

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Damit erhält man für die Krümmungsradien die bekannten Werte:

$$\begin{aligned} \varrho_A = \frac{v_A^2}{g_A} &= w^2 \frac{b^2}{(a-e)^2} \cdot \frac{(a-e)^2}{w^2 \cdot a}, & \underline{\underline{\varrho_A = \frac{b^2}{a}}}, \\ \varrho_B = \frac{v_B^2}{g_B} &= w^2 \frac{a^2}{w^2 \cdot b}, & \underline{\underline{\varrho_B = \frac{a^2}{b}}}, \\ \varrho_C = \frac{v_C^2}{g_C} &= w^2 \frac{b^2}{(a+e)^2} \cdot \frac{(a+e)^2}{w^2 \cdot a}, & \underline{\underline{\varrho_C = \frac{b^2}{a}}}. \end{aligned}$$

W. HARDMEIER, Zürich

## Kleine Mitteilungen

I. *Beitrag zur Behandlung der regelmäßigen Vielecke.* Die regelmäßigen Vielecke sprechen uns durch ihre hohe Symmetrie und durch die unerschöpfliche Fülle von Zusammenhängen zwischen ihren Größen so sehr an, daß das Aufsuchen und das anschauliche Aufzeigen einfacher Vergleiche und Verwandlungen ihrer Flächen besonders reizvoll und gewiß geeignet ist, die Freude der Schüler an der Geometrie zu erhöhen.

Die folgenden Sätze und zum Teil sehr leichten Aufgaben sind zusammengestellt als Beispiele für einfach definierte Flächen, die in einfachen Verhältnissen zueinander stehen. Sie zeigen aber ihre Erlebniswirkung erst, wenn man die entsprechenden Figuren betrachtet.

(Bezeichnungen für das regelmäßige  $n$ -Eck:  $r$  oder  $r_n$  = Umkreisradius;  $\varrho_n$  = Inkreisradius;  $s_n$  = Seite;  $F_n$  = Fläche;  $d_i$  = Diagonale, welche  $i$  Ecken überspringt;  $d_{n(i)}$  = Diagonale im  $n$ -Eck, welche  $i$  Ecken überspringt;  $m_s$  = Verbindungsstrecke zwischen den Mitten zweier nicht benachbarter Fünfeckseiten. Buchstaben mit Strichen rechts oben gehören zu umschriebenen Vielecken.)

**Sätze:** 1. In jedem regelmäßigen  $n$ -Eck ist das Rechteck aus dem Umkreisradius und der kürzesten Diagonale gleich vier Zentralsdreiecken:

$$r d_1 = 4 \cdot \frac{F_n}{n}.$$

2. Macht man die Seitenmitten eines regelmäßigen  $n$ -Ecks zu Ecken eines regelmäßigen  $2n$ -Ecks, so ist das Rechteck aus dem Inkreisradius und der kürzesten Diagonale des ersten gleich acht Zentralsdreiecken des zweiten:

$$\varrho'_n \cdot d'_{n(1)} = 8 \cdot \frac{F_{2n}}{2n}.$$

3. Ein regelmäßiges Vieleck mit  $4p$  Ecken hat dieselbe Fläche wie  $p$  Rechtecke aus einer Seite und der zweitgrößten Diagonale:

$$p s d_{2p-2} = F_{4p}.$$

4. Wird einem regelmäßigen Fünfeck ein anderes umbeschrieben, so ist die Fläche des äußeren gleich dem vierfachen Minor der stetig geteilten Fläche des inneren Fünfecks:

$$F'_6 = \text{Minor von } 4 F_5.$$

**Aufgaben:** 1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ( $s_3$ ), das Rechteck ( $s_3, \varrho_3$ ) und das gleichseitige Dreieck, dessen Seite gleich  $r_3$  ist. Zeige, daß sich die drei Flächen verhalten wie 3:2:1.

2. Zeige, daß das Rechteck ( $s_3, \varrho_3$ ) das geometrische Mittel ist aus dem gleichseitigen Dreieck ( $s_3$ ) und demjenigen, dessen Höhe gleich  $r_3$  ist.

3. Rechteck = Sechseck:

$$(d_{6(1)} + \varrho_6) \cdot s_6 = F_6.$$

4. Beweise Satz 1 allgemein und prüfe ihn für  $n=3$  (wobei  $d_1=s$  zu setzen ist),  $n=4, 5, 6, 8$  (ergibt ein Rechteck in Normalformat),  $n=10, 12$  ( $F_{12}=3r^2$ ).

5. Zeige für  $n=12$ :

$$\frac{2}{3} \cdot F_{12} = d_{12}^2.$$

6. Beweise Satz 2 allgemein und prüfe ihn für  $n=3, 4, 5, 6$ .

7. Das Quadrat aus der zweitkürzesten Diagonale eines regelmäßigen Zwölfecks ist gleich dem Rechteck aus der kürzesten Diagonale und dem Inkreisradius des ihm umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ( $r_{12} = \varrho'_6$ ):

$$d_{12(2)}^2 = \varrho'_6 \cdot d'_{6(1)}.$$

8. Betrachte ein regelmäßiges Sechseck ( $s_6$ ), das Rechteck ( $d_{6(1)}, s_6$ ) und das regelmäßige Sechseck mit  $s_6$  als kürzester Diagonale. Zeige, daß sich die drei Flächen wie 3:2:1 verhalten.

9. Verbinde sechs Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks zu einem regelmäßigen Sechseck, so ist:

$$\varrho_6 d_{6(1)} = \varrho_6 d'_{12(3)} = \frac{1}{2} F'_{12}.$$

10. Numeriere die Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks fortlaufend. Vervollständige den Streckenzug 1, 3, 7, 9 zu einem Quadrat, so hat dieses die gleiche Fläche wie das Zwölfeck.

11. Beweise Satz 3 allgemein und prüfe ihn nach für  $n=8, 12$ .

12. Beweise Satz 4.

13. Ein Zentralsdreieck des regelmäßigen Fünfecks ist der Minor des Rechtecks aus  $m_5$  und  $\varrho_5$ :  $\frac{F_5}{5} = \text{Minor von } m_5 \varrho_5$ . (Da das Dreieck auch die Höhe  $\varrho_5$  hat, läßt es sich in das Rechteck hineinzeichnen.)

14. Ergänzt man ein regelmäßiges Fünfeck durch 5 weitere Punkte zu einem regelmäßigen Zehneck, so ist das Rechteck aus der kürzesten und der zweitkürzesten Diagonale des Zehnecks gleich  $\frac{4}{5}$  des Fünfecks.

$$d_{10(1)} \cdot d_{10(2)} = \frac{4}{5} F_5.$$

15. Verwandle mit Hilfe der genannten Beziehungen ein regelmäßiges  $n$ -Eck in ein Quadrat ( $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ ).

16. Verwandle ein Quadrat in ein regelmäßiges Achteck (Zwölfeck).

R. STÖSSEL, Rorschach.

II. Zur Kettenbruchentwicklung von  $e$  Herr P. FINSLER machte kürzlich auf das folgende Problem aufmerksam (siehe *El. Math.*, Bd. I, Heft 3, Seite 54): «Nach EULER hat die Zahl  $e$  die Kettenbruchentwicklung  $(2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots)$ . Bedeutet  $b_n$  den Nenner des  $n$ -ten Näherungsbruches (also  $b_1=1, b_2=1, b_3=3, b_4=4, b_5=7, b_6=32$  usw.), so ist für kleine Werte von  $m$  stets  $b_{3m}$  durch  $m$  teilbar. Gilt dies allgemein für beliebige Werte von  $m$ ?»

*Antwort:* Die Zahlen  $b_{3m}, b_{3m-3}$  und  $b_{3m-6}$  sind durch  $m$  teilbar, und  $b_{3m-1}$  hat den Rest  $(-1)^m \pmod{m}$ .

*Beweis:* Der Beweis beruht darauf, daß die Reste der aufeinanderfolgenden  $x_k = b_{3k-1} \pmod{m}$  bei ungeradem  $m$  symmetrisch zum Glied  $x_{(m-1)/2}$  sind, daher  $m$ -gliedrige Zyklen (abgesehen vom Vorzeichen) bilden, welche letztere Eigenschaft sich auf den doppelten Modul übertragen läßt, woraus die Gültigkeit für alle  $m$  erschlossen werden kann.

1. Die Teilfolge  $x_m = b_{3m-1}$  besitzt die Rekursionsformel

$$x_{m+1} = (4m + 2) \cdot x_m + x_{m-1},$$

und die Glieder  $b_{3m-2}$  und  $b_{3m}$  sind

$$b_{3m-2} = \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \quad b_{3m} = \frac{x_{m+1} - x_m}{2}.$$

Aus dem Algorithmus der Kettenbruchentwicklung von  $e = (2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots)$  ergibt sich für die Nenner der Näherungsbrüche das folgende System von Beziehungen:

$$b_{3m-4} = A = x_{m-1},$$

$$b_{3m-3} = B = \frac{x_m - x_{m-1}}{2},$$

$$b_{3m-2} = 1 \cdot b_{3m-3} + b_{3m-4} = A + B = \frac{x_m + x_{m-1}}{2},$$

$$b_{3m-1} = 1 \cdot b_{3m-2} + b_{3m-3} = A + 2B = x_m,$$

$$b_{3m} = 2m \cdot b_{3m-1} + b_{3m-2} = (2m + 1)A + (4m + 1)B = \frac{x_{m+1} - x_m}{2},$$

$$b_{3m+1} = 1 \cdot b_{3m} + b_{3m-1} = (2m + 2)A + (4m + 3)B = \frac{x_{m+1} + x_m}{2},$$

$$b_{3m+2} = 1 \cdot b_{3m+1} + b_{3m} = (4m + 3)A + (8m + 4)B = x_{m+1} = (4m + 2)x_m + x_{m-1},$$

aus dem die Rekursionsformel und die Werte für  $b_{3m-2}$  und  $b_{3m}$  folgen.

Wegen  $b_{3m} + b_{3m-2} = (2m+1)x_m + x_{m-1} \equiv 2b_{3m-2} \pmod{2m}$  haben  $b_{3m}$  und  $b_{3m-2}$  gleiche Reste bezüglich  $2m$  (analog für  $b_{3m-2} - b_{3m-4}$ ). So genügt es, zu zeigen, daß zum Beispiel

$$x_m + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{2m}$$

ist. Darüber hinaus ergibt sich im folgenden, daß

$$x_m \equiv (-1)^m \equiv x_{m+1} \equiv -x_{m-1} \equiv -x_{m-2} \pmod{m}$$

ist, woraus die behaupteten Teilbarkeitseigenschaften leicht folgen. Ebenso gilt:

$$b_{3m+2} \equiv b_{3m+1} \equiv b_{3m-1} \equiv b_{3m-3} \equiv -b_{3m-4} \equiv -b_{3m-5} \equiv -b_{3m-7} \equiv (-1)^m \pmod{m}.$$

2. Es sei  $m$  ungerade. Man setzt  $r = \frac{m-1}{2}$  und hat  $x_{r+1} \equiv 0 \cdot x_r + x_{r-1} \pmod{2m}$  und durch Induktion

$$x_{r+k} \equiv x_{r-k} \pmod{2m};$$

speziell:  $x_{m-1} = x_{2r} \equiv x_0 = 1$ ,  $x_m = x_{2r+1} \equiv x_{-1} = -1 \pmod{2m}$ .

Also ist für *ungerades*  $m$  der Algorithmus zyklisch mit Wechsel der Vorzeichen, d. h.  $x_{m+k} \equiv -x_k \pmod{2m}$ ,

insbesondere:  $x_{2m-1} \equiv -1$ ,  $x_{2m} \equiv +1 \pmod{2m}$ .

3. Gilt auch für ein gerad-gerades  $m$ , daß  $x_m \equiv 1$ ,  $x_{m-1} \equiv -1 \pmod{m}$  ist, so ist auch  $x_m + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{2m}$ ; es ist nämlich *entweder*

$$x_m \equiv 1, \quad x_{m-1} \equiv -1 \text{ oder } x_m \equiv 1+m, \quad x_{m-1} \equiv -1+m \pmod{2m},$$

oder aber

$$x_m \equiv 1+m, \quad x_{m-1} \equiv -1 \text{ oder } x_m \equiv 1, \quad x_{m-1} \equiv -1+m \pmod{2m}.$$

Im zweiten Fall zeigt sich durch Rekursion die Unmöglichkeit, wenn man

$$x_{m-2} = x_m - (4m-2)x_{m-1} \equiv x_m + 2x_{m-1} \equiv \left(1 + \binom{m}{0}\right) + 2\left(-1 + \binom{0}{m}\right) = -1 + \binom{m}{0} \equiv -x_1 + \binom{m}{0} \pmod{2m}$$

usw. beachtet, d. h. es ist

$$x_{m-2} \equiv -1 + m, \quad x_{m-3} \equiv -x_2, \quad x_{m-4} \equiv -x_3 + m \text{ usw. bis } 1 = x_1 \equiv -x_{m-2} \equiv 1 - m \pmod{2m},$$

$$\text{oder } x_{m-2} \equiv -1, \quad x_{m-3} \equiv -x_2 + m, \text{ usw. } 1 = x_0 \equiv -x_{m-1} \equiv 1 - m \pmod{2m}.$$

Es bleibt der erste Fall mit  $x_m + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{2m}$ .

4. In den möglichen Unterfällen  $x_{m-1} \equiv -1 + \binom{m}{0}$  und  $x_m \equiv 1 + \binom{m}{0} \pmod{2m}$  folgt durch Induktion  $x_{m+1} \equiv x_1 + \binom{m}{0}$ ,  $x_{m+2} \equiv x_2 + \binom{m}{0}$ , ...  $x_{2m-1} \equiv x_{m-1} + \binom{m}{0}$ ,  $x_{2m} \equiv x_m + \binom{m}{0}$ , also:  $x_{2m-1} \equiv -1 + \binom{m}{0} + \binom{m}{0} \equiv -1$ , ebenso  $x_{2m} \equiv +1 \pmod{2m}$ , mithin gilt unter der Voraussetzung von 3:

Für *beliebiges* gerades  $m$  folgt aus  $x_m \equiv -x_{m-1} \equiv +1 \pmod{m}$ :

$$x_{2m} \equiv -x_{2m-1} \equiv +1 \pmod{2m}.$$

5. Da nun für ungerades  $m$  und für  $m=2$  obige Beziehungen gelten, kann nach 3. und 4. durch Induktion auf die Gültigkeit für alle  $m$  geschlossen werden; wir haben somit allgemein:

$$x_{m-1} \equiv -(-1)^m, \quad x_m \equiv (-1)^m \pmod{m}$$

und

$$x_m + x_{m-1} \equiv 0 \pmod{2m}.$$