

# Zur Elementargeometrie der Ellipse

Autor(en): **Bindschedler, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-13582>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.      Band III      Nr. 6      Seiten 105–120      Basel, 15. November 1948

---

## Zur Elementargeometrie der Ellipse

Die planimetrische Behandlung der Ellipse benützt gewöhnlich eine der drei folgenden Aussagen als Definition der Ellipse (während die beiden andern dann Lehrsätze werden):

A. Die Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden in einem konstanten Verhältnis  $\varepsilon < 1$  stehen.

B. Die Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten eine konstante Summe haben.

C. Die Ellipse ist die normal-affine Figur eines Kreises in bezug auf einen Durchmesser des letztern als Affinitätsachse. (Die an sich überflüssige Bedingung für die Achse ist wohl zweckmäßig.)

Am verbreitetsten ist die Definition B; in theoretischer Hinsicht verdient aber wohl A den Vorzug, da man durch bloße Aufhebung der Bedingung  $\varepsilon < 1$  eine allgemeine Definition der Kegelschnitte erhält (siehe auch das nachgelassene Werk von HENRI LEBESGUE, *Les coniques* [Paris 1942]). Allerdings erscheint dabei der Kreis nicht als Spezialfall der Ellipse, sondern als Grenzfall (wie übrigens bei exakter Auffassung auch in B).

Im folgenden soll auf möglichst einfachem Weg aus Definition A Satz B, aus Satz B Satz C, und schließlich ohne Vermittlung von B aus Definition A direkt Satz C abgeleitet werden. Auf oder nahe an diesem Weg findet man dabei einige der Haupteigenschaften der Ellipse (mit Ausnahme derjenigen über konjugierte Durchmesser und über den Flächeninhalt, die man am natürlichsten von C aus erhalten würde). Obwohl versucht wurde, ausgetretene Wege zu vermeiden und z. B. auf die Verwendung des Leitkreises verzichtet wurde, ist in Anbetracht der überaus umfangreichen Literatur über den Gegenstand kaum anzunehmen, daß in den hier gegebenen Beweisgängen etwas Neues zu finden ist. Auf eine hierauf bezügliche Durchsicht dieser Literatur wird der Verfasser der vorliegenden kleinen Arbeit wohl verzichten dürfen.

Die meisten der hier folgenden Entwicklungen gelten natürlich fast ohne Änderung auch für die Hyperbel und, wo der zweite Brennpunkt nicht im Spiel ist, für die Parabel.

### I. Von der Definition A zu Satz B

Im Anschluß an die Definition A wird man die klassische Aufgabe nicht übersehen (NEWTON: *Principia*, 1. Buch, § 44), einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch drei gegebene Punkte  $P_1, P_2, P_3$  geht und einen gegebenen Brennpunkt  $F$  hat. (Die

gesuchte Leitlinie teilt die Strecke  $\overline{P_i P_k}$  im Verhältnis  $\pm \overline{P_i F} / \overline{P_k F}$ ; von den Teilungspunkten auf den Seiten des Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$  liegen nach MENELAOS [Umkehrung] viermal je 3 auf einer Geraden.) Die Beschränkung auf die Ellipse wäre hier nicht zweckmäßig, da auch bei lauter positiven Teilverhältnissen der Kegelschnitt keine Ellipse zu sein braucht.

Es seien nun  $F, l$  Brennpunkt und Leitlinie einer Ellipse. Die Normalprojektion eines beliebigen Punktes  $P$  der Ebene auf eine Gerade  $g$  wird im folgenden mit  $P_g$  bezeichnet.  $FF_1$  ist Symmetrieachse der Ellipse. Die Hauptscheitel  $A, B$  teilen die Strecke  $\overline{FF_1}$  harmonisch im Verhältnis  $\epsilon$ .

**Satz 1.** Der Abschnitt einer Kurventangente zwischen Berührungspunkt und Leitlinie erscheint aus dem Brennpunkt unter einem rechten Winkel. Beweis (nach LEBESGUE): Schneidet die Sekante  $PQ$  die Leitlinie in  $S$ , so liegt  $S$  wegen

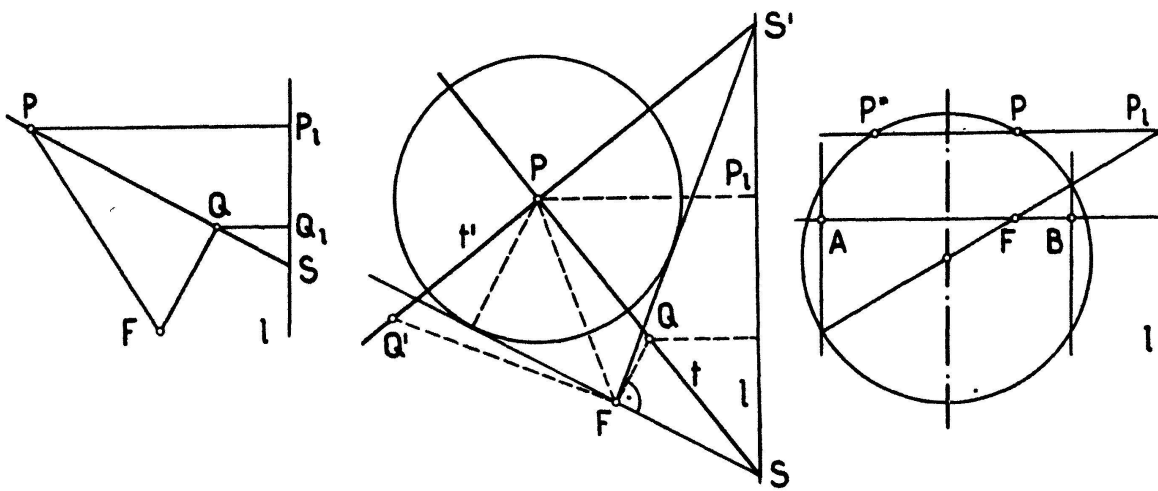


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

$\overline{SP/SQ} = \overline{PP_l/QQ_l} = \overline{FP/FQ}$  auf der Außenwinkelhalbierenden des Dreiecks  $PFQ$  (Fig. 1). Beim Grenzübergang  $Q \rightarrow P$  geht die dazu senkrechte Innenwinkelhalbierende in  $FP$  über, was die Behauptung ist.

**Aufgabe.** Man lege von einem Punkt  $P$  der Ebene die Tangenten an die Ellipse. Lösung (Fig. 2): Die Tangenten aus  $F$  an den Kreis um  $P$  mit Radius  $\epsilon \cdot \overline{PP_l}$  schneiden die Leitlinie in Punkten der gesuchten Ellipsentangenten  $t, t'$ . Die Berührungspunkte  $Q, Q'$  liegen auf den Normalen in  $F$  zu den Kreistangenten. Zwei Lösungen, wenn  $\overline{PF} > \epsilon \cdot \overline{PP_l}$ .

Diese Konstruktion bringt den sogenannten ersten Ponceletschen Satz zu fast unmittelbarer Evidenz:

**Satz 2.** Die Abschnitte der beiden Tangenten von ihrem Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten erscheinen vom Brennpunkt aus unter gleichen Winkeln.

Man hat nur zu beachten, daß die Geraden  $FQ, FQ'$  mit den Kreistangenten gegenseitig gleiche Winkel bilden (als Unterschiede des Winkels der Kreistangenten gegenüber einem Rechten).

Die entsprechende Aufgabe «Schnitt der Ellipse mit einer Geraden  $g$ » bietet keine Schwierigkeiten ( $\overline{PF/PS} = \overline{PF/PP_l} \cdot \overline{PP_l/PS}$ ,  $S$  Schnittpunkt von  $g$  mit  $l$ ).

**Satz 3.** Die Ellipse besitzt eine zweite Symmetrieachse, die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke ihrer Hauptscheitel.

Beweis (Fig. 3). Ist  $P$  ein Kurvenpunkt, so liegt auf der Geraden  $PP_1$  im allgemeinen genau ein weiterer Punkt  $P^*$  der Kurve, nämlich der Schnittpunkt von  $PP_1$  mit dem Apollonischen Kreis bezüglich der Strecke  $\overline{FP_1}$ , der dieselbe im Verhältnis  $\pm \varepsilon$  teilt. Sein Durchmesser wird aus der Geraden  $FP_1$  herausgeschnitten von den Tangenten in den Hauptscheiteln  $A$  und  $B$ ; der geometrische Ort für den Mittelpunkt ist also die Mittelsenkrechte von  $\overline{AB}$ , und diese ist dann gleichzeitig Symmetrieachse für  $\overline{PP^*}$ .

(Dieser Beweis wird auch von LEBESGUE erwähnt unter Hinweis auf ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE).

Durch Spiegelung von  $F$  und  $l$  an dieser zweiten Symmetrieachse nach  $F^*$  und  $l^*$  erhält man nun sofort die fundamentale Eigenschaft:

*Satz 4.* Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist konstant.

$$\text{Dies folgt aus } \overline{PF} + \overline{PF^*} = \varepsilon \cdot \overline{PP_1} + \varepsilon \cdot \overline{PP_1^*} = \varepsilon \cdot \overline{P_1P_1^*}.$$

Bezeichnen wir diese konstante Summe der «Brennstrahlen» mit  $2a$  und den Mittelpunkt der Kurve mit  $M$ , so erhält man, da die Beziehung  $\overline{PF} + \overline{PF^*} = 2a$  auch für die Scheitel  $A$  und  $B$  gilt, in bekannter Weise  $2a = \overline{AB}$ ,  $a = \overline{MA} = \overline{MB}$ .

Zum vollständigen Beweis von Satz  $B$  ist es noch nötig, zu zeigen, daß jeder Punkt  $P$  des Ortes  $\overline{PF} + \overline{PF^*} = 2a$  auch der Ellipse im Sinn von Definition A angehört. Da der fragliche Punkt nicht außerhalb des Kreises um  $M$  mit Radius  $a$  («Hauptkreis») liegen kann (die Schwerlinie  $\overline{PM}$  des Dreiecks  $FPF^*$  ist kleiner als das arithmetische Mittel der Seiten  $\overline{PF}$ ,  $\overline{PF^*}$ ), und da es auf einer Halbgeraden  $h$ , die in einem Punkt  $H$  der Strecke  $\overline{AB}$  senkrecht zu ihr errichtet wird, nur *einen* solchen Punkt  $P$  geben kann, müssen wir nur nachweisen, daß eine solche Halbgerade auch die Ellipse schneidet. Der Schnittpunkt ist dann nach Satz 4 identisch mit  $P$ .

Die Existenz dieses Schnittpunktes folgt aber daraus, daß für einen auf  $h$  sich bewegenden Punkt  $Q$  das Verhältnis  $\overline{QF}/\overline{QQ_1}$  sich mit  $Q$  stetig ändert, für  $Q \equiv H$  kleiner als  $\varepsilon$  ist, außerhalb des Hauptkreises aber sicher größer als  $\varepsilon$ . (Dieser Kreis ist ja ein Apollonischer Kreis bezüglich der Strecke  $\overline{FF_1}$ ).

Damit ist der Satz  $B$  vollständig bewiesen. Sind  $C$ ,  $D$  die Endpunkte der «kleinen Achse», so wird für  $\overline{MC} = \overline{MD} = b$ ,  $\overline{mF} = e$ ,  $b^2 = a^2 - e^2$ . Aus  $\overline{CF}/\overline{CC_1} = \varepsilon$  folgt  $\overline{MM_1} = a/\varepsilon$  und, da  $\overline{MF} \cdot \overline{MM_1} = a^2$ ,  $e = \varepsilon a$ .

Bei festgehaltenen Scheiteln rückt, falls man zur Grenze  $\varepsilon \rightarrow 0$  übergeht, die Leitlinie ins Unendliche.

## II. Von Satz B zu Satz C

*Satz 5.* Die Ellipsentangente halbiert den Außenwinkel der Brennstrahlen des Berührungspunktes (Fig. 4).

Beweis: Die Brennpunkte werden in diesem Abschnitt mit  $F_1$ ,  $F_2$  bezeichnet, die Leitlinien mit  $l_1$ ,  $l_2$ , die Brennstrahlen eines Punktes  $P$  mit  $r_1$ ,  $r_2$ . Ferner sei  $\overline{PP_1} = u_1$ ,  $\overline{PP_2} = u_2$  und die Tangentenabschnitte bis zu den Leitlinien seien  $t_1$ ,  $t_2$ .

Aus  $\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2}$  und  $\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2}$  folgt  $\frac{r_1}{t_1} = \frac{r_2}{t_2}$ .

Die rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten  $r_i$  und den Hypotenusen  $t_i$  sind also ähnlich.

Als einfache Anwendung dieses Satzes folge hier die Konstruktion der Krümmungskreise in den Scheiteln.

a) Die Krümmung in den Hauptscheiteln.

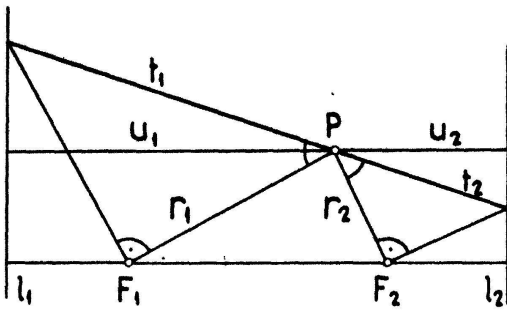


Fig. 4

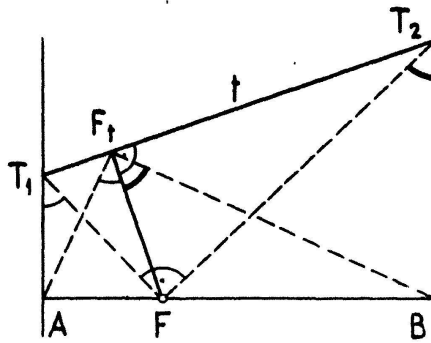


Fig. 5

Da die Normale in einem Kurvenpunkt  $P$  als Winkelhalbierende im Dreieck  $F_1PF_2$  die Strecke  $\overline{F_1F_2}$  im Verhältnis  $\overline{PF_1}/\overline{PF_2}$  teilt und beim Grenzübergang  $P \rightarrow A$  oder  $P \rightarrow B$  dieser Teilungspunkt zum Krümmungszentrum  $K$  wird, so teilt  $K$  die Strecke  $\overline{F_1F_2}$  im Verhältnis  $(a - e)/(a + e)$  resp.  $(a + e)/(a - e)$ . Hieraus ergibt sich dann der Krümmungsradius  $\rho_A = b^2/a$ .

b) Die Krümmung in den Nebenscheiteln.

Die Kurvennormale in einem Punkt  $P$  trifft die Nebenachse in ihrem Schnittpunkt

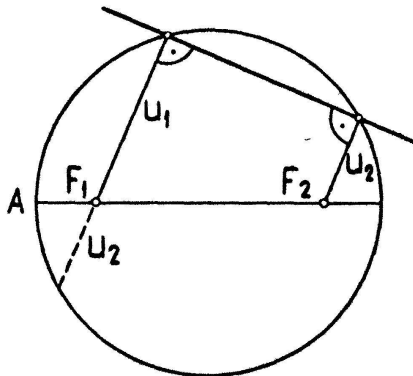


Fig. 6

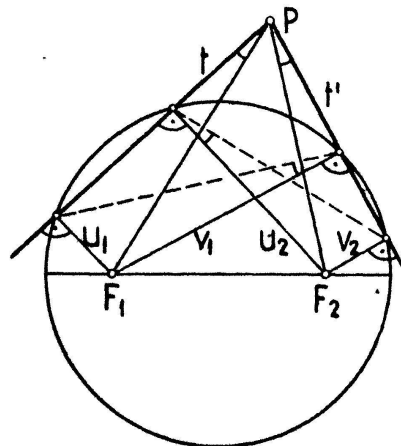


Fig. 7

mit dem Umkreis des Dreiecks  $F_1PF_2$ . Das Krümmungszentrum für den Scheitel  $C$  liegt also auf der Normalen in  $F_i$  zu  $F_iC$ , woraus sich sofort  $\rho_C = a^2/b$  ergibt.

**Satz 6.** Der Abschnitt einer beliebigen Kurventangente zwischen den Tangenten in den Hauptscheiteln erscheint von einem Brennpunkt aus unter rechtem Winkel. Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 2.

**Satz 7.** Der Fußpunkt des Lotes von einem Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf dem Hauptkreis (Fig. 5).

Sind  $T_1, T_2$  die Schnittpunkte der Tangente  $t$  mit den Tangenten in  $A$  und  $B$ , so zeigen die beiden Sehnenvierecke  $AFF_tT_1, BFF_tT_2$ , daß die beiden nach Satz 6 komplementären Winkel  $AT_1F, BT_2F$  gleich den Winkeln  $AF_tF, BF_tF$  sind.  $F_t$  liegt also auf dem Thales-Kreis über  $AB$ .

Aus Satz 7 ergibt sich die bekannte Enveloppenkonstruktion der Ellipse.

**Satz 8.** Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer veränderlichen Tangente ist konstant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse (Fig. 6).

Dieses Produkt ist nämlich gleich dem absoluten Betrag der Potenz eines Brennpunktes in bezug auf den Hauptkreis, also gleich  $(a + e)(a - e) = b^2$ .

**Satz 9.** Eine veränderliche Tangente schneidet die Tangenten in den Hauptscheiteln so, daß das Produkt der Abschnitte auf den letztern konstant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbachse ist.

Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AFT_1$  und  $BT_2F$ . (Bezeichnungen wie in Satz 7).

Wir schalten hier noch zwei Sätze ein, von denen weiter kein Gebrauch gemacht wird.

**Satz 10** (sog. 2. Satz von PONCELET): Verbindet man einen beliebigen Punkt  $P$  der Ebene mit den beiden Brennpunkten, so schließen diese Verbindungsgeraden mit den beiden Tangenten aus  $P$  gleiche Winkel ein (Fig. 7).

Beweis. Die Lote  $u_1, v_1$  aus  $F_1$  auf die Tangenten bestimmen ein Dreieck  $\Delta_1$ , das ähnlich ist zu dem entsprechend gebildeten Dreieck  $\Delta_2$  mit den Seiten  $u_2, v_2$ . Denn aus  $u_1 u_2 = v_1 v_2$  folgt  $u_1/v_1 = v_2/u_2$ , und die Winkel bei  $F_1$  und  $F_2$  sind gleich. Die Winkel, deren Gleichheit in Satz 10 behauptet wird, sind aber, wie aus der Betrachtung der Sehnenvierecke hervorgeht, die durch  $t, t', u_1, v_1$  und  $t, t', u_2, v_2$  bestimmt werden, gleich einem Paar homologer Winkel in jenen ähnlichen Dreiecken.

Bemerkung: Da beim Beweis von Satz 10 nur die Sätze 6 bis 8, nicht aber 5, benützt wurden, könnte Satz 5 hier als Spezialfall ( $P$  auf der Kurve) seinen Platz finden.

**Satz 11.** Der geometrische Ort des Punktes, von dem aus die Ellipse unter rechtem Winkel erscheint, ist ein zum Hauptkreis konzentrischer Kreis.

Beweis. Wenn in Satz 10  $t \perp t'$ , so sind die dort benützten Sehnenvierecke Rechtecke. Die Potenz von  $P$  in bezug auf den Hauptkreis ist dann gleich der Potenz von  $F_{2t}$  in bezug auf den Thales-Kreis über  $F_1F_2$ , also konstant.

Wir wenden uns nun, anschließend an die Sätze 8 und 9, dem Satz C zu. Wir definieren als «entsprechende Punkte» von Ellipse und Hauptkreis solche Punkte der beiden Linien, die auf dem gleichen Lot zur Hauptachse und auf derselben Seite der letzteren liegen. Dann gilt

**Satz 12.** Die Tangenten in entsprechenden Punkten von Ellipse und Hauptkreis schneiden sich auf der großen Achse.

Beweis. Tangente  $t$  und Normale  $n$  trennen, als Winkelhalbierende im Dreieck  $F_1PF_2$ , die Punkte  $F_1, F_2$  harmonisch in  $T$  und  $N$  (Fig. 8). Durch Normalprojektion auf  $t$  erhält man eine harmonische Trennung von  $F_{1t}, F_{2t}$  durch  $T$  und  $P$ . Da die Punkte  $F_{tt}$  auf dem Hauptkreis liegen, liegt  $P$  auf der Polaren von  $T$  in bezug auf diesen Kreis; d. h.  $TP'$  ist Kreistangente in  $P'$ .

**Satz 13.** Das Verhältnis der Abstände entsprechender Punkte von Ellipse und Hauptkreis von der Hauptachse ist konstant und gleich  $b/a$  (Fig. 9).

**Beweis.** Die Tangenten in entsprechenden Punkten  $P, P'$ , die sich nach Satz 12 auf der Hauptachse schneiden, treffen die Tangenten in  $A$  und  $B$  in den Punkten  $U, U'$  und  $V, V'$ .

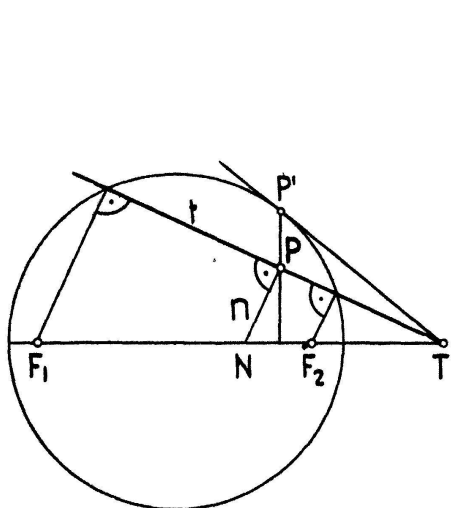


Fig. 8

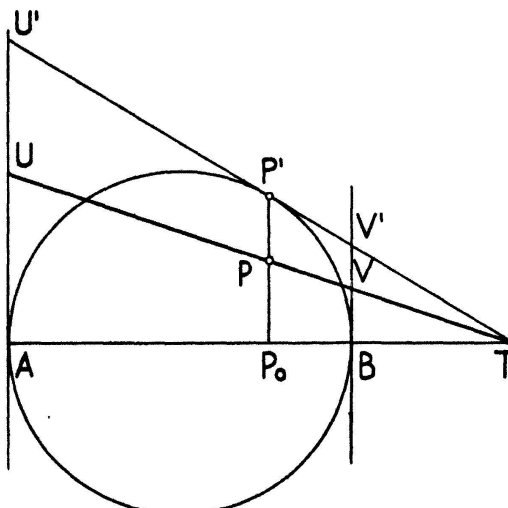


Fig. 9

Nun ist  $\overline{AU'} \cdot \overline{BV'} = a^2$  und nach Satz 9  $\overline{AU} \cdot \overline{BV} = b^2$ , also

$$\left(\frac{\overline{PP_0}}{\overline{P'P_0}}\right)^2 = \frac{\overline{AU}}{\overline{AU'}} \cdot \frac{\overline{BV}}{\overline{BV'}} = \frac{b^2}{a^2}$$

( $P_0$  Normalprojektion von  $P$  auf  $AB$ ),

$$\frac{\overline{PP_0}}{\overline{P'P_0}} = \frac{b}{a} :$$

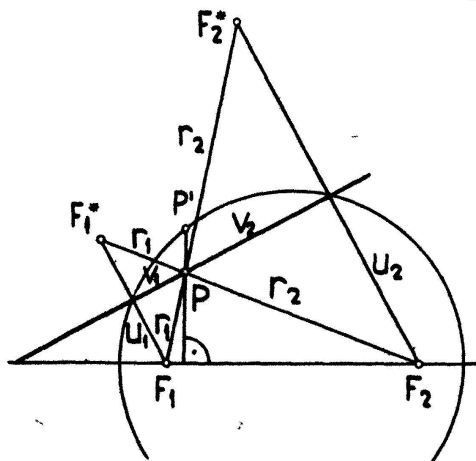


Fig. 10

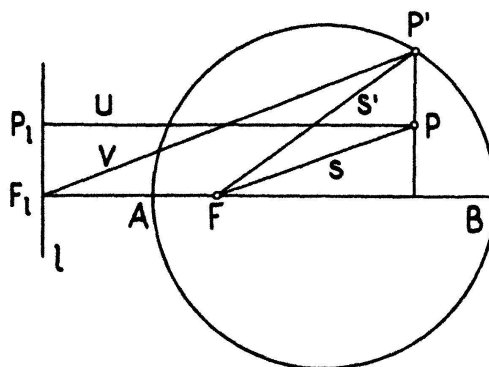


Fig. 11

Da hier das Affinitätsverhältnis  $\lambda = b/a < 1$  ist, müssen wir, um Satz C vollständig zu beweisen, noch zeigen, daß das Affinitätsverhältnis  $\lambda$  keiner Beschränkung unterliegt, also auch  $> 1$  sein kann. Das folgt aber aus der Verbindung von Satz 13 mit

**Satz 14.** Zwischen der Ellipse und dem Kreis über der kleinen Achse als Durchmesser besteht normale Affinität.

Das ergibt sich daraus, daß die Affinität in bezug auf die Hauptachse, welche vom Hauptkreis zur Ellipse führt, kombiniert mit einer Affinität in bezug auf die kleine Achse mit demselben Affinitätsverhältnis  $b/a$  eine Ähnlichkeitstransformation ergeben muß, die Ellipse also durch die zweite Affinität in den Kreis vom Radius  $b$  übergeführt wird. Damit ist C bewiesen.

Der Spezialfall  $\lambda = 1$  (die Ellipse ein Kreis) entspricht, wie schon erwähnt, einem Grenzfall bei A und B.

Wünscht man den Satz C auf noch elementarerem Weg, ohne Benützung der harmonischen Eigenschaft von Pol und Polare in bezug auf den Kreis, zu beweisen, so führt, außer dem unter III angegebenen kurzen Beweis (siehe unten), auch der folgende Weg in einfacher Weise zum Ziel (Fig. 10):

Es sei  $F_i^*$  das Spiegelbild von  $F_i$  in bezug auf die Tangente  $t$ ,  $u_i$  das Lot von  $F_i$  auf  $t$ ,  $v_1, v_2$  die Abschnitte auf der Tangente von  $P$  bis zum Hauptkreis,  $y$  und  $y'$  die Abstände der entsprechenden Punkte  $P$  und  $P'$  von der Hauptachse. Dann gilt

$$r_1 : r_2 = F_1 F_1^* P : \Delta F_1 F_2 P = \Delta F_1 F_2 P : \Delta F_2 F_2^* P$$

$$(y e)^2 = (u_1 v_1) (u_2 v_2)$$

$v_1 v_2$  ist der absolute Betrag der Potenz von  $P$  in bezug auf den Hauptkreis, also

$$v_1 v_2 = (y' - y) (y' + y)$$

und

$$u_1 u_2 = b^2.$$

Hieraus  $(y e)^2 = b^2 (y'^2 - y^2)$ , also  $y'/y$  konstant.

### III. Direkter Übergang von A zu C

Da der Hauptkreis ein Apollonischer Kreis bezüglich der Strecke  $\overline{FF_1}$  ist, so folgt in Verbindung mit Definition A, wenn die Strecken  $\overline{PF}$ ,  $\overline{P'F}$  mit  $s, s'$ , und die Strecken  $\overline{PP_1}$ ,  $\overline{P'F_1}$  mit  $u, v$  bezeichnet werden (Fig. 11):

$$\varepsilon^2 = \frac{s'^2}{v^2} = \frac{s^2}{u^2} = \frac{s'^2 - s^2}{v^2 - u^2} = \frac{y'^2 - y^2}{y'^2}$$

und hieraus die Konstanz von  $y/y'$ . Hierbei bedeuten  $y$  und  $y'$  wieder die Abstände entsprechender Punkte von der Hauptachse.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht-Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### I. Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche

Die bekannte verschärfte isoperimetrische Ungleichung von T. BONNESEN<sup>1)</sup> für einen konvexen Bereich  $K$  heißt

$$L^2 - 4 \pi F \geq (L - 2 \pi r)^2, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Vgl. hierüber weiteres in T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Verlag J. Springer, Berlin 1934 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 3) insbesondere S. 112/113.