

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 1 (1946)
Heft: 5

Artikel: Die Ermittlung von Krümmungsradien auf Grund einfacher physikalischer Gesetze
Autor: Hardmeier, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1208>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 23.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dans l'équation proposée, faisons $x_2 = 4a$:

$$f(x - 4a) = f(x)f(4a) + f(a - x)f(-3a) = f(x).$$

La fonction est périodique, de période $4a$.

Développons encore suivant TAYLOR et poussons le développement jusqu'aux termes de degré deux en dx :

$$f(x - dx) = f(x) \left(f(0) + dx f'(0) + \frac{dx^2}{2} f''(0) \right) + f(a - x) \left(0 - dx f'(a) + \frac{dx^2}{2} f''(a) \right)$$

La comparaison avec le développement de TAYLOR donne $f'(a)f(a - x) = f'(x)$ et $f''(x) = f(x)f''(0) + f(a - x)f''(a)$. Le terme contenant $f'(0)$ tombe à cause de la parité de la fonction.

Dans la formule relative à la première dérivée, faisons $x = a + z$:

$$f'(a)f(-z) = f'(a + z).$$

Le premier membre est pair, donc le second aussi. De part et d'autre de $x = a$, la dérivée est paire. Pour $x = a$, la deuxième dérivée est donc nulle. L'équation relative à la deuxième dérivée est par conséquent

$$f''(x) = f(x)f''(0).$$

La fonction cherchée satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants; elle est périodique et paire; elle ne peut donc être que la fonction cosinus.

PAUL ROSSIER, Genève.

Die Ermittlung von Krümmungsradien auf Grund einfacher physikalischer Gesetze

Der Physikunterricht ist zur richtigen Erfassung der Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen weitgehend auf mathematische Vorkenntnisse angewiesen. Umgekehrt kann aber auch durch den Physikunterricht eine Vertiefung des mathematischen Denkens erreicht werden. Für beide Tatsachen lassen sich mannigfache Beispiele angeben.

Die Einführung der an sich anschaulichen Begriffe der Krümmungsradien, der Krümmungskreise und der Evolute von Kurven muß auf der Mittelschulstufe wegen der dabei auftretenden mathematischen Schwierigkeiten meist vernachlässigt werden. Dagegen drängen sich diese Begriffe im Physikunterricht bei der Behandlung krummliniger Bewegungen zwanglos und fast automatisch auf. Wie hier an zwei Beispielen gezeigt werden soll, gelingen die notwendigen Berechnungen dabei ohne besondere Schwierigkeiten, weil in den zur Verwendung gelangenden physikalischen Gesetzen die Integration der notwendigen Differentialgleichungen bereits vorliegt.

Der Grundgedanke des Vorgehens beruht auf allgemein bekannten physikalischen Zusammenhängen und ist daher in keiner Weise neu: Wenn ein in Bewegung begrif-

fener Körper mit der Masse m unter der Wirkung einer beliebig gerichteten Kraft K steht, so läßt sich diese Kraft in jedem Bahnpunkt A (Abb. 1) in zwei Komponenten

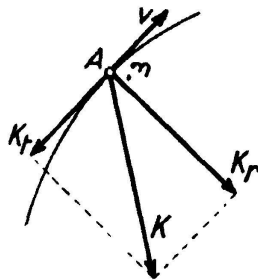


Abb. 1

zerlegt denken, die eine davon, die Tangentialkomponente K_t , in Richtung der Momentangeschwindigkeit v , die andere, die Radialkomponente K_r , normal zu dieser. K_t ändert dabei lediglich den Betrag, K_r lediglich die Richtung der Geschwindigkeit. Für unser Problem ist nur die zweite Komponente von Interesse. Ist ρ der Krümmungsradius im Punkte A der Bahnkurve, so gilt

$$K_r = m \frac{v^2}{\rho}$$

oder, wenn wir die Radialbeschleunigung $g_r = \frac{K_r}{m}$ einführen:

$$\rho = \frac{v^2}{g_r}. \quad (1)$$

Zur Ermittlung des Krümmungsradius benötigt man somit nur die Kenntnis der Momentangeschwindigkeit und der Radialbeschleunigung einer Bewegung, welche die zu untersuchende Kurve als Bahnkurve besitzt.

Als einfachstes Beispiel wählen wir die *Parabel* und betrachten sie als Bahnkurve eines unter der Wirkung der Erdbeschleunigung g mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfenen Körpers. Den Nullpunkt des Koordinatensystems legen wir in den Anfangspunkt der Bewegung, die x -Achse in die Richtung von v_0 , die y -Achse in die Richtung von g , also vertikal nach unten. Dann ist zur Zeit t nach Beginn der Bewegung

$$x = v_0 \cdot t, \quad (2a)$$

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2. \quad (2b)$$

Durch Elimination von t erhält man hieraus für die Bahnkurve

$$x^2 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cdot y. \quad (2)$$

Dies ist eine nach unten offene Parabel mit dem Parameter

$$p = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

In irgendeinem Bahnpunkt $P(x, y)$ ist nach Abb. 2

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{g t}{v_0} = z \text{ (dimensionslose Größe),} \\ \sin \alpha &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \\ v &= \frac{v_0}{\cos \alpha} = v_0 \sqrt{1+z^2}, \quad g_r = g \cdot \cos \alpha = \frac{g}{\sqrt{1+z^2}}, \\ \varrho &= \frac{v^3}{g_r} = \frac{v_0^3}{g} \cdot (1+z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \varrho = \frac{v_0^3}{g} \left(1 + \frac{g^2 t^2}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

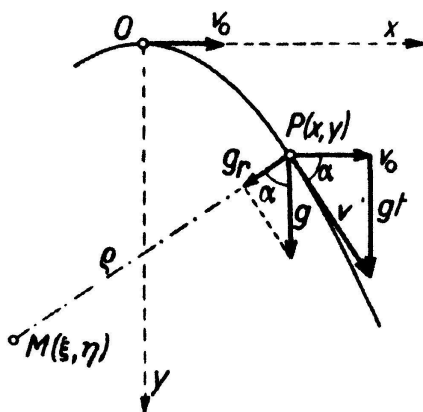


Abb. 2

Für die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes M ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= x - \varrho \cdot \sin \alpha = -\frac{g^2 t^3}{v_0}, \\ \eta &= y + \varrho \cdot \cos \alpha = \frac{3}{2} g t^2 + \frac{v_0^3}{g}. \end{aligned}$$

Unter Benützung von (2a), (2b) und (3) läßt sich der Übergang auf die übliche mathematische Darstellung vornehmen; man erhält

$$\begin{aligned} \varrho &= p \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \xi &= -\frac{x^3}{p^2}, \quad \eta = 3y + p. \end{aligned}$$

Und als Gleichung der Evolute:

$$\underline{(\eta - p)^3 = \frac{27}{8} p \xi^2.}$$

Eine entsprechende Ableitung läßt sich für die Ellipse durchführen. Sie ist etwas komplizierter, weil die wirkende Beschleunigung hier nach Betrag und Richtung veränderlich ist, führt aber nicht zu prinzipiell neuen Erkenntnissen. Dagegen soll hier noch ein einfacher Weg zur Ermittlung der *Krümmungsradien in den Ellipsenscheiteln* gezeigt werden, der im wesentlichen nur die drei KEPLERSchen Gesetze benötigt und gleichzeitig einen vertieften Einblick in deren Inhalt erlaubt.

Wir entnehmen diesen Gesetzen zunächst, daß die Ellipse als Bahnkurve eines Körpers aufgefaßt werden kann, der sich unter der Wirkung eines in einem der

Brennpunkte befindlichen Gravitationszentrums bewegt. Das zweite Gesetz gibt Aufschluß über die Veränderung der Geschwindigkeit längs der Bahn, während das dritte zeigt, daß die Umlaufzeit um ein bestimmtes Gravitationszentrum für die Ellipse gleich groß ist wie für einen Kreis mit der großen Ellipsenhalbachse als Radius. Dieser Gleichheit der Umlaufzeiten wegen verhält sich die vom Radiusvektor pro Zeiteinheit überstrichene Ellipsenfläche, welche während eines Umlaufes immer die gleiche bleibt, zum gleichzeitig überstrichenen Kreissektor wie die ganze Ellipsenfläche zur Kreisfläche.

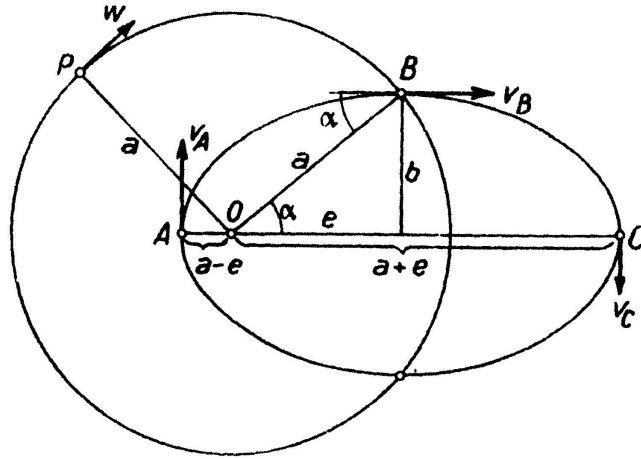


Abb. 3

Die Halbachsen der Ellipse seien mit a und b bezeichnet, die lineare Exzentrizität mit e und die konstante Geschwindigkeit beim Umlauf auf dem Kreis mit w (vgl. Abb. 3). Da sich die Ellipsenfläche zur Kreisfläche verhält wie $b:a$, ist das Doppelte der vom Radiusvektor pro Zeiteinheit überstrichenen Fläche beim Kreis $w \cdot a$, bei der Ellipse $w \cdot b$.

Für die Geschwindigkeiten in den Punkten A , B und C der Ellipse gilt somit

$$\begin{aligned} v_A(a-e) &= w \cdot b, & v_A &= w \frac{b}{a-e}, \\ v_B \cdot \sin \alpha \cdot a &= v_B \cdot b = w \cdot b, & v_B &= w, \\ v_C(a+e) &= w \cdot b, & v_C &= w \frac{b}{a+e}. \end{aligned}$$

Nach (1) und nach dem Gravitationsgesetz, dessen wesentlichster Inhalt unmittelbar aus den KEPLERSchen Gesetzen abgeleitet werden kann, sind die entsprechenden Radialkomponenten der Beschleunigung

beim Kreis:
$$g_K = \frac{w^2}{a},$$

bei der Ellipse:
$$g_A = g_K \frac{a^2}{(a-e)^2} = \frac{w^2}{a} \cdot \frac{a^2}{(a-e)^2} = \frac{w^2 \cdot a}{(a-e)^2},$$

$$g_B = g_K \cdot \sin \alpha = \frac{w^2}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{w^2 \cdot b}{a^2},$$

$$g_C = g_K \frac{a^2}{(a+e)^2} = \frac{w^2}{a} \cdot \frac{a^2}{(a+e)^2} = \frac{w^2 \cdot a}{(a+e)^2}.$$

Damit erhält man für die Krümmungsradien die bekannten Werte:

$$\begin{aligned} \varrho_A = \frac{v_A^2}{g_A} &= w^2 \frac{b^2}{(a-e)^2} \cdot \frac{(a-e)^2}{w^2 \cdot a}, & \underline{\underline{\varrho_A = \frac{b^2}{a}}}, \\ \varrho_B = \frac{v_B^2}{g_B} &= w^2 \frac{a^2}{w^2 \cdot b}, & \underline{\underline{\varrho_B = \frac{a^2}{b}}}, \\ \varrho_C = \frac{v_C^2}{g_C} &= w^2 \frac{b^2}{(a+e)^2} \cdot \frac{(a+e)^2}{w^2 \cdot a}, & \underline{\underline{\varrho_C = \frac{b^2}{a}}}. \end{aligned}$$

W. HARDMEIER, Zürich

Kleine Mitteilungen

I. *Beitrag zur Behandlung der regelmäßigen Vielecke.* Die regelmäßigen Vielecke sprechen uns durch ihre hohe Symmetrie und durch die unerschöpfliche Fülle von Zusammenhängen zwischen ihren Größen so sehr an, daß das Aufsuchen und das anschauliche Aufzeigen einfacher Vergleiche und Verwandlungen ihrer Flächen besonders reizvoll und gewiß geeignet ist, die Freude der Schüler an der Geometrie zu erhöhen.

Die folgenden Sätze und zum Teil sehr leichten Aufgaben sind zusammengestellt als Beispiele für einfach definierte Flächen, die in einfachen Verhältnissen zueinander stehen. Sie zeigen aber ihre Erlebniswirkung erst, wenn man die entsprechenden Figuren betrachtet.

(Bezeichnungen für das regelmäßige n -Eck: r oder r_n = Umkreisradius; ϱ_n = Inkreisradius; s_n = Seite; F_n = Fläche; d_i = Diagonale, welche i Ecken überspringt; $d_{n(i)}$ = Diagonale im n -Eck, welche i Ecken überspringt; m_s = Verbindungsstrecke zwischen den Mitten zweier nicht benachbarter Fünfeckseiten. Buchstaben mit Strichen rechts oben gehören zu umschriebenen Vielecken.)

Sätze: 1. In jedem regelmäßigen n -Eck ist das Rechteck aus dem Umkreisradius und der kürzesten Diagonale gleich vier Zentralsdreiecken:

$$r d_1 = 4 \cdot \frac{F_n}{n}.$$

2. Macht man die Seitenmitten eines regelmäßigen n -Ecks zu Ecken eines regelmäßigen $2n$ -Ecks, so ist das Rechteck aus dem Inkreisradius und der kürzesten Diagonale des ersten gleich acht Zentralsdreiecken des zweiten:

$$\varrho'_n \cdot d'_{n(1)} = 8 \cdot \frac{F_{2n}}{2n}.$$

3. Ein regelmäßiges Vieleck mit $4p$ Ecken hat dieselbe Fläche wie p Rechtecke aus einer Seite und der zweitgrößten Diagonale:

$$p s d_{2p-2} = F_{4p}.$$

4. Wird einem regelmäßigen Fünfeck ein anderes umbeschrieben, so ist die Fläche des äußeren gleich dem vierfachen Minor der stetig geteilten Fläche des inneren Fünfecks: