

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 23.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

durch  $p$  teilbar ist. So findet man  $pq = 37 \cdot 113 = 4181$  als erstes Beispiel, weiter noch  $43 \cdot 307$  und  $47 \cdot 1103$ . Es ist merkwürdig, daß die Bedingungen gleich mehrmals erfüllt sind. 4181 ist die erste Ausnahme mit 2 Primfaktoren; es gilt für Primzahlen  $x_p \equiv x_p \pmod{p^2}$ ,  $x_p \equiv 1$  führt also zu  $x_p \equiv 1 \pmod{p^2}$ , was für  $p < 67$  nicht erfüllt ist. Es gibt aber noch eine frühere Ausnahme mit 3 Faktoren:  $n = 3 \cdot 5 \cdot 47 = 705$ , denn es ist  $x_{3 \cdot 5} - 1$  durch 47,  $x_{3 \cdot 47} - 1$  durch 5 und  $x_{5 \cdot 47} - 1$  durch 3 teilbar. Man kann die Reste auch für größere Zahlen leicht finden wegen  $x_{2n} = x_n^2 \pm 2$  und  $x_{2n+1} = x_n x_{n+1} \pm 1$  (für  $n$  ungerade). Man könnte also die Regeln zur Prüfung der Teilbarkeit von  $n$  verwenden, doch geht dies wohl einfacher mit dem FERMATSchen Satz. Über ähnliche, die „Zahlen von FIBONACCI“ betreffende Untersuchungen vgl. Encykl. ICl, S. 577, und Pascal Repert. I, S. 1563.

In diesem Zusammenhang macht Herr FINSLER auf das folgende Problem aufmerksam, dessen Lösung noch nicht bekannt zu sein scheint. Vielleicht findet ein Leser einen Weg dazu:

Nach EULER hat die Zahl  $e$  die Kettenbruchentwicklung  $(2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots)$ . Bedeutet  $b_n$  den Nenner des  $n$ -ten Näherungsbruches (also  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 3$ ,  $b_4 = 4$ ,  $b_5 = 7$ ,  $b_6 = 32$  usw.), so ist für kleine Werte von  $m$  stets  $b_{3m}$  durch  $m$  teilbar. Gilt dies allgemein für beliebige Werte von  $m$ ?

## II. *A propos des angles des axes d'une axonométrie orthogonale.*

Afin d'abrégier, nous appelons angle de deux axes d'une axonométrie l'angle de leurs portions positives ou négatives. Cet angle est obtus.

La démonstration de ce fait est très simple. Soient  $XYZ$  le triangle d'axonométrie et  $x$ ,  $y$  et  $z$  les distances respectives de ses sommets au sommet  $O$  du trièdre rectangle fondamental. Les sens positifs des axes sont ceux déterminés à partir du sommet  $O$  par les sommets du triangle d'axonométrie.

Le théorème de PYTHAGORE donne

$$XY^2 = x^2 + y^2; \quad YZ^2 = y^2 + z^2 \text{ et}$$

$$ZX^2 = x^2 + z^2 = XY^2 + YZ^2 - 2XY \cdot YZ \cdot \cos \beta = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2XY \cdot YZ \cos \beta,$$

ou  $\beta$  est l'angle  $XYZ$ .

Après réduction, la dernière équation donne

$$y^2 = XY \cdot YZ \cdot \cos \beta.$$

$\cos \beta$  est positif, l'angle est aigu.

Le triangle d'axonométrie est acutangle. Les axes de l'axonométrie, qui sont portés par les hauteurs du triangle d'axonométrie, forment des angles obtus.

P. ROSSIER, Genève

## Aufgaben

17. Deux droites gauches  $a$  et  $b$  sont tangentes à une sphère. Trouver le lieu géométrique des points de contact et toutes les tangentes à la sphère qui coupent  $a$  et  $b$ .

L. KOLLROS

18. Le rectangle  $ABCD$  est la base d'une pyramide dont le sommet  $S$  est sur la perpendiculaire au plan du rectangle menée par son centre. Trouver le volume du solide commun au parallélépipède dont  $ABCD$  est la section droite et au paraboléide de révolution de sommet  $S$  passant par le cercle circonscrit au rectangle  $ABCD$ . Le volume est limité au plan du rectangle.

L. KOLLROS

19. Einem Rotationsparaboloid werden zwei Kugeln mit den Radien  $R$  und  $r$  eingeschrieben, die sich berühren. Aus dem die beiden Kugeln verbindenden Stück des Paraboloides sowie den beiden Kugelhauben wird eine Eifläche gebildet. Beweise für das Volumen und die Oberfläche die Formeln:

$$V = \frac{\pi}{12} (R+r) (17R^2 - 14Rr + 17r^2)$$

$$O = \frac{\pi}{3} (13R^2 - 2Rr + 13r^2)$$

$$\left(r \geq \frac{R}{3}\right)$$

E. TROST

## Literaturüberschau

ADRIEN GROSREY:

*Éléments de Calcul infinitésimal*  
Rouge & Cie, Lausanne 1945 (192 S.)

Das Buch ist für Schüler der technischen Lehranstalten geschrieben und will unter diesem Gesichtspunkt beurteilt werden. Wie im Vorwort ausgeführt wird, soll dem Leser, der die Mathematik als Werkzeug benützen will, eine korrekte Zusammenstellung der wichtigsten Begriffe der Infinitesimalrechnung geboten werden, ohne ihn mit einer allzu großen Strenge der Beweise zu belasten. Es ist dem beachtenswerten didaktischen Geschick und der Lehrerfahrung des Verfassers gelungen, hier einen guten Mittelweg zu finden. In allen technischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung wird mit den Differentialen als endlichen, genügend kleinen Größen gerechnet. Diesem Umstand wird der Verfasser gerecht, indem er schon S. 15 das Unendlichkleine als wesentlich variable, endliche, aber gegen Null strebende Größe einführt und dann S. 36 das Differential

$$dy = f'(x) \Delta x \pm \Delta y$$

als nicht notwendig unendlichkleine Größe definiert. Nachdem das einmal eingehend erläutert ist, kann ihm nicht verargt werden, wenn er später in den Anwendungen diese Symbole so verwendet, wie man es praktisch immer tut.

Das Buch ist für den Gebrauch am Genfer Technikum bestimmt; es eignet sich aber sicher auch für andere Schulen und zum Selbststudium, denn es vermeidet sowohl, die persönliche Lehrmethode des Verfassers allzusehr widerzuspiegeln, als auch, mit wenigen Ausnahmen, Kenntnisse vorauszusetzen, die der Infinitesimalrechnung angehören, an der Genfer Schule aber offenbar früher behandelt werden. Es scheint mir in diesem Zusammenhang z. B. nicht ganz befriedigend, wenn schon S. 26 die Ableitung der Potenzfunktion für jeden reellen Exponenten mit Hilfe des allgemeinen binomischen Lehrsatzes entwickelt wird, oder wenn S. 27 zur Ableitung der Exponentialfunktion ebenfalls der binomische Lehrsatz und die Exponentialreihe benützt werden.

Stofflich enthält das Buch alles, was an einem Technikum unter guten Bedingungen behandelt werden kann. Neben einer Entwicklung der eigentlichen Differential- und Integralrechnung bietet es eine Menge geometrischer, mechanischer und technischer Anwendungen, ein meiner Ansicht nach besonders gut gelungenes Kapitel über unendliche Reihen und Einführungen in die Theorie der komplexen Zahlen, der gewöhn-