Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 1 (1946)

Heft: 1

Artikel: Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen

Autor: Buchner, P

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1192

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band 1 Nr. 1 Seiten 1–24 Basel, 15. Januar 1946

Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen

Vor Jahresfrist habe ich den Schülern das folgende Problem als Preisaufgabe gestellt: In einer Ebene sind die vier Punkte A, B, C und D in allgemeiner Lage gegeben. Gesucht ist jenes Quadrat, dessen Seiten, oder deren Verlängerungen, durch die gegebenen Punkte gehen. Diese Aufgabe ist deswegen besonders reizvoll, weil sie auf sehr verschiedene Arten gelöst werden kann.

1. Elementargeometrische Lösung

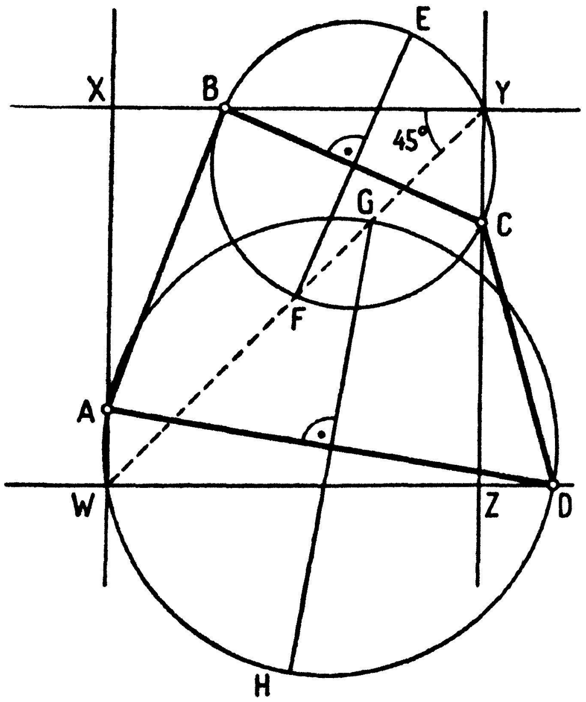

Fig. 1

Zu jeder Richtung durch A können durch C die Parallele und durch B und D die Senkrechten gezogen werden, so daß es unendlich viele Rechtecke gibt, deren Seiten durch die vier gegebenen Punkte in der verlangten Art hindurchgehen.

Soll die umgezeichnete Figur $WXYZ$ ein Quadrat sein, dann muß die Diagonale WY mit den Seiten Winkel von 45° einschließen. Der Thaleskreis über der Seite BC enthält die Ecke Y und schneidet überdies die Diagonale WY in der Bogenmitte F von BC. Ebenso geht der Thaleskreis über AD durch die Ecke W und trifft die

Diagonale WY in der Bogenmitte G von AD. Die Diagonale WY ist somit durch F und G bestimmt. Ebenso legen FH, EG und EH Diagonalen weiterer umgezeichneter Quadrate fest. Verwendet man die Thaleskreise über AB und CD, so erhält man wiederum vier Lösungen, davon sind aber zwei mit den schon gefundenen Lösungen identisch, so daß die Aufgabe im allgemeinen sechs Lösungen zuläßt.

2. Trigonometrische Lösung

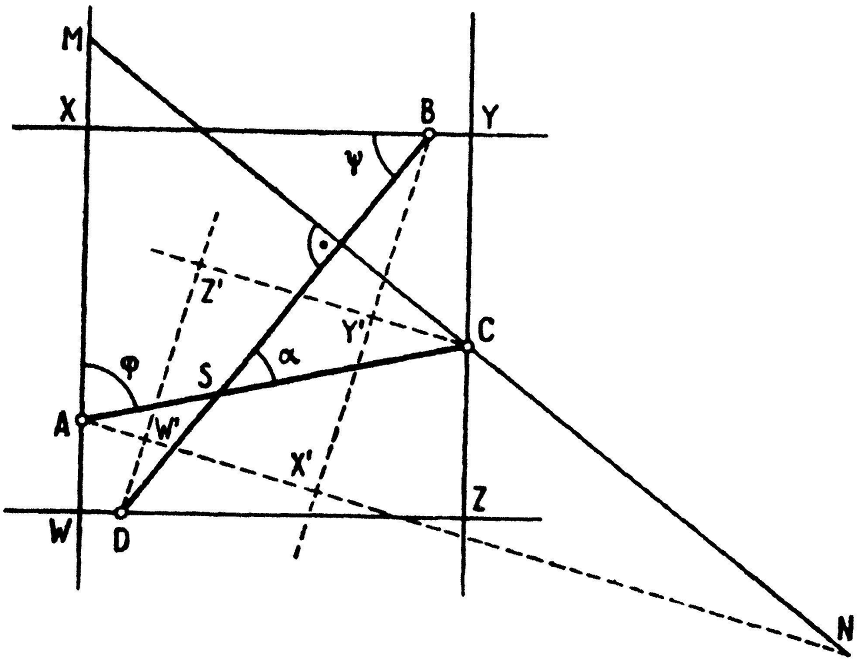

Fig. 2

Es sei α der Winkel zwischen AC und BD, $\sphericalangle XAC = \varphi$ und $\sphericalangle XBD = \psi$, dann gilt bei der in der Figur angenommenen Lage

$$\varphi + \psi = 90^0 + \alpha, \quad XY = AC \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad WX = BD \cdot \sin\psi.$$

Soll die dem Viereck $ABCD$ umgezeichnete Figur $WXYZ$ ein Quadrat sein, dann muß

$$XY = WX \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{BD} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \quad \text{sein.}$$

Fällt man von C auf die Strecke BD das Lot $CM = CN = BD$, dann enthält das Dreieck ACM die gegebenen Seiten AC, BD und den Zwischenwinkel $90-\alpha$, daher ist nach vorigem $\sphericalangle CMA = \psi$ und M ein Punkt der Seite WX, die damit gefunden ist. An Stelle von M kann N treten, so daß man zwei Lösungen erhält. Wird die Strecke AC durch AB oder AD ersetzt, so erhält man vier weitere Lösungen.

Steht BD auf AC senkrecht, dann ist der Schnittpunkt S als ein doppeltzählendes, ausgeartetes Quadrat aufzufassen. Sind außerdem AC und BD gleich lang, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

3. Lösung mit Hilfe der analytischen Geometrie

Der Koordinatenursprung werde in den Punkt A und die x-Achse durch B gelegt. Die vier gegebenen Punkte haben dann die Koordinaten $A\,(0;0)$, $B\,(x_2;0)$, $C\,(x_3;y_3)$, $D\,(x_4;y_4)$. Die Gleichungen der Seiten eines umgezeichneten Rechteckes heißen dann

$$y = mx, \quad y = -\frac{1}{m}(x - x_2), \quad y - y_3 = m(x - x_3), \quad y - y_4 = -\frac{1}{m}(x - x_4).$$

Bei einem Quadrat fällt die Winkelhalbierende des ersten Seitenpaares mit jener des zweiten Paares zusammen, das heißt die Gleichungen

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - x_2}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{y - mx + mx_3 - y_3}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - my_4 - x_4}{\sqrt{1+m^2}}$$

sind identisch. Dies ist der Fall, wenn

$$m = \frac{x_2 - x_4 \pm y_3}{y_4 \pm x_3}$$

ist, einem leicht konstruierbaren Ausdruck.

Die Richtung bleibt unbestimmt, wenn zugleich

$$x_2 - x_4 \pm y_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_4 \pm x_3 = 0$$

wird. Es sei der Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AC}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BD}$, dann ist

$$|\mathfrak{a}|^2 = x_3^2 + y_3^2 = y_4^2 + (x_4 - x_2)^2 = |\mathfrak{b}|^2,$$

d. h. die Vektoren sind gleich lang. Außerdem ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = x_3(x_4 - x_2) + y_3 y_4 = 0,$$

das heißt, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Stehen die Strecken AC und BD senkrecht aufeinander und sind gleich lang, dann gibt es unendlich viele umgezeichnete Quadrate.

P. BUCHNER, Basel

Sur les droites associées de l'espace à n dimensions

Extraits d'une correspondance échangée entre Messieurs

Louis Kollros (Zurich) et A. Longhi (Lugano)

KOLLROS à LONGHI (9 juillet et 26 octobre 1945):

... $(n+1)$ droites de l'espace à n dimensions E_n sont dites *associées*, si tout espace linéaire E_{n-2} qui en rencontre n coupe aussi la dernière.

Dans un mémoire intitulé: «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen» (CRELLE 65, p. 189–197), SCHLÄFLI a démontré le théorème: *Les droites joignant les paires de sommets correspondants de deux simplexes polaires réciproques par rapport à une quadrique de E_n sont associées.* Le théorème inverse a été démontré par BERZOLARI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XX, 1905, p. 229–247): Si les droites joignant les sommets homologues de deux simplexes de E_n sont associées, ces simplexes sont polaires réciproques par rapport à une quadrique de E_n.