Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 69 (1994)

Artikel: Stabilität konformer Verheftung.
Autor: Huber, Alfred / Kühnau, Reiner
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52263

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 69 (1994) 311–321 0010–2571/94/020311–11$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Stabilität konformer Verheftung*

ALFRED HUBER UND REINER KÜHNAU

Joseph Hersch zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Sei $\Phi : e^{i\theta} \mapsto e^{i\varphi(\theta)}$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus des Einheitskreises $C = \{z \mid |z| = 1\}$ auf sich. Ist Φ genügend regulär, gibt es eine Jordankurve Γ und konforme Abbildungen $F : \operatorname{int} C \to \operatorname{int} \Gamma$, $G : \operatorname{ext} C \to \operatorname{ext} \Gamma$ mit $G(\infty) = \infty$ derart, daß

$$F(e^{i\theta}) = G(e^{i\varphi(\theta)}) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Eine zugleich notwendige und hinreichende Bedingung für Φ, welche die Existenz eines Γ impliziert, ist bis heute nicht bekannt. Eine hinreichende Bedingung – die Quasisymmetrie von Φ nach konformer Verpflanzung vom Einheitskreis auf die reelle Achse – wurde von O. Lehto und K. I. Virtanen [9] sowie auch A. Pfluger [11] gefunden. Diese Bedingung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn $\varphi(\theta)$ stetig differenzierbar ist. In den ersten vier Abschnitten sei letzteres – soweit wir nichts anders bemerken – dauernd vorausgesetzt.

Wir gehen aus von einem Homöomorphismus Φ_0 (mit zugehöriger Verheftungskurve Γ_0) und fragen, wie Γ_0 variiert, wenn Φ_0 abgeändert wird. Dabei interessiert insbesondere, ob eine kleine Abänderung von Φ_0 stets nur eine "kleine" Abänderung von Γ_0 zur Folge hat (Stabilität der Lösung, beziehungsweise Korrektheit der gestellten Aufgabe). Ein wichtiger Spezialfall ist der "triviale Fall" $u_0 \equiv 0 (\Leftrightarrow \Gamma_0 = C)$.

Zunächst wird bei (gleichmäßig) kleinem Unterschied zwischen φ' und 1 bewiesen, daß Γ "kreisnahe" ist. Allgemeiner wird gezeigt, daß eine kleine Abänderung von φ_0' eine kleine Abänderung der Kurve Γ_0 zur Folge hat. Diese Abschätzungen sind – wie Beispiele belegen – in einem gewissen Sinne bestmöglich. Als Hilfsmittel treten Verzerrungssätze bei quasikonformen Abbildungen auf.

---

* Entstanden aus einem Aufenthalt des zweiten Autors am Forschungsinstitut für Mathematik an der ETH Zürich.

Im weiteren wird – unter beträchtlich stärkeren Regularitätsvoraussetzungen – für den Spezialfall $\Gamma_0 = C$ gezeigt, daß $\log \varphi' \to O$ (im Sinne gleichmäßiger Konvergenz) zusammen mit $\|\log \varphi'\| \to O$ impliziert, daß $\|\log |F'|\| \to O$. Die Doppelstriche bezeichnen hier die Dirichletnorm einer in $D = \{z \mid |z| < 1\}$ harmonischen Funktion (vgl. Abschnitt 5). Hilfsmittel ist diesmal eine Minimaleigenschaft der Lösung des Verheftungsproblems.

2. Kreisnahe Verheftungskurven

Sei zunächst $\varphi(\theta)$ differenzierbar mit $\varphi'(\theta) > 0$. Und $\varphi(\theta)$ sei im Sinne von

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \varphi'(\theta) \leq 1 + \varepsilon \tag{2}$$

mit kleinem $\varepsilon > 0$ nahe der Identität. Die Kreisnähe von Γ messen wir durch den zugehörigen Spiegelungskoeffizienten $Q_\Gamma > 1$ (vgl. [6]), die Maximaldilatation einer möglichst konformen Spiegelung an Γ. Wenn wir noch

$$q_\Gamma = \frac{Q_\Gamma - 1}{Q_\Gamma + 1} < 1$$

setzen, dann wird der Spiegelungskoeffizient von Γ so mit einer unmittelbaren geometrischen Eigenschaft von Γ in Beziehung gesetzt. Wir sagen nach [7], Γ habe die "a-Ringeigenschaft", wenn zu *jedem* $w_0 \notin \Gamma$ nach linearer Transformation mit $w_0 \mapsto \infty$ das Bild von Γ in einem konzentrischen Kreisring des Radienverhältnisses $a \geq 1$ liegt, wobei dieses Bild die beiden Randkreise trennt. Nach [7] hat Γ für $q_\Gamma \leq 0{,}001$ die a-Ringeigenschaft mit

$$a = 1 + 2{,}55 \cdot q_\Gamma. \tag{3}$$

Übrigens folgt umgekehrt nach [3], daß q_Γ klein ist, falls Γ die a-Ringeigenschaft mit a nahe 1 besitzt.

SATZ 1. *Wenn die Verheftungsfunktion $\varphi(\theta)$ nahe der Identität ist im Sinne von* (2) *mit kleinem ε, dann ist*

(a) *Γ kreisnah im Sinne von*

$$q_\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

(b) *für* $\varepsilon \leqq 0{,}002$ *kreisnah in dem Sinne, daß* Γ *die a-Ringeigenschaft mit*

$$a = 1 + 1{,}275 \cdot \varepsilon \tag{5}$$

hat. Insbesondere liegt dann Γ *in einem konzentrischen Kreisring mit Radienverhältnis* (5).

Beweis. Durch

$$\zeta = |z| \cdot e^{i\varphi(\theta)} \text{ mit } \theta = \arg z \tag{6}$$

definieren wir eine Abbildung von $|z| < 1$ auf $|\zeta| < 1$ mit $0 \mapsto 0$, die die Dilatation

$$p(z) = \max\,(\varphi'(\theta), 1/\varphi'(\theta)) \tag{7}$$

besitzt. Nimmt man noch für $|z^*| > 1$ die Identität $\zeta(z^*) \equiv z^*$ hinzu, erhält man eine "quasikonforme Verheftung" von $|z| \leq 1$ und $|z^*| \geq 1$. Die Zusammenfassung der Abbildung $\zeta \mapsto F(z(\zeta))$, $\zeta \mapsto G(z^*(\zeta))$ stellt dann eine stetige schlichte Abbildung der ζ-Ebene dar, die für $|\zeta| > 1$ konform ist und für $|\zeta| < 1$ quasikonform. Nach [6] gilt dann mit (2), (7) $Q_\Gamma \leq \sup p(z) \leq 1 + \varepsilon$.

Das liefert schon Satz 1a. Daraus ergibt sich weiter Satz 1b nach (3).

BEMERKUNGEN. (a) Das in §4 folgende Beispiel der *Cassinischen Kurve* Γ zeigt, daß (5) zumindest in der Größenordnung bezüglich ε scharf ist, das heißt, ε^1 kann nicht durch eine höhere Potenz von ε ersetzt werden.

(b) In Satz 1 ist die Behauptung sicher nicht schon aus der Kleinheit von $|\varphi(\theta) - \theta|$ anstelle von (2) zu erhalten. Das zu sehen nehme man als Γ eine zahnradartige Kurve, die zum Beispiel aus Cassinischen Kurven von §4 durch n-te Wurzeloperation hervorgeht, wobei der zu 0 konzentrische, Γ enthaltende Kreisring kleinsten Radienverhältnisses ein konstantes Radienverhältnis für $n \mapsto \infty$ behält. Wegen der n-fachen Symmetrie kann man aber die Kleinheit von $|\varphi(\theta) - \theta|$ für $n \mapsto \infty$ erzielen.

(c) In der umgekehrten Richtung zu Satz 1 kann man sagen: Wenn q_Γ klein ist und eine 0 und ∞ vertauschende Q_Γ-quasikonforme Spiegelung an Γ existiert, dann ist bei der zugehörigen Verheftungsfunktion, falls $F(0) = 0$, $F(1) = G(1)$ neben $G(\infty) = \infty$ gefordert ist, auch $|\varphi(\theta) - \theta|$ klein.

Denn eine Q_Γ-quasikonforme Spiegelung an Γ induziert eine Q_Γ-quasikonforme Abbildung $z^*(z)$ von $|z| < 1$ auf $|z^*| > 1$ mit $0 \mapsto \infty$, $1 \mapsto 1$. Auf die Abbildung $1/\overline{z^*(z)}$ kann man einen Verzerrungssatz für quasikonforme Abbildungen anwenden

(vgl. [12], [2], Satz 3), der für hinreichend kleine q_Γ abschätzt

$$|\varphi(\theta) - \theta| < 10 \cdot q_\Gamma.$$

(d) Entsprechend zu Satz 1 läßt sich der allgemeinere Fall behandeln, bei dem die Verheftungsfunktion (nach linearer Transformation des Einheitskreises auf die obere Halbebene) als quasisymmetrisch vorausgesetzt wird. Aus der Bedingung für Quasisymmetrie läßt sich nämlich wieder explizit (vergleiche zum Beispiel [8]) eine Dilatationsschranke angeben.

3. Die Aufgabe der konformen Verheftung ist "korrekt gestellt"

Nimmt man nun bei der Außenabbildung $G(z^*)$ von $|z^*| > 1$ stets noch hydrodynamische Normierung

$$G(z^*) = z^* + O(1/z^*)$$

hinzu, so ergibt sich für die Verheftungsaufgabe neben der Existenz der Lösung, daß diese (also Γ und das Paar $F(z)$, $G(z^*)$) eindeutig bestimmt ist. Man sagt bekanntlich, die Aufgabe ist korrekt gestellt, wenn diese Lösung in einem gewissen Sinne stetig von den Vorgaben abhängt. Wir zeigen dies zunächst für differenzierbare Verheftungsfunktionen.

Es werde also auf dem Einheitskreis neben Φ noch entsprechend ein zweiter Homöomorphismus $\Phi_0 : e^{i\theta} \mapsto e^{i\varphi_0(\theta)}$ betrachtet, $\varphi_0(\theta)$ ebenfalls differenzierbar mit $\varphi_0'(\theta) > 0$. Dazu seien wieder $F_0(z)$ beziehungsweise $G_0(z^*)$ die sinngemäß entsprechenden zugehörigen konformen Abbildungen von $|z| < 1$ beziehungsweise $|z^*| > 1$, $G_0(z^*)$ wieder hydrodynamisch normiert.

SATZ 2. *Ist der Unterschied zwischen $\varphi_0(\theta)$ und $\varphi(\theta)$ im Sinne von*

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leq \frac{\varphi_0'(\theta)}{\varphi'(\theta)} \leq 1 + \varepsilon \tag{8}$$

klein (für kleine $\varepsilon > 0$), dann ist der Unterschied der entstehenden Kurven Γ_0 und Γ klein in dem Sinne, daß Γ_0 in einem $\sqrt{I/\pi} \cdot \varepsilon$-Schlauch um Γ liegt und umgekehrt Γ in einem solchen um Γ_0. Hier bezeichnet I den von Γ eingeschlossenen Flächeninhalt.

Zu jedem Punkt von Γ_0 existiert also ein Punkt auf Γ, dessen Abstand $\leq \sqrt{I/\pi} \cdot \varepsilon$ ist, und umgekehrt existiert zu jedem Punkt von Γ ein Punkt von Γ_0 mit Abstand $\leq \sqrt{I/\pi} \cdot \varepsilon$.

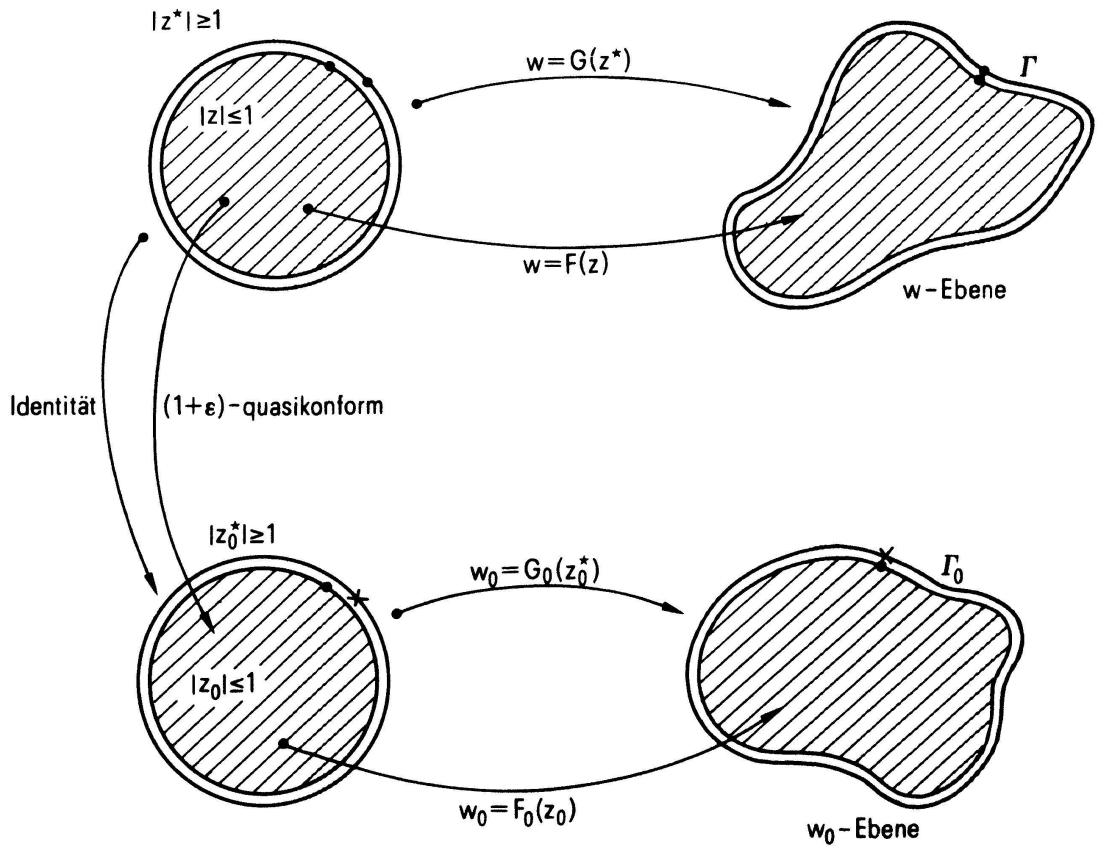
Beweis. Entsprechend zu Satz 1 studieren wir in dem Schema von Fig. 1 die folgende Abbildung der z- beziehungsweise z^*-Ebene einerseits und andererseits der z_0-beziehungsweise z_0^*-Ebene in Ebenen w und w_0. Wir setzen für $|z^*| > 1$ die Identität $z_0^* \equiv z^*$ an, und für $|z| < 1$ konstruieren wir analog zu (6) eine quasikonforme Abbildung, deren Dilatation

$$p(z) = \max\left(\frac{d\varphi_0}{d\varphi}, \frac{d\varphi}{d\varphi_0}\right) \tag{9}$$

ist, so daß sich die Verheftungsfunktionen entsprechen, und jedenfalls durch Zusammensetzung insgesamt eine stetige schlichte Abbildung $w_0(w)$ der w-Ebene auf die w_0-Ebene entsteht, die außerhalb Γ konform und hydrodynamisch normiert ist, innerhalb Γ quasikonform, wobei die Dilatation erfüllt $\sup p(z) \leq 1 + \varepsilon$. Für diese Abbildung gilt nach [5], Ungleichung (32'),

$$|w_0(w) - w| \leq \sqrt{I/\pi} \cdot \varepsilon. \tag{10}$$

Das liefert die Behauptung, sogar gleich noch die Kleinheit des Unterschiedes



Figur 1

zwischen $F(z)$ und $F_0(z)$ (beziehungsweise auch zwischen $G(z^*)$ und $G_0(z^*)$, falls noch $\varphi(0) = 0$ und $\varphi_0(0) = 0$ gefordert wird).

BEMERKUNG. Eine analoge Überlegung läßt sich allgemeiner bei quasisymmetrischen Verheftungsfunktionen anwenden, gleichwohl auch bei allgemeineren Verheftungsaufgaben, zum Beispiel wenn bei einem n-fach zusammenhängenden Vollkreisgebiet in die Löcher n Kreisscheiben konform eingeheftet werden sollen.

4. Beispiele von Verheftungsfunktionen, für die Γ explizit angebbar

Solche Beispiele erhält man, indem man umgekehrt ein Γ vorgibt und die beiden konformen Abbildungen für Innen- beziehungsweise Außengebiet auf das Innere beziehungsweise Äußere des Einheitskreises konstruiert. Die Frage ist nur, ob diese beiden Abbildungen hinreichend einfach sind. Das ist bekanntlich schon beim Beispiel einer Ellipse Γ nicht der Fall. Aber für eine Cassinische Kurve Γ erhält man verhältnismäßig einfache analytische Ausdrücke. Diese gehen wohl auf *O. Zariski* [13] zurück.

(a) Sei also Γ *die aus einem Zuge bestehende Cassinische Kurve* Γ

$$|w^2 - 1| = C \quad \text{mit} \quad C > 1. \tag{11}$$

Hier ist

$$w = G(z^*) = \sqrt{1 + Cz^{*2}} \tag{12}$$

die Abbildung von $|z^*| > 1$ auf's Äußere von Γ mit $G(\infty) = \infty$, $G'(\infty) > 0$. Das Innere von Γ entsteht aus $|z| < 1$ durch

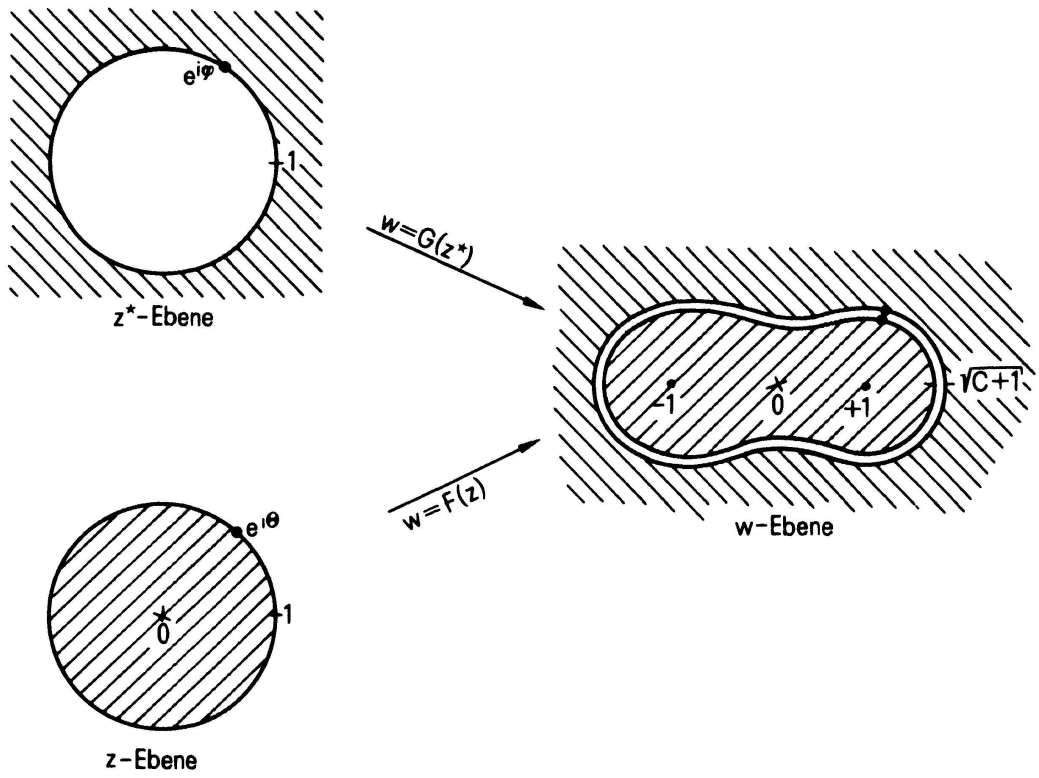
$$w = F(z) = z\sqrt{\frac{C^2 - 1}{C - z^2}} \tag{13}$$

mit $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$.

Zum Beweise bilde man durch die Abbildungskette

$$Z = z^2, \qquad \zeta = \frac{CZ - 1}{C - Z}, \qquad W = 1 + C\zeta, \qquad w = \sqrt{W}$$

zunächst die rechte Hälfte von $|z| < 1$ ab.



Figur 2

Durch Gleichsetzen von (12) und (13) entsteht für die Zuordnung zwischen $z = e^{i\theta}$ und $z^* = e^{i\varphi}$

$$z^* = \sqrt{\frac{Cz^2 - 1}{C - z^2}} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(\theta) = \theta + \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\theta}{C - \cos 2\theta}. \tag{14}$$

Für große C ist Γ bekanntlich konvex, und der konzentrische Kreisring mit kleinstem Radienverhältnis, der Γ enthält, muß zu 0 konzentrisch sein. Dieses Radienverhältnis ist also

$$\sqrt{\frac{C+1}{C-1}} = 1 + \frac{1}{C} + \cdots.$$

Also hat Γ nicht die a-Ringeigenschaft mit einem $a < 1 + 1/C + \cdots$, wohl aber nach (3) mit $a = 1 + 1{,}275/C + \cdots$, weil nach [6] ist

$$\lim_{C \to \infty} C \cdot q_\Gamma = \frac{1}{2}.$$

Für große C wird noch

$$\varphi'(\theta) = 1 + \frac{2}{C}\cos 2\theta + \cdots, 1 - \frac{2}{C} + \cdots \leq \varphi'(\theta) \leq 1 + \frac{2}{C} + \cdots.$$

(b) Ist Γ *die rechte Hälfte der zweiteiligen Cassinischen Kurve*

$$|w^2 - 1| = C \quad \text{mit} \quad 0 < C < 1, \tag{15}$$

wird sofort die Abbildung $F(z)$ von $|z| < 1$ auf's Innere von Γ mit $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$

$$w = F(z) = \sqrt{1 + Cz}. \tag{16}$$

Ferner ist für die Abbildung $G(z^*)$ von $|z^*| > 1$ auf's Äußere von Γ mit $G(\infty) = \infty$, $G'(\infty) > 0$

$$w = G(z^*) = \sqrt{1 + Cz^{*2}\frac{z^* - c}{1 - cz^*}}, \tag{17}$$

wenn $c < -1$ denjenigen Punkt z^* bezeichnet, der in $w = -1$ übergeht. Das sieht man so. Die Funktion

$$(w^2 - 1)\Big/\left[z^{*2}\frac{z^* - c}{1 - cz^*}\right]$$

ist für $|z^*| \geq 1$ incl. $z^* = \infty$ regulär und nullstellenfrei und auf $|z^*| = 1$ von konstantem Betrag, also schlechthin eine Konstante. Letztere ergibt sich wegen $G(1) = \sqrt{C + 1}$.

In w^2 wird der Zähler

$$Cz^{*3} - cCz^{*2} - cz^* + 1.$$

Dieses Polynom muß im Urbild z^* von $w = 0$ eine Doppelnullstelle haben. Also verschwindet die Diskriminante, was zu

$$Cc^4 + 4(1 + C^2)c^3 + 18Cc^2 - 27C = 0$$

führt. Statt zu gegebenem C, das heißt zu gegebener Cassinischer Kurve, das

zugehörige c über diese Gleichung 4. Grades zu bestimmen, ist es bequemer, umgekehrt zu gegebenem c das zugehörige C zu bestimmen.

Durch Gleichsetzen der beiden Funktionen (16) und (17) entsteht die Zuordnung zwischen $z = e^{i\theta}$ und $z^* = e^{i\varphi}$:

$$z = z^{*2} \cdot \frac{z^* - c}{1 - cz^*} \quad \text{bzw.} \quad \theta = \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{c - \cos \varphi}. \tag{18}$$

(c) Verhältnismäßig einfach wird die Verheftungsfunktion auch im Falle, wo Γ das Bild einer Parabel bei linearer Transformation ist, nämlich eine *Kardioide*.

5. Konvergenz in der Dirichletnorm

Es bezeichne R den normierten linearen Raum der auf $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$ definierten und harmonischen Funktionen, versehen mit der üblichen linearen Struktur und der Dirichletnorm,

$$\|h\| := \left\{ \iint_D \operatorname{grad}^2 h \, dx \, dy \right\}^{1/2} \qquad (h \in R).$$

Im folgenden gelte die starke Voraussetzung, daß in $\Phi : e^{i\theta} \mapsto e^{i\varphi(\theta)}$ die Funktion $u = \log \varphi'(\theta)$ die Einschränkung auf C einer Funktion aus R – die wir ebenfalls mit u bezeichnen – sei.

SATZ 3. *Für jede im eben erwähnten Sinne reguläre Funktion u ist mit* $m := \max_{z \in C} |u(z)|$

$$\|\log|F'|\| \leq 2\|u\| + \sqrt{\pi(1 + 4\pi^2)} \cdot (e^m - 1). \tag{19}$$

Beweis. Sei H der normierte lineare Raum aller geordneten Paare $[u, v]$ von Elementen aus R, versehen mit der naheliegenden linearen Struktur und der Norm

$$\|[u, v]\|_H := \{\|u\|^2 + \|v\|^2\}^{1/2}. \tag{20}$$

Diese erzeugt in H in bekannter Weise eine Metrik. Außerdem führen wir in H die in [4] definierte Hyperebene Σ ein. In [4] wurde folgender Satz bewiesen: *Unter allen Punkten von Σ ist* $[\log|F'(z)|, -\log|G'(1/\bar{z})|]$ *derjenige mit dem kürzesten Abstand von* $[u, \underline{0}]$. (*Hier bezeichnet* $\underline{0}$ *die Konstante* 0.)

Als Folge der Normdefinitionen, der Dreiecksungleichung in H und des Satzes in [4] gilt

$$\begin{aligned}\|\log|F'|\| &\le \|[\log|F'(z)|, -\log|G'(1/\bar{z})|]\|H \\ &\le \|[u, \underline{0}]\|_H + \|[\log|F'(z)| - u(z), -\log|G'(1/\bar{z})| - \underline{0}]\|_H \\ &\le \|u\| + \|[h-u, h^* - \underline{0}]\|_H \end{aligned} \tag{21}$$

für alle Punkte $[h, h^*]$ in Σ. Wählen wir insbesondere $h = \underline{0}$, so folgt damit aus (21)

$$\|\log|F'|\| \le 2\|u\| + \|\underline{0}^*\|, \tag{22}$$

da nämlich $\|[h-u, h^* - \underline{0}]\|_H \le \|h-u\| + \|h^*\|$.

Aus der in [4] gegebenen Definition schließen wir, daß $\|\underline{0}^*\|^2$ gleich dem Dirichletintegral der (beschränkten) harmonischen Funktion mit den Randwerten $\varphi(\theta) - \theta$ ist. Eine Abschätzung dieses Dirichletintegrals nach oben liefert das Dirichletintegral *irgendeiner* Funktion mit denselben Randwerten. Wählen wir

$$f(re^{i\theta}) = r\int_0^\theta (\exp[u(e^{it})] - 1)\, dt,$$

so erhalten wir nach leichter Rechnung

$$\iint_D (f_r^2 + r^{-2}f_\theta^2) r\, dr\, d\theta \le \pi(1+4\pi^2)(e^m - 1)^2,$$

und damit (19) wegen

$$\|\underline{0}^*\| \le \sqrt{\pi(1+4\pi^2)} \cdot (e^m - 1).$$

BEMERKUNG. Kleinheit der rechten Seite von (19) vorauszusetzen ist natürlich schärfer, als entsprechend Satz 1 Kleinheit von q_Γ anzunehmen. Dafür aber ist auch die Behauptung von Satz 3 stärker als in Satz 1. Das ergibt sich aus

$$(1-|z|^2)|F''(z)/F'(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\iint_D |F''/F'|^2\, dx\, dy\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\log|F'|\|$$

(vgl. zum Beispiel [10], S. 261, Exercise 3, angewandt auf F''/F'), denn nach [1] gilt dann $q_\Gamma \le \|\log|F'|\|/\sqrt{\pi}$.

LITERATUR

[1] J. BECKER, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. reine angew. Math. *255*, 23–43 (1972).

[2] P. P. BELINSKIJ, *Lösung von Extremalaufgaben der Theorie der quasikonformen Abbildungen durch die Variationsmethode*, Sibirsk. mat. zurn. *1*, No. 3 (1960), 303–330 [Russisch].

[3] F. W. GEHRING and CH. POMMERENKE, *Circular distortion of curves and quasicircles*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. Math. *14* (1989), 381–390.

[4] A. HUBER, *Konforme Verheftung und Dirichletsches Prinzip*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. Math. *10* (1985), 261–265.

[5] R. KÜHNAU, *Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien*, Comment. Math. Helv. *53* (1978), 408–428.

[6] R. KÜHNAU, *Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve*, Jahresber. d. DMV *90* (1988), 90–109.

[7] R. KÜHNAU, *Eine geometrische Eigenschaft quasikonformer Kreise*, Revue Roum. Math. Pures Appl. *32* (1987), 909–913.

[8] M. LEHTINEN, *A real-analytic quasiconformal extension of a quasisymmetric function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. Math. *3* (1977), 207–213.

[9] O. LEHTO und K. I. VIRTANEN, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.

[10] Z. NEHARI, *Conformal mapping*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1952.

[11] A. PFLUGER, *Über die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) *24* (1960), 401–412 (1961).

[12] SHAH TAO SHING (HSIAO TAO-HSING), *Parameterdarstellung quasikonformer Abbildungen* [Russ.]. Science Record (Peking), N.S. *3* (1959), 400–407.

[13] O. ZARISKI, *Sulla rappresentazione conforme dell'area limitata da una lemniscata sopra un cerchio.* Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) *4* (1926), 22–25.

Freudenbergstr. 101
CH-8044 Zürich
(vormals ETH Zürich)

und

FB Mathematik der
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
D-06099 Halle an der Saale/Deutschland

Received July 27, 1993