

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 23.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\Delta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} \cdot \frac{y + \sqrt{\frac{r}{e}} y_1 - y_2}{\sqrt{\frac{e}{r}} y + y_1}.$$

Nun muß gezeigt werden, daß der Zähler des zweiten Faktors größer ist als dessen Nenner. Setze zu diesem Zweck $\frac{r}{e} y_1 = z$ und $\frac{e}{r} y = u$, woraus $z : y = y_1 : u$ (1) folgt. Ferner ziehe in Fig. 1 $AE \parallel BC$ und $BD \parallel AC$ und verbinde A' mit E , dann erweisen sich AE als z und BD als u . Nun ist $\sqrt{\frac{r}{e}} y_1 = \sqrt{z y_1}$ und $\sqrt{\frac{e}{r}} y = \sqrt{u y}$, also wegen (1) $\sqrt{z y_1} : \sqrt{u y} = y_1 : u$ (2), folglich (3) $\sqrt{z y_1} > \sqrt{u y}$, weil $y_1 > u$.

Aus $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAE$ folgt $CE = AB$, daher $\varepsilon = \alpha + \beta$. Aus (1) ergibt sich ferner, daß die Dreiecke ACE und BDC ähnlich sind, daß also E, C, D in einer Geraden liegen, daher ist im Trapez $ACDB$ $\sphericalangle ACD = \varepsilon + \beta = 2\beta + \alpha$. Zieht man in der Fig. 2, die

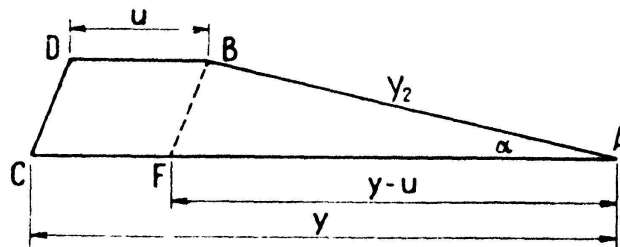


Fig. 2

dieses Trapez allein wiedergibt, $BF \parallel DC$, so muß der Winkel ABF unbedingt stumpf sein, denn $\sphericalangle ABF = 180^\circ - \alpha - (2\beta + \alpha) = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$ und $\alpha + \beta$ ist wegen der vorausgesetzten Beschränkung auf den ersten Quadranten sicher kleiner als 45° . Daher $AF > AB$, also $y - u > y_2$ oder $y - y_2 > u$, das heißt aber: es ist der in Rede stehende Zähler $y + \sqrt{z y_1} - y_2 > \sqrt{z y_1} + u$ (4).

Wendet man auf die Proportion (2) den Satz von der korrespondierenden Subtraktion an, so folgt $(\sqrt{z y_1} - \sqrt{u y}) : \sqrt{u y} = (y_1 - u) : u$, also wegen $\sqrt{y u} > u$ offenbar $\sqrt{z y_1} - \sqrt{u y} > y_1 - u$, woraus schließlich: $\sqrt{z y_1} + u > y_1 + \sqrt{u y}$ (5).

Der Ausdruck rechts vom Ungleichheitszeichen in (5) ist aber der in Rede stehende Nenner. Die Gegenüberstellung von (4) und (5) erbringt das Gewünschte, nämlich daß der betreffende Zähler größer ist als der zugehörige Nenner, und damit ist der ganze Satz bewiesen.

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich

Kleine Mitteilungen

I. *Bemerkung zum Rationalmachen von Gleichungen mit Quadratwurzeln.* Irrationale Gleichungen mit Quadratwurzeln sucht man bekanntlich dadurch rational zu machen, daß man die Wurzeln möglichst auf einer Seite vereinzelt und beide Seiten der Gleichung ins Quadrat erhebt. Man hat nachher bloß zu untersuchen, ob die Lösungen

der neuen Gleichung auch die alte befriedigen; denn solche Gleichungen sind im allgemeinen nicht äquivalent. Bei den in der Schule gewöhnlich verwendeten Beispielen gelingt das Verfahren leicht. Aber wie steht es um seine Begrenzung? Gelingt es noch bei der Form

$$a + x + \sqrt{b+x} = \sqrt{c+x} + \sqrt{d+x} ?$$

Oder bei dieser:

$$x + \sqrt{x^2 - ax - b} = \sqrt{x} + \sqrt{x-d} + \sqrt{x+d} ?$$

Man bekommt beim Versuch jedenfalls eine große Schreibarbeit. Das hat mich veranlaßt, im Unterricht eine sehr weitgehende Abkürzung zu erproben, indem ich sämtliche wurzelfreien Ausdrücke nur durch einen (kräftigen) waagrechten Strich, der also ihre *Summe* bedeutet, und die einzelnen Wurzeln nur durch je einen, allenfalls verschiedenfarbigen, senkrechten Strich wiedergab. Dann sieht das erste Beispiel so aus:

$$- | = | | .$$

Von den Zeichen genügt das der Gleichheit. Nach dem Quadrieren beider Seiten sieht die Schrift zunächst so aus:

$$- | - = - | -$$

Denn links wie rechts liefert nur noch das doppelte Produkt ($2ab$) eine Quadratwurzel. Wegen der Vorschrift, daß alle wurzelfreien Ausdrücke durch ein einziges Zeichen wiedergegeben werden, kommt man sofort zur einfacheren Form:

$$| = - | .$$

Sie liefert durch Quadrieren nur noch auf der rechten Seite eine Quadratwurzel, sinnbildlich:

$$- = | .$$

Denn der wurzelfreie Ausdruck rechts wird nach links hinübergezogen. Durch nochmaliges Quadrieren wird demnach die Gleichung wurzelfrei, allerdings, da man dreimal quadriert hat, vom achtfachen Grade der ursprünglich höchsten Potenz.

Beim zweiten Zahlenbeispiel läßt sich vorerst einmal zeigen, daß drei Quadratwurzeln auf einer Seite keine Verminderung ergeben: in $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ bedeuten hier die doppelten Produkte neue, verschiedene Quadratwurzeln. Aus

$$| | | \text{ wird durch Quadrieren } - | | | .$$

Man müßte demnach eine der drei Quadratwurzeln von rechts nach der linken Seite schaffen und erst nachher quadrieren:

$$\begin{aligned} - | | &= | | \\ - | | | &= - | . \end{aligned}$$

Weil aber auch links die doppelten Produkte drei neue Quadratwurzeln erzeugen, bekommt man nur wiederum vier Quadratwurzeln und noch dazu umfangreichere: man kann eine solche Gleichung nicht durch Quadrieren rational machen.

Mit vier Wurzeln geht es nur dann noch, wenn kein wurzelfreier Ausdruck vorhanden ist; man ordnet sie zu zweien auf einer Seite an:

$$\begin{aligned} | | &= | | , \\ \text{quadriert und bekommt} \quad - | &= - | , \end{aligned}$$

worin man einen waagrechten Strich sofort weglassen kann, d. h. man gelangt auf das lösbare Beispiel zurück.

Daß es mit fünf Quadratwurzeln bei keiner Anordnung mehr geht, das zu zeigen, bereitet den Schülern im allgemeinen Spaß. Das Verfahren hat also seine Beschränkung

im allgemeinen bei drei Quadratwurzeln und wurzelfreien Ausdrücken oder vier Quadratwurzeln ohne weitere Terme¹⁾.

Eigenartig ist es, zu beobachten, wie die Schüler reagieren, wenn man sie vor die Frage stellt, ob das nun Mathematik oder Spielerei bedeute, wenn man mit solchen zahlenlosen Symbolen hantiert. Nur zögernd ringen sie sich zur Erkenntnis durch, daß es wirkliche Mathematik ist, so sehr sind sie an Zahlen und Buchstaben gewöhnt.

ERWIN VOELLMY, Basel

II. *Arithmetisches und geometrisches Mittel.* Der Unterschied zwischen dem arithmetischen Mittel $S_n:n$ und dem geometrischen Mittel $\sqrt[n]{P_n}$ eines Systems von n positiven Zahlen sinkt bekanntlich nie unter Null. Es besteht also die Ungleichung

$$\Delta = S_n - n \cdot \sqrt[n]{P_n} \geq 0.$$

Ohne Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit des Satzes dürfen wir die n Größen so normieren, daß ihr Produkt den Wert 1 hat, indem wir nötigenfalls sämtliche durch ihr geometrisches Mittel teilen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich der Satz folgendermaßen formulieren: Die Summe von n positiven Größen, deren Produkt den Wert 1 hat, beträgt mindestens n . Die Summe ist dann und nur dann gleich n , wenn alle Summanden einander gleich sind.

Die zu beweisende Ungleichung lautet in dieser Annahme

$$\Delta = S_n - n \geq 0.$$

Beweis für $n=2$. Die Zahlen heißen x und $\frac{1}{x}$. Die Differenz

$$\Delta = x + \frac{1}{x} - 2 \equiv \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$$

ist stets positiv und verschwindet nur dann, wenn $x=1$, d. h. wenn beide Größen x und $\frac{1}{x}$ gleich sind.

Beweis für $n=3$. Das Produkt zweier der Grundzahlen sei p^2 , so daß sich die drei Zahlen in der Form px , $\frac{p}{x}$ und $\frac{1}{p^2}$ darstellen lassen. Wir bilden die Differenz

$$\Delta = px + \frac{p}{x} + \frac{1}{p^2} - 3 \equiv p \left(x + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{p^2} - 3.$$

Nach dem Falle $n=2$ ist die Klammer mindestens gleich 2; folglich:

$$\Delta \geq 2p + \frac{1}{p^2} - 3 \equiv \frac{(p-1)^2(2p+1)}{p^2}.$$

Im Bereiche positiver p ist die rechte Seite immer positiv mit Ausnahme des Falles $p=1$. Das Minimum von Δ wird also dann und nur dann erreicht, wenn erstens $p=1$ und zweitens $x + \frac{1}{x} = 2$, also alle drei Zahlen px , $\frac{p}{x}$ und $\frac{1}{p^2}$ einander gleich sind.

Induktionsbeweis für $n > 3$. Die n Größen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ teilen wir in zwei Gruppen von 2 und $n-2$ Gliedern ein:

¹⁾ Die allgemeinere Theorie verlangt, daß man die Gleichung auf die Nullform bringe und weiter *alle* jene Gleichungen in derselben Form aufstelle, die sich von der gegebenen nur durch die Variation der Vorzeichen der Quadratwurzeln unterscheiden. Bei k auftretenden Quadratwurzeln ergeben sich so 2^k Gleichungen. Das Produkt der sämtlichen Gleichungspolynome, wiederum gleich null gesetzt, liefert eine wurzelfreie Gleichung; unter ihren sehr vielen Lösungen befinden sich auch die gesuchten. — Dieses Verfahren wäre für die Schule ebensogut anwendbar wie das oben benützte, wenn sich nicht daraus Gleichungen von allzu hohem Grad ergeben würden.

a_1, a_2 und $a_3, a_4, \dots, a_n$.

Setzt man

$$a_1 \cdot a_2 = p^{2(n-2)}, \quad \text{also:} \quad a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdots a_n = \frac{1}{p^{2(n-2)}},$$

so werden die geometrischen Mittel der Zahlen dieser Systeme p^{n-2} bzw. $\frac{1}{p^2}$.

Ist nun die Richtigkeit der Ungleichheit $\Delta \geq 0$ für 2, 3, ... (n-2) Zahlen schon bewiesen, so hat man

$$\frac{a_1 + a_2}{p^{n-2}} - 2 \geq 0, \quad \frac{a_3 + a_4 + \cdots + a_n}{1/p^2} - (n-2) \geq 0.$$

Also:

$$a_1 + a_2 \geq 2p^{n-2}, \quad a_3 + a_4 + \cdots + a_n \geq \frac{n-2}{p^2}.$$

Demnach wird:

$$\Delta = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + \cdots + a_n) - n \geq 2p^{n-2} + \frac{n-2}{p^2} - n$$

oder

$$\Delta \geq \frac{2n}{p^2} \left(\frac{p^n}{n} - \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right).$$

Die Klammer

$$f(p) = \frac{p^n}{n} - \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

ist nie negativ für positive Werte von p ; denn aus den Ableitungen $f'(p) = p^{n-1} - p \equiv p(p^{n-2} - 1)$ und $f''(p) = (n-1)p^{n-2} - 1$ folgt, daß $f'(p) = 0$ ist für $p = 0$ und $p = 1$.

Aus $f''(0) = -1$ und $f''(1) = n-2 > 0$ ergibt sich, daß $f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ ein Maximum und $f(1) = 0$ ein Minimum der Funktion $f(p)$ darstellen. Δ ist also für positive p nie negativ. Das Minimum Null von Δ kann nur dann erreicht werden, wenn erstens die Summen

$a_1 + a_2$ und $a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ ihre kleinsten Werte $2p^{n-2}$ und $\frac{n-2}{p^2}$ annehmen, und wenn zweitens $p = 1$ wird, d. h. wenn alle Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$ einander gleich sind. Es gilt somit die Ungleichheit $S_n - n \cdot \sqrt[n]{P_n} \geq 0$ zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel allgemein für jede beliebige Anzahl n von positiven Größen.

H. KREIS, Winterthur

Bemerkung des Herausgebers: Es mag am Platze sein, hier auch eine Beweismethode von CAUCHY anzuführen (Algebraische Analysis, deutsche Ausgabe Springer 1885, S. 309).

Behauptung: $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n$.

Beweis. Für $n = 2$: $a_1 \cdot a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2$.

Daraus erhält man für $n = 4, 8, 16, \dots, k = 2^m$:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \right)^4, \quad \text{usw.}$$

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k}{k} \right)^k, \quad k = 2^m. \quad (1)$$

Ist n kein Glied der Reihe 2, 4, 8, 16, ..., so sei $k = 2^m$ ein Glied dieser Reihe, das größer als n ist. Ferner bedeute A das arithmetische Mittel der sämtlichen Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$. In (1) nehme man für die $k - n$ letzten Faktoren links die Zahl A an:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdot A^{k-n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + (k-n)A}{k} \right)^k = A^k.$$

Daraus folgt $a_1 a_2 \cdots a_n \leq A^n$.

Ferner sei auch die Beweismethode erwähnt, wie man sie z. B. in dem Buche *Triumph der Mathematik* (1. Aufl., Breslau 1933, S. 36) von H. DÖRRIE findet: Sind a_i ($i=1, 2, \dots, n$) positive, nicht sämtlich einander gleiche Zahlen, so ist $A > G$, wobei A ihr arithmetisches und G ihr geometrisches Mittel bedeutet. Beweis: Da nicht alle a_i gleich sind, ist notwendig eines größer als A , z. B. $a_1 > A$. Im Produkt $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ersetze man a_1 durch A und a_2 durch a'_2 derart, daß $a_1 + a_2 = A + a'_2$. Es wird also $a_1 > A$, $a_2 < a'_2$; demnach $|a_1 - a_2| > |A - a'_2|$, woraus $a_1 a_2 < A a'_2$ folgt. Letzteres wegen $4a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 < (A + a'_2)^2 - (A - a'_2)^2 = 4A a'_2$.

Also ist

$$A a'_2 a_3 \cdots a_n > G^n \quad (1), \quad \text{aber} \quad A + a'_2 + a_3 + \cdots + a_n = n \cdot A \quad (2).$$

Sind in dieser Summe (2) nicht alle Summanden gleich, so ist einer notwendig größer als A , z. B. a'_2 . Man ersetze im neuen Produkt (1) den Faktor a'_2 durch A und a_3 durch a'_3 derart, daß $a'_2 + a_3 = A + a'_3$ ist. Aus $|a'_2 - a_3| > |A - a'_3|$ folgt wieder $a'_2 a_3 < A a'_3$. Also ist

$$A \cdot A \cdot a'_3 \cdot a_4 \cdots a_n > G^n, \quad \text{aber} \quad A + A + a'_3 + a_4 + \cdots + a_n = n \cdot A.$$

So kann man weiterschließen und erhält $A^n > G^n$, d. h. $A > G$.

III. *Zuschrift.* Auf den Aufsatz von P. ROSSIER in Heft 1 wurde die folgende, besonders für die Perspektive schöne Konstruktion mitgeteilt:

Soient (fig. 1) a et b deux droites données d'intersection I inaccessible et L le point donné par lequel doit passer un rayon du faisceau de sommet I .

Par L , tracer une droite AB quelconque et par A' , quelconque sur a , sa parallèle

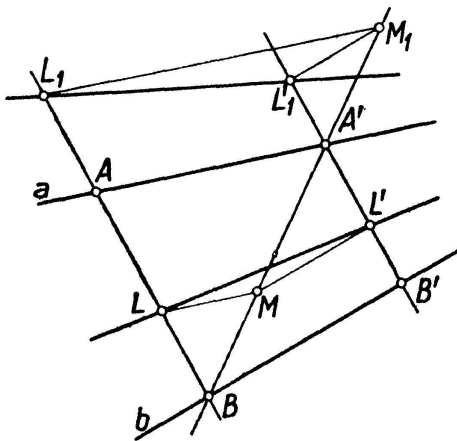


fig. 1

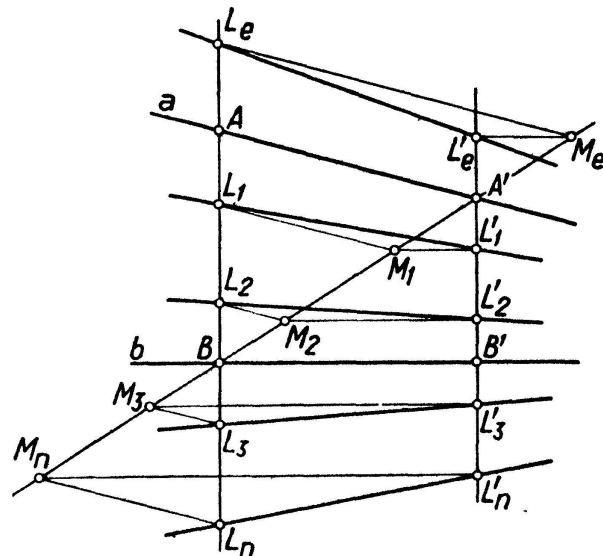


fig. 2

$A'B'$. Mener une des diagonales, $A'B$ par exemple, du trapèze $AA'B'B$. Par L , tracer LM parallèle à a , puis ML' parallèle à b (intervertir l'ordre des parallèles à a et b , si l'on choisit la diagonale AB'). LL' appartient au faisceau considéré. On a, en effet:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{A'M}{MB} = \frac{A'L'}{L'B'}.$$

La figure 1 donne aussi le tracé par un point L_1 situé à l'extérieur des droites données.

Le procédé est d'un emploi commode, rapide et précis dans les constructions de perspective.

La figure 2 montre son application à un cas simple et fréquent: tracé perspectif d'horizontales situées sur un même plan vertical.

Données: la ligne d'horizon b , une des horizontales a dont le point de fuite inaccessible I est sur b , et les points $L_1, L_2, \dots, L_e, \dots, L_n$, situés sur une même perpendiculaire AB à b , par lesquels doivent passer les autres horizontales dont le point de fuite commun est I .

On saisira du premier coup d'œil l'extrême simplicité du tracé. A. PASCHE, Genève

Aufgaben

13. Aus dem Gebiet des Werkzeugmaschinenbaues wird uns die folgende Aufgabe zur möglichst praktischen Lösung auf $\frac{1}{100}$ mm genau vorgelegt:
In eine verlängerte Zykloide soll parallel der Abwälzgeraden ein Streifen konstanter Breite so hineingelegt werden, daß zwei gegenüberliegende Schnittpunkte der gleichen Schleife in einer Senkrechten zum Streifen (d. h. zur Abwälzgeraden) liegen. E. METTLER
14. P sei ein Punkt einer CASSINISCHEN Kurve mit den Polen F_1 und F_2 . Man zeige, daß die Kurvennormale in P die Symmediane des Dreiecks $F_1 F_2 P$ ist (d. h. symmetrisch zur Mediane m_P bezüglich der Winkelhalbierenden w_P). W. LÜSSY
15. Die im Intervall $|x - x_0| \leq a$ eindeutige Funktion $y = f(x)$ mit $y_0 = f(x_0)$ bestimme eine im Intervall $|y - y_0| \leq b$ eindeutige Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$. Wenn die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 1$, ist dann auch die Umkehrfunktion an der Stelle y_0 differenzierbar? Mit anderen Worten: Wenn das Bild der Funktion $y = f(x)$ im Punkte (x_0, y_0) eine unter 45° geneigte Tangente besitzt, hat dann auch das Bild der Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ im entsprechenden Punkte eine Tangente? P. FINSLER
16. Man zeige, daß n Geraden in allgemeiner Lage die Ebene in $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ beschränkte und in $2n$ unbeschränkte Gebiete zerlegen. H. HADWIGER

Hinweis. Auf Beginn des Schuljahres 1946/47 wird im Rahmen des Unterrichtswerks des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer eine *Physikalische Aufgabensammlung* erscheinen, die von Dr. A. LÄUCHLI, Kantonsschule Winterthur und Dr. F. MÜLLER, Gymnasium Zürich, verfaßt ist. Das Buch enthält 1000 Aufgaben aus dem Gebiet der Mittelschulphysik nebst Lösungen, die als Anhang beigegeben sind. Es ist in erster Linie gedacht als Übungsbuch für Hausaufgaben und gehört als solches in die Hand des Schülers. Die Auswahl der Aufgaben ist so getroffen, daß für alle drei Maturitätstypen genügend Stoff zur Verfügung stehen sollte. Aufgaben, zu deren Lösung analytische Geometrie oder die Elemente der Differential- und Integralrechnung benötigt werden, sind durch Bezeichnung mit einem * hervorgehoben. Bei der Formulierung der Aufgabentexte sind die Verfasser ausgegangen von der Idee, daß neben dem Durchrechnen vor allem die Fertigkeit im formalen Ansatz physikalischer Probleme gefördert werden müsse. Deshalb sind die formalen Bezeichnungen der gegebenen und gesuchten Größen, wo immer möglich, weggelassen und die Texte so abgefaßt, daß sie einer Problemstellung entsprechen, wie sie das praktische Leben bietet. Auch soll der Schüler auf Grund des Aufgabentextes durch eine selbstverfertigte Skizze den Weg zur Lösung suchen, und es sind aus diesem Grunde nur in den ganz wenigen Fällen, wo die Abfassung des Textes zu umständlich geworden wäre, erläuternde Figuren hinzugefügt worden. Um auch die Möglichkeit zum Einüben im Gebrauch von Tabellen zu geben, sind im Anhang die wichtigsten Material- und Naturkonstanten aufgeführt. Eine Tabelle gibt die in den Lösungen verwendeten Formelzeichen wieder, ferner sind die Einheiten der wichtigsten physikalischen Größen in den verschiedenen Maßsystemen und ihre Beziehungen tabellarisch zusammengestellt. Die Lösungen enthalten, um die Möglichkeit einer Kontrolle zu geben, in knappster Form das formale und das Zahlenresultat. Nur dort, wo man von bloßen „Einsetzungsaufgaben“ sprechen kann, beschränken sie sich auf die Angabe des Zahlenwertes. DIE VERFASSER