Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 1 (1946)

Heft: 6

Artikel: Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter

Autor: Scherrer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1209

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band I Nr. 6 Seiten 97–112 Basel, 15. November 1946

Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter

Die Tatsache, daß ein ebenes Gitter neben zweizähligen Drehungen höchstens drei-, vier- oder sechszählige Drehungen in sich zuläßt, kann zum Ausdruck gebracht werden durch folgenden

Satz: Es existiert kein einfaches oder sich selbst durchdringendes reguläres n-Eck, dessen Ecken sämtlich Punkte eines ebenen Gitters sind, ausgenommen in den Fällen $n = 3$, 4 *und* 6.

Zu diesem Satz gibt es ein anschaulich suggestives Beweisverfahren, das ich hier mitteile, da es Herrn HADWIGER Anlaß zu einer arithmetischen Folgerung gegeben hat[1]).

Beweis: Wir betrachten ein n-Eck von der im Satze bestrittenen Art, wobei wir überdies $n \neq 5$, also

$$n > 6 \tag{1}$$

annehmen wollen.

Verbinden wir jede Ecke mit den beiden ihr am nächsten liegenden Ecken, so entsteht in jedem Falle ein *einfaches* reguläres n-Eck $\mathfrak{P}$, dessen Seitenlänge s sei. Wir durchlaufen seine Ecken ausgehend von einer Ecke P_1 in positivem Sinne und erhalten die Eckpunktserie

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n. \tag{2}$$

Tragen wir nun die Gittervektoren

$$\overrightarrow{P_n P_1},\ \overrightarrow{P_1 P_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{P_{n-1} P_n} \tag{3}$$

mit ihren Anfangspunkten von irgendeinem Gitterpunkte P_0 aus auf, so liefern ihre Endpunkte eine Serie von Gitterpunkten

$$P_1',\ P_2',\ \ldots,\ P_n', \tag{2'}$$

die wiederum ein einfaches reguläres n-Eck $\mathfrak{P}'$ bilden, dessen Seitenlänge s' sich berechnet aus dem Verhältnis

$$\frac{s'}{s} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1. \tag{4}$$

[1]) H. HADWIGER: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie; El. Math., Bd. I, Nr. 6, S. 98.

Ausschlaggebend ist nun, daß dieses Verkleinerungsverhältnis nur von n abhängt. Iterieren wir also die Konstruktion, so erhalten wir eine unbegrenzte Serie von regulären Gitter-n-Ecken

$$\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}^{(\nu)}, \quad \ldots.$$

deren Seiten gegen Null konvergieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, da ein Gitter nicht beliebig kleine Gittervektoren enthalten kann, w.z.b.w.

Ein den Sonderfall $n = 5$ ebenfalls umfassendes Verfahren erhält man, wenn man die Vektoren

$$\overrightarrow{P_n P_{n-1}}, \quad \overrightarrow{P_1 P_n}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{P_{n-2} P_{n-1}} \tag{5}$$

sukzessive von den Punkten der Serie (2) aus abträgt. Das Verkleinerungsverhältnis wird dann

$$\frac{s'}{s} = \left|1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| < 1 \tag{6}$$

und die resultierenden Gitter-n-Ecken liegen konzentrisch zu $\mathfrak{P}$.

W. SCHERRER, Bern

Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie

Es gibt abzählbar unendlich viele rationale Winkel

$$\varphi = 2\pi\frac{p}{q}, \quad 0 \leqq p < q; \quad p, q \text{ ganz und } (p, q) = 1, \tag{1}$$

deren Gradmaß also rational ist; dagegen sind nur einige wenige derartige rationale Winkel bekannt, für die wenigstens eine der vier trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ einen ebenfalls rationalen endlichen Wert annimmt. Diese bekannten elementaren Winkel, wir wollen sie goniometrische Hauptwinkel nennen, sind im Gradmaß angeschrieben

$$\varphi = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0, 210^0, 225^0, 240^0, 270^0, 300^0, 315^0\, 330^0. \tag{2}$$

Um diese Rationalitätsverhältnisse bei allen vier trigonometrischen Funktionen vollständig zu überblicken, genügt es im Hinblick auf die goniometrischen Umrechnungsformeln durchaus, die Verhältnisse etwa bei der Funktion $\cos\varphi$ zu kennen. Diese Funktion wird bekanntlich für die folgenden Hauptwinkel rational

$$\varphi = 0^0, 60^0, 90^0, 120^0, 180^0, 240^0, 270^0, 300^0. \tag{3}$$

In dieser Note möchte ich einen kurzen Beweis dafür mitteilen, daß diese 8 Winkel (3) die einzigen rationalen Winkel des Grundintervalls $0 \leqq \varphi < 360^0$ sind, für die $\cos\varphi$ rational ausfällt[1]). Damit ist auch bewiesen, dass die 16 goniometrischen Haupt-

[1]) Das Kernstück des vorliegenden Beweises stellt die arithmetische Übertragung eines geometrisch anschaulichen Beweisgedankens, den ich Herrn W. SCHERRER verdanke, dar; vgl. die vorstehende Note: W. SCHERRER, Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter.