

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 6

Artikel: Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter
Autor: Scherrer, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1209>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band I Nr. 6 Seiten 97–112 Basel, 15. November 1946

Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter

Die Tatsache, daß ein ebenes Gitter neben zweizähligen Drehungen höchstens drei-, vier- oder sechszählige Drehungen in sich zuläßt, kann zum Ausdruck gebracht werden durch folgenden

Satz: Es existiert kein einfaches oder sich selbst durchdringendes reguläres n -Eck, dessen Ecken sämtlich Punkte eines ebenen Gitters sind, ausgenommen in den Fällen $n = 3, 4$ und 6 .

Zu diesem Satz gibt es ein anschaulich suggestives Beweisverfahren, das ich hier mitteile, da es Herrn HADWIGER Anlaß zu einer arithmetischen Folgerung gegeben hat¹⁾.

Beweis: Wir betrachten ein n -Eck von der im Satze bestrittenen Art, wobei wir überdies $n \neq 5$, also

$$n > 6 \tag{1}$$

annehmen wollen.

Verbinden wir jede Ecke mit den beiden ihr am nächsten liegenden Ecken, so entsteht in jedem Falle ein *einfaches* reguläres n -Eck \mathfrak{B} , dessen Seitenlänge s sei. Wir durchlaufen seine Ecken ausgehend von einer Ecke P_1 in positivem Sinne und erhalten die Eckpunktserie

$$P_1, P_2, \dots, P_n. \tag{2}$$

Tragen wir nun die Gittervektoren

$$\overrightarrow{P_n P_1}, \overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \tag{3}$$

mit ihren Anfangspunkten von irgendeinem Gitterpunkte P_0 aus auf, so liefern ihre Endpunkte eine Serie von Gitterpunkten

$$P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \tag{2'}$$

die wiederum ein einfaches reguläres n -Eck \mathfrak{B}' bilden, dessen Seitenlänge s' sich berechnet aus dem Verhältnis

$$\frac{s'}{s} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) < 1. \tag{4}$$

¹⁾ H. HADWIGER: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie; El. Math., Bd. I, Nr. 6, S. 98.

Ausschlaggebend ist nun, daß dieses Verkleinerungsverhältnis nur von n abhängt. Iterieren wir also die Konstruktion, so erhalten wir eine unbegrenzte Serie von regulären Gitter- n -Ecken

$$\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \dots, \mathfrak{P}^{(v)}, \dots$$

deren Seiten gegen Null konvergieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, da ein Gitter nicht beliebig kleine Gittervektoren enthalten kann, w. z. b. w.

Ein den Sonderfall $n = 5$ ebenfalls umfassendes Verfahren erhält man, wenn man die Vektoren

$$\overrightarrow{P_n P_{n-1}}, \overrightarrow{P_1 P_n}, \dots, \overrightarrow{P_{n-2} P_{n-1}} \quad (5)$$

sukzessive von den Punkten der Serie (2) aus abträgt. Das Verkleinerungsverhältnis wird dann

$$\frac{s'}{s} = \left| 1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right| < 1 \quad (6)$$

und die resultierenden Gitter- n -Ecken liegen konzentrisch zu \mathfrak{P} .

W. SCHERRER, Bern

Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie

Es gibt abzählbar unendlich viele rationale Winkel

$$\varphi = 2\pi \frac{p}{q}, \quad 0 \leq p < q; \quad p, q \text{ ganz und } (p, q) = 1, \quad (1)$$

deren Gradmaß also rational ist; dagegen sind nur einige wenige derartige rationale Winkel bekannt, für die wenigstens eine der vier trigonometrischen Funktionen $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi$ einen ebenfalls rationalen endlichen Wert annimmt. Diese bekannten elementaren Winkel, wir wollen sie goniometrische Hauptwinkel nennen, sind im Gradmaß angeschrieben

$$\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ. \quad (2)$$

Um diese Rationalitätsverhältnisse bei allen vier trigonometrischen Funktionen vollständig zu überblicken, genügt es im Hinblick auf die goniometrischen Umrechnungsformeln durchaus, die Verhältnisse etwa bei der Funktion $\cos \varphi$ zu kennen. Diese Funktion wird bekanntlich für die folgenden Hauptwinkel rational

$$\varphi = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ. \quad (3)$$

In dieser Note möchte ich einen kurzen Beweis dafür mitteilen, daß diese 8 Winkel (3) die einzigen rationalen Winkel des Grundintervalls $0 \leq \varphi < 360^\circ$ sind, für die $\cos \varphi$ rational ausfällt¹⁾. Damit ist auch bewiesen, dass die 16 goniometrischen Haupt-

¹⁾ Das Kernstück des vorliegenden Beweises stellt die arithmetische Übertragung eines geometrisch anschaulichen Beweisgedankens, den ich Herrn W. SCHERRER verdanke, dar; vgl. die vorstehende Note: W. SCHERRER, Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter.