Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 1

Artikel: Sur les droites associées de l'espace à n dimensions

Autor: Kollros, Luis / Longhi, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1193

$$y = mx, \quad y = -\frac{1}{m}(x - x_2), \quad y - y_3 = m(x - x_3), \quad y - y_4 = -\frac{1}{m}(x - x_4).$$

Bei einem Quadrat fällt die Winkelhalbierende des ersten Seitenpaares mit jener des zweiten Paares zusammen, das heißt die Gleichungen

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - x_2}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{y - mx + mx_3 - y_3}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - my_4 - x_4}{\sqrt{1+m^2}}$$

sind identisch. Dies ist der Fall, wenn

$$m = \frac{x_2 - x_4 \pm y_3}{y_4 \pm x_3}$$

ist, einem leicht konstruierbaren Ausdruck.

Die Richtung bleibt unbestimmt, wenn zugleich

$$x_2 - x_4 \pm y_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_4 \pm x_3 = 0$$

wird. Es sei der Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AC}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BD}$, dann ist

$$|\mathfrak{a}|^2 = x_3^2 + y_3^2 = y_4^2 + (x_4 - x_2)^2 = |\mathfrak{b}|^2,$$

d. h. die Vektoren sind gleich lang. Außerdem ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = x_3(x_4 - x_2) + y_3 y_4 = 0,$$

das heißt, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Stehen die Strecken AC und BD senkrecht aufeinander und sind gleich lang, dann gibt es unendlich viele umgezeichnete Quadrate.

P. BUCHNER, Basel

Sur les droites associées de l'espace à n dimensions

Extraits d'une correspondance échangée entre Messieurs
Louis Kollros (Zurich) et A. Longhi (Lugano)

KOLLROS à LONGHI (9 juillet et 26 octobre 1945):

... $(n+1)$ droites de l'espace à n dimensions E_n sont dites *associées*, si tout espace linéaire E_{n-2} qui en rencontre n coupe aussi la dernière.

Dans un mémoire intitulé: «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen» (CRELLE 65, p. 189–197), SCHLÄFLI a démontré le théorème: *Les droites joignant les paires de sommets correspondants de deux simplexes polaires réciproques par rapport à une quadrique de E_n sont associées.* Le théorème inverse a été démontré par BERZOLARI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XX, 1905, p. 229–247): Si les droites joignant les sommets homologues de deux simplexes de E_n sont associées, ces simplexes sont polaires réciproques par rapport à une quadrique de E_n.

On peut en déduire les deux corollaires suivants:

1) Les $(n+1)$ hauteurs d'un simplexe de E_n sont associées.
2) Pour que $(n+1)$ droites passant respectivement par les $(n+1)$ sommets d'un simplexe de E_n soient associées, il faut et il suffit qu'elles joignent chaque sommet du simplexe au point de contact de la face opposée avec une quadrique inscrite au simplexe.

Comme une quadrique de E_n est déterminée par $\frac{1}{2} n (n+3)$ de ses hyperplans tangents indépendants et que la donnée d'un E_{n-1} tangent avec son point de contact équivaut à n hyperplans tangents, il résulte du corollaire 2) que *si l'on veut mener par les sommets d'un simplexe de E_n des droites associées, on peut en donner au plus* $1 + \left[\frac{n}{2}\right]$, $\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right.$ désignant le plus grand nombre entier $\left.\leq \frac{n}{2}\right)$. Pour $n \geq 4$, il faut cependant que les conditions imposées ainsi à la quadrique inscrite soient compatibles.

Votre démonstration de ce résultat m'intéresserait ainsi que celle de votre théorème relatif aux $1+\left[\frac{3n}{4}\right]$ droites de E_n qui déterminent des groupes de $(n+1)$ droites associées en nombre fini ou infini; pour $n = 4$, c'est le théorème de SEGRE: tous les plans E_2 incidents à 4 droites de E_4 en coupent encore *une seule* cinquième; tandis que, pour $n = 3$, les droites de E_3 incidentes à 3 droites données en coupent encore *une infinité* d'autres.

Pour $n > 4$, ce nombre $1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$ est une *borne* supérieure; il est possible que la *limite* supérieure exacte soit plus petite.

LONGHI à KOLLROS (13 juillet 1945):

... Come risulta dal Vostro corollario 2) i gruppi di $(n+1)$ rette associate passanti per i vertici di un *simplexe* Σ dello spazio E_n ad n dimensioni, sono tanti quante le quadriche di E_n inscritte in Σ, e quindi formano una totalità di dimensione:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} n (n+3) - (n+1) = \tfrac{1}{2} (n-1) (n+2).$$

D'altra parte, in E_n il passaggio di una retta per un punto impone alla retta stessa $n-1$ condizioni (semplici); ne segue che *tutti i gruppi di* $(n+1)$ *rette associate di* E_n *costituiscono un sistema algebrico di dimensione*:

$$\tau = \sigma + (n-1)(n+1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(3n+4).$$

Ora, per fissare in E_n una retta variabile, uscente da un vertice di Σ, occorre sottoporla ad $n-1$ condizioni; pertanto *sono* $\infty^{\sigma-(n-1)x}$ *le* $(n+1)$*-uple di rette associate passanti per i vertici di* Σ *e contenenti ciascuna* x *rette preassegnate*. Per l'effettiva esistenza di tali $(n+1)$-uple dev'essere $\sigma - (n-1)x \geq 0$, cioè:

$$x \leq \tfrac{1}{2}(n+2).$$

Il massimo valore di x è quindi $\xi = 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$; e si ha allora:

$$\sigma - (n-1)\,\xi = (n-1)\left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Dunque:

In un gruppo di $(n+1)$ rette associate passanti per i vertici di Σ si possono assegnare ad arbitrio al più $1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ rette; e dopo ciò il gruppo è completabile in $\infty^{(n-1)\left(\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]\right)}$ modi diversi.

La condizione perchè una retta di E_n coincida con una data ha la dimensione $2(n-1)$; ne risulta che *fra gli ∞^{τ} gruppi di $(n+1)$ rette associate di E_n ve ne sono $\infty^{\tau-2(n-1)y}$ aventi ciascuna y rette prestabilite*; purchè, naturalmente, sia

$$\tau - 2\,(n-1)\,y \geqq 0,$$

cioè:

$$y \leqq \tfrac{1}{4}\,(3n+4).$$

Il massimo valore di y è allora $\eta = 1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$; e poichè:

$$\tau - 2\,(n-1)\,\eta = 2\,(n-1)\left(\frac{3n}{4} - \left[\frac{3n}{4}\right]\right),$$

si conclude che:

Il massimo numero di rette assegnabili genericamente in E_n, se si vuole che esse facciano insieme parte di almeno un gruppo di $(n+1)$ rette associate, è uguale a $1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$; e la totalità delle $(n+1)$-uple di rette associate, che contengono un tal numero di rette prefissate, ha la dimensione:

$$2\,(n-1)\left(\frac{3n}{4} - \left[\frac{3n}{4}\right]\right).$$

Analogamente si stabilisce che:

Se in un gruppo variabile di $(n+1)$ rette associate di E_n, se ne costringono μ a passare ciascuna per un punto dato e altre ν a coincidere ciascuna con una retta data $(\mu+\nu \leqq n+1)$, quel gruppo risulta determinato in ∞^{ω} modi, ove:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(3n+4-2\mu-4\nu),$$

purchè sia $\mu + 2\,\nu \leqq n + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$.

Quanto precede si può ulteriormente estendere in vario senso: come mostrerò in un lavoro di prossima pubblicazione.

Osservazione (26. 10. 45). E ovvio che *le conclusioni precedenti presuppongono la compatibilità e indipendenza delle condizioni imposte ai gruppi di rette considerati:* altrimenti è possibile che i massimi $1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ e $1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$ subiscano una riduzione.