellungen der Isometriegruppe im ersten Eigenraum.* Alle Isometrien Φ aus der Isometriegruppe I der Flächen F^μ vertauschen mit dem Laplace-Operator Δ . Zu jeder Isometrie $\Phi \in I$ erhalten wir daher eine lineare, bijektive Abbildung Φ^*

$$\Phi^*: u \rightarrow u \circ \Phi, \quad u \in E_k^{(1)}$$

des k -ten Eigenraumes E_k auf sich. Zu einer beliebigen aber festen Basis $\{e_j\}_{j=1, \dots, d_k}$ von E_k existiert somit eine reguläre $d_k \times d_k$ -Matrix A_Φ mit

$$\Phi^*: \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix} \circ \Phi = A_\Phi \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{d_k} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\rho: \Phi \rightarrow A_\Phi$, $\Phi \in I$ ist eine Darstellung von I im Eigenraum E_k bezüglich der Basis $\{e_j\}$. Der Ausreduzierung dieser Darstellung entspricht eine Basistransformation in E_k . Sei nun $\{e_j\}$ eine spezielle Basis von E_k in dem Sinne, dass die Darstellung $\rho: \Phi \rightarrow A_\Phi$ vermöge dieser Basis in lauter irreduzible Komponenten zerfällt:

$$A_\Phi = \bigoplus_i B_\Phi^{\rho_i}, \quad \text{wobei } \rho_i: \Phi \rightarrow B_\Phi^{\rho_i}$$

eine irreduzible Darstellung von I im entsprechenden Teilraum von E_k ist. Die Eigenräume E_k werden so in eine direkte Summe von Eigenräumen zu irreduziblen Darstellungen aufgespalten: $E_k = \bigoplus_i E_k^{\rho_i}$ (eine irreduzible Darstellung kann mehrfach auftreten!) Huber hat in [4] gezeigt, dass auf diese Weise alle

¹Die Eigenfunktionen sind i.a. komplexwertig. Für die Auswertung von Randwertproblemen betrachten wir jeweils Real- oder Imaginärteil oder eine reellwertige Linearkombination komplexer Funktionen.

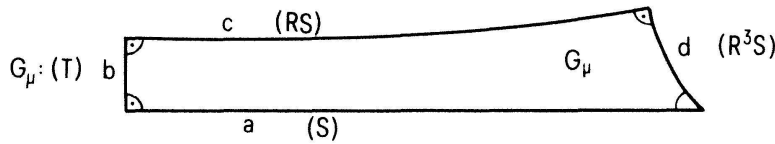


Abb. 4. (Ausschnitt aus Abb. 3)

irreduziblen Darstellungen von I in der Gesamtheit aller Eigenräume beliebig oft auftreten.

Im folgenden wird zuerst diejenige Darstellung bestimmt, die im ersten Eigenraum der Flächen F^μ auftritt und anschliessend deren kleinsten Eigenwert abgeschätzt.

Betrachten wir zuerst die zweidimensionalen Darstellungen ρ^+ und ρ^- . Seien e_1 und e_2 Eigenfunktionen aus $E_k^{\rho^+}$, die bezüglich der Darstellung ρ^+ eine kanonische Darstellung bilden. Man rechnet leicht nach, dass die Funktion $u = e_1 + ie_2$ die Bedingungen

$$(RS)^*u = u, \quad (R^2S)^*u = -u, \quad T^*u = u$$

erfüllen. Damit sind $\text{Re } u$ und $\text{Im } u$ Lösungen des Randwertproblems II (Abb. 5).

In jedem Eigenraum zur Darstellung ρ^- findet man eine Eigenfunktion u mit $T^*u = -u$, d.h. zusätzlich $u|_{s\text{-Achse}} = 0$ (Abb. 5) als verschärfende Randbedingung und demzufolge grösseren Eigenwerten. Damit tritt die Darstellung ρ^- sicher nicht auf im ersten Eigenraum.

Nun zu den eindimensionalen Darstellungen $\rho_{\pm\pm\pm}$. Die Isometrien S, T, RS, R^3S sind Spiegelungen an a, b, c, d (vgl. Abb. 3 und 4). Eine reelle Eigenfunktion f aus einem Teilraum E^ρ zu einer eindimensionalen Darstellung ρ erfüllt die Randbedingungen $\delta u / \delta \vec{n} = 0$ oder $u = 0$ an den Rändern von G_μ , jenachdem ob die Darstellung der zugehörigen Isometrie $+1$ oder -1 ist: zB: $\rho(S) = -1 \rightarrow f \in E^\rho: S^*f(z) = -f(z), f|_a = 0$. So erfüllen die Eigenfunktionen zu den eindimensionalen Darstellungen spezielle Randwertprobleme von G_μ .

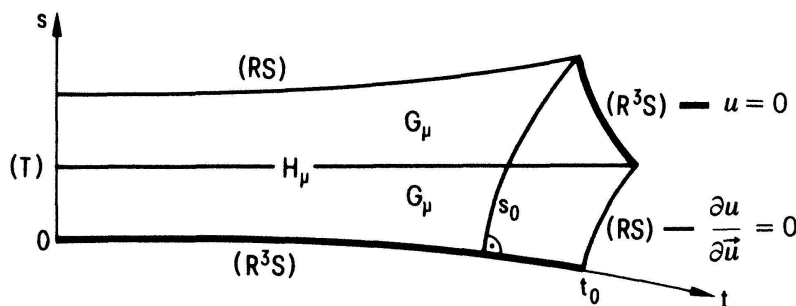


Abb. 5. Randwertproblem II

Die Eigenwerte aller von eindimensionalen Darstellungen herrührenden Randwertprobleme ausser dem zu ρ_{++} sind $> \frac{1}{4}$ für beliebiges μ , weil sie zu Eigenfunktionen gehören, für die mindestens ein Nullstellenbereich N auf der Fläche F^μ nur ein- oder zweifachzusammenhängend ist. Der Eigenwert ist dann auch Eigenwert des abgeschlossenen Nullstellenbereichs \bar{N} , aufgefasst als feste Membran, und deren Eigenwerte sind bekanntlich grösser als $\frac{1}{4}$ (Spezialfall von Lemma 1 in [2] für zeifachzusammenhängende Gebiete, Beweis völlig analog für zweifachzusammenhängende Gebiete: man nehme Parallelstreifen in der Ueberlagerung anstelle einer Kreisscheibe, Zylinderkoordinaten anstelle von Polarkoordinaten).

Wenn wir gezeigt haben, dass auch die Eigenwerte zum Randwertproblem II alle $> \frac{1}{4}$ sind, haben wir die Behauptungen von (A) auf solche des Randwertproblems I (Abb. 6) zurückgeführt.

Um zu zeigen, dass auch die Eigenwerte des Randwertproblems II $> \frac{1}{4}$ sind, schätzen wir den Rayleigh-Quotienten einer Eigenfunktion f aus dem ersten Eigenraum auf H_μ ab (vgl. Abb. 5):

$$\begin{aligned} \lambda_1^{II} &= \frac{\int_{H_\mu} |\text{grad } f|^2 dF}{\int_{H_\mu} |f|^2 dF} = \frac{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |\text{grad } f|^2 \text{Cos } s \cdot ds \cdot dt}{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |f|^2 \text{Cos } s \cdot ds \cdot dt} \\ &\geq \frac{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} \left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)^2 \text{Cos } s \cdot ds \cdot dt}{\int_0^{t_0} \int_0^{s(t)} |f|^2 \text{Cos } s \cdot ds \cdot dt} \geq \text{Inf}_{t \in (0, t_0)} \frac{\int_0^{s(t)} |f_s|^2 \text{Cos } s \cdot ds}{\int_0^{s(t)} |f|^2 \text{Cos } s \cdot ds} \\ &\geq \text{Inf}_{t \in (0, t_0)} \text{Min}_{\substack{F \in C^2(0, s(t)) \\ F(0)=0}} \frac{\int_0^{s(t)} |F_s|^2 \text{Cos } s \cdot ds}{\int_0^{s(t)} |F|^2 \text{Cos } s \cdot ds} \geq \text{Min}_{\substack{F \in C^2(0, s_0) \\ F(0)=0}} \frac{\int_0^{s_0} |F_s|^2 \text{Cos } s \cdot ds}{\int_0^{s_0} |F|^2 \text{Cos } s \cdot ds} > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

gemäss nachfolgendem Lemma für $\text{Sin } s_0 \leq 8/\pi$, d.h. sicher für $\mu < 1$ ($\text{Sin } s_0 = \text{Cos } \mu/8 \cdot \sqrt{2} \text{Cos } \mu/4 < 8/\pi$ für $\mu < 1$).

2.3. *Randwertproblem I.* Zur irreduziblen Darstellung ρ^+ gehört folgendes Randwertproblem (Abb. 6):

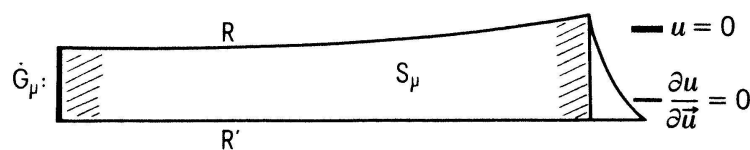


Abb. 6. Randwertproblem I. $\text{Sin } R' = \text{Ctg } \mu/8$; $\text{Sin } R = (\sqrt{2} \text{Sin } \mu/8)^{-1}$. (S_μ : grösster in G_μ enthaltener Parallelhalbstreifen)

Zur Abschätzung des ersten Eigenwertes benötigen wir das folgende

LEMMA. Für $R > 0$ sei λ^R der erste Eigenwert des Problems

$$(\cos s \cdot v')' + \lambda \cos s \cdot v = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0, \quad v'(R) = 0, \quad (v'(0) > 0)$$

Behauptung.

$$\lambda^R \geq \frac{2}{\pi \cdot \sin R}$$

Beweis. Sei v die erste Eigenfunktion zu obigem Problem und $v = w \cdot \arctg(\sin s)$. w erfüllt dann die Gleichung

$$\cos s \cdot w'' + \left(\sin s + \frac{2}{\arctg(\sin s)} \right) \cdot w' + \lambda \cos s \cdot w = 0$$

und $w'(0) = 0$ ($w(0) > 0$). v ist als erste Eigenfunktion zu obigem Problem monoton wachsend in $(0, R)$, insbesondere $v \neq 0$ in $(0, R)$. w ist monoton fallend bis zur ersten Nullstelle ($w' = 0 \rightarrow w'' < 0$), also wegen $v \neq 0$ in $(0, R)$ insbesondere in $(0, R)$. Aus der Differentialgleichung und den Randbedingungen für v folgt unmittelbar

$$v'(0) = \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot v(s) \, ds$$

und

$$\begin{aligned} w(0) &= \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot \arctg(\sin s) \cdot w(s) \cdot ds \\ &\leq \lambda^R \int_0^R \cos s \cdot \arctg(\sin s) \cdot w(0) \cdot ds \\ &\leq w(0) \cdot \lambda^R \frac{\pi}{2} \sin R \end{aligned}$$

Aufgelöst nach λ^R erhalten wir die Behauptung. *qed.*

Jetzt beweisen wir folgenden

SATZ.

$$(i) \lambda_1(F^\mu) \cong \frac{\mu}{\pi^2} \cdot \frac{1 - \sqrt{2\mu}}{1 + \frac{2\mu}{5}} \quad \text{für } \mu \leq \frac{1}{2}$$

$$(ii) \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\lambda_1(F^\mu)} = \pi^2. \quad (\text{erste Behauptung von (A)})$$

Beweis. Sei u die erste Eigenfunktion zum Randwertproblem I und die Konstante c so gewählt, dass $u = c + u_1$ und $\int_{G_\mu} u_1 dF = 0$ ist. Dann gilt:

$$\int_{G_\mu} |\text{grad } u|^2 dF = \int_{G_\mu} |\text{grad } u_1|^2 dF \cong \frac{1}{4} \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF,$$

weil der erste Eigenwert des Neumannschen Randwertproblems auf G_μ grösser als $\frac{1}{4}$ ist.⁽²⁾ Andererseits ist nach vorstehendem Lemma (S_μ : vgl. Abb. 6):

$$\begin{aligned} \int_{G_\mu} |\text{grad } u|^2 dF &\cong \int_{S_\mu} |\text{grad } u|^2 dF \cong \lambda^R \int_{S_\mu} |u|^2 dF \\ &\cong \lambda^R \left(\int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2 \cdot \int_{S_\mu} |c| |u_1| dF \right) \\ &\cong \lambda^R \cdot \left(\int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \cdot \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda_1(F^\mu) \cong \text{Max} \left\{ \frac{\lambda^R \left(\int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \cdot \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF}, \frac{\frac{1}{4} \cdot \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF} \right\}$$

²Hebt man die zugehörige Eigenfunktion auf F^μ als Ueberlagerung von G_μ , so stellt man fest, dass wiederum mindestens ein ein- oder zweifachzusammenhängender Nullstellenbereich auftritt und (wie schon in 2.2) der Eigenwert deshalb grösser als $\frac{1}{4}$ ist.

Ueber $c_1 = \int_{G_\mu} |u_1|^2 dF$ wissen wir nichts. Die Tatsache, dass der erste Term monoton fallend und der zweite monoton wachsend in c_1 ist (vgl. Abb. 7), erlaubt folgende entscheidende Vereinfachung:

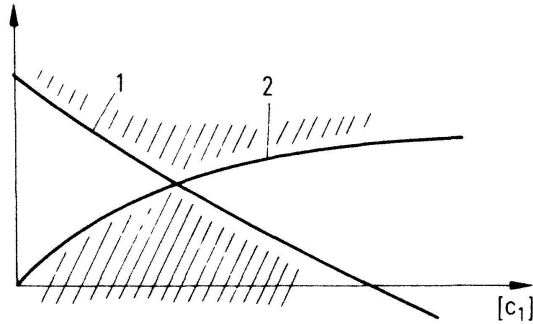


Abb. 7

Für alle $c_1 > 0$ gilt:

$$\lambda_1(F^\mu) \cong \text{Min} \left\{ \frac{\lambda^R \left(\int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \cdot c_1} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + c_1}, \frac{\frac{1}{4}c_1}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + c_1} \right\}$$

Für $c_1 = 8\sqrt{2}/\pi \sin \mu/8 \cdot |c|^2 \cdot \int_{S_\mu} 1 dF$ erhalten wir:

$$\lambda_1(F^\mu) \cong \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} \left(\int_{S_\mu} |c|^2 dF - 2|c| \sqrt{\int_{S_\mu} 1 dF \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} |c|^2 \int_{S_\mu} 1 dF} \right)}{\int_{G_\mu} |c|^2 dF + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\mu}{8} |c|^2 \int_{S_\mu} 1 dF}$$

$$\int_{S_\mu} 1 dF = \frac{\mu}{2\sqrt{2}\pi \sin \frac{\mu}{8}} \int_{G_\mu} 1 dF \quad \text{eingesetzt ergibt:}$$

$$\lambda_1(F^\mu) \cong \frac{\mu}{\pi^2} \cdot \frac{1 - 4\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}} \sin \frac{\mu}{8}}{1 + \frac{4\mu}{\pi^2}}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung (i).

Die Vergleichsfunktion $v = \operatorname{arctg} \operatorname{Sin} t$ (Koordinaten s und t vgl. Abb. 5, t : Abstand von der s -Achse) im Rayleigh-Quotienten von G_μ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(F^\mu) &\leq \frac{\int_{H_\mu} |\operatorname{grad} v|^2 dF}{\int_{H_\mu} |v|^2 dF} \\
 &\leq \frac{\frac{\mu}{8} \int_0^{R'} \frac{1}{\operatorname{Cos} t} dt}{\frac{\mu}{8} \int_0^R \operatorname{Cos} t (\operatorname{arctg} \operatorname{Sin} t)^2 dt + \int_{G_\mu - S_\mu} (\operatorname{arctg} \operatorname{Sin} R)^2 dF} \\
 &\leq \frac{\frac{\mu}{8} \operatorname{arctg} \operatorname{Sin} R'}{\frac{\mu}{8} (\operatorname{Sin} R (\operatorname{arctg} \operatorname{Sin} R)^2 - 2(\operatorname{arctg} \operatorname{Sin} R) \ln \operatorname{Cos} R) + (\operatorname{arctg} \operatorname{Sin} R)^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{8} \operatorname{Sin} R \right)} \\
 &\leq \frac{\frac{\mu}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \operatorname{Tg} \frac{\mu}{8} \right)}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{Sin} \frac{\mu}{8} \right) \right)^2 - \frac{\mu}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{Sin} \frac{\mu}{8} \right) \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2 \operatorname{Sin}^2 \mu/8} \right)} \\
 &\leq \frac{\mu}{\pi^2} \left(1 + \mu \ln \frac{3}{\mu} \right) \quad \text{für } \mu \leq 1. \quad \text{qed (ii)}
 \end{aligned}$$

Obiger Ausdruck ist für $\mu \leq 1$ immer $< \frac{1}{4}$ (zweite Behauptung von (A)). Der erste Eigenwert einer Membran ist immer einfach (keine Nodalstellen im Innern). Auf die Fläche F^μ übertragen ergibt dies die vierte Behauptung von (A). Aus der Abschätzung in 2.2 und der vierten Behauptung folgt schliesslich die dritte Behauptung. Damit ist (A) vollständig bewiesen.

3. Zu den Aussagen (B), (C) und (D).

Die Behauptungen (B), (C) und (D) werden im Rahmen dieser Arbeit nicht ausführlich bewiesen, weil dies schon in [6] getan worden ist. Im folgenden werden darum nur die wichtigsten Ideen kurz skizziert.

Die Aussagen (B) über die in 1.2 beschriebenen Flächen F_x erhält man analog denen in (A). Die Beweise sind etwas länger und komplizierter, weil die Isometriegruppen dieser Flächen komplizierter sind. Die verschärften Aussagen über die Fläche F_2 erfordern feine Methoden zur numerischen Abschätzung eines speziellen Randwertproblems.

Die Behauptung (D) beruht im wesentlichen auf den Tatsachen, dass erstens jede Geodätische auf einer hyperelliptischen Fläche, die durch zwei Weierstrasspunkte geht, geschlossen ist und darum die Kreise mit Radius $l_0/4$ um die Weierstrasspunkte eine nicht überlappende Kreisbelegung der Fläche bilden, und zweitens den Sätzen von Fejes-Toth [3] über Kreisbelegungen in der hyperbolischen Ebene.

Bloch hat in [1] den ersten Eigenwert des Laplace-Operators Δ in Abhängigkeit von Geschlecht und Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen abgeschätzt. (D) eingesetzt in seine Abschätzungen und die Untersuchungen über F_2 ergeben (C).

LITERATUR

- [1] BLOCH, A., *Eigenwerte des Laplace-Operators und Isometrieguppen auf kompakten Riemannschen Flächen*, Dissertation Basel (1981).
- [2] BUSER, P., *Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in $(0, \frac{1}{4})$* , *Comm. Math. Helv.* 52 (1977).
- [3] FEJES-TOTH, L., *Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene*, *Acta Math. Sci. Hungar.* 4 (1953).
- [4] HUBER, H., *Ueber die Darstellung der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators*, *Comm. Math. Helv.* 52 (1977).
- [5] HUBER, H., *On the Spectrum of the Laplace-Operator on Compact Riemannian Surfaces*, *Proceedings of Symposia in Pure Math.* 36 (1980).
- [6] JENNI, F., *Ueber das Spektrum des Laplace-Operators auf einer Schar kompakter Riemannscher Flächen*, Dissertation Basel (1981).
- [7] LEWITTES, J., *Automorphisms of Compact Riemannian Surfaces*, *Amer. J. of Math.* 85 (1963).

*Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel*

Received July 14, 1982