

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

erwähnt, daß sich jede solche Gleichung durch eine einfache Umformung auf eine Riccatische Gleichung der ersten Ordnung zurückführen läßt<sup>1)</sup>, welche letztere sich außerordentlich gut zur Anwendung des Iterationsverfahrens eignet.

P. MATTHIEU, Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### I. Zur Prismatoidformel

In der Stereometrie definiert man das Prismatoid als ein Vielflach, dessen Ecken alle in zwei parallelen Ebenen liegen und dessen Seitenflächen im allgemeinen Dreiecke sind. Das Volumen hängt ab vom Abstand  $h$  der Parallelebenen, von der Grundfläche  $G$ , der Deckfläche  $D$  und der Mittelschnittfläche  $M$ :

$$V = \frac{1}{6} h (G + 4 M + D).$$

Der Nenner gehört eigentlich zur Klammer; denn die Höhe wird mit einem gewogenen Mittel aus den drei Flächen multipliziert, wobei die sehr formbestimmende Mittelschnittfläche vierfaches Gewicht aufweist. Die Herleitung durch Zerlegen in Pyramiden ist bekannt<sup>2)</sup>.

Eigenartig ist nun, daß diese Volumenformel für eine viel allgemeinere Familie von Körpern gilt, nämlich für die *Simpsonschen Körper*<sup>3)</sup>; bei diesen ist die Querschnittfläche eine ganze rationale Funktion von höchstens dem 3. Grade in bezug auf den Abstand von der einen Grundfläche; diese kann auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Der Abstand sei  $x$ ; dann lautet die Behauptung, wenn  $Q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ :

$$\int_0^h (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) dx = \frac{h}{6} (G + 4 M + D),$$

worin  $G = Q(0) = \alpha$ ,  $M = Q(h/2)$ ,  $D = Q(h)$ ; der Beweis ist leicht zu führen. Er läßt sich aber auch auf einem lehrreichen, kleinen Umweg erlangen. Das Integral ist *additiv*. Es läßt sich daher zerlegen in das Integral über einer Konstanten und die drei Integrale über die Potenzen von  $x$ ; diese und nur diese lassen sich zusammenfassen, weil ihnen gemeinsam ist, daß für sie die Grundfläche verschwindet. Der Zerlegung des ganzen Integrals entspricht eine Aufspaltung des Simpsonschen Körpers in vier verschiedene Teilkörper. Der einfachste, der zur Konstanten  $\alpha$  gehört, stellt ein Prisma oder einen Zylinder dar, wobei nach dem Prinzip von CAVALIERI die Querschnitte erst noch in ihren Ebenen verschoben werden dürfen. Für diesen Körper ist also  $D = M = G (= \alpha)$ ; als gewogenes Mittel kommt z. B.  $G$  heraus; und es entsteht weiter nichts als die Volumenformel des Prismas.

Die übrigen Teilkörper ruhen auf der Grundebene nur mit einer Ecke (Spitze) oder Linie; sie breiten sich nach oben je nach dem Exponenten linear aus (wie ein Keil) oder pyramidenförmig oder (bei der 3. Potenz) noch stärker als eine Pyramide. Ihre Querschnittsfunktion kann geschrieben werden:

$$Q(x) = k x^n. \quad (\text{mit } n = 1, 2 \text{ oder } 3)$$

<sup>1)</sup> Vgl. das in Note 3, S. 34, genannte Werk, S. 21–24.

<sup>2)</sup> Zum Beispiel W. BENZ, *Stereometrie-Leitfaden* (Orell Füßli, Zürich, 1938).

<sup>3)</sup> L. LOCHER, *Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 382.

Es ist also noch zu zeigen, daß

$$k \int_0^h x^n dx = \frac{h}{6} \left[ 0 + 4k \left( \frac{h}{2} \right)^n + k h^n \right]$$

ist. Nach dem Integrieren fallen  $k$  und  $h^{n+1}$  heraus, und es bleibt nach einigem Ordnen nur übrig:

$$2^{n-2} = \frac{n+1}{5-n}.$$

Diese Exponentialgleichung ist aber richtig für die Werte  $n = 1, 2$  und  $3$ , sonst für keine. Das sieht man am schönsten, wenn man die linke Seite als Exponentialkurve, die rechte als Hyperbelast aufzeichnet und wahrnimmt, wie sie, abgesehen von den drei Schnittpunkten, auseinandergehen. Der Hyperbelast strebt rechts zur Asymptote  $n = 5$  und links zum Grenzwert  $-1$ . Da die einzelnen Teilkörper der Prismaformel genügen, tut das auch der zusammengesetzte Körper.

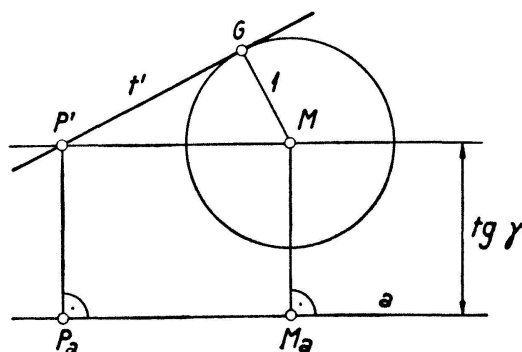
Wo läßt sich das nun anwenden? Die verlangten Integrale gehören zu den einfachsten, die ein Schüler kennenlernt; sie eignen sich darum zur Anwendung der Integralrechnung auf die Stereometrie. Allein sie lassen sich in bekannter Art auch schon vor der eigentlichen Integralrechnung durch einfache Grenzwertbetrachtungen gewinnen, wenn man die Summen der natürlichen Zahlen, ihrer Quadrate und der Kuben (je von 1 bis  $n$ ) aus der Lehre von den arithmetischen Reihen verwenden kann. Es ist demnach möglich, die ganze Betrachtung im Stereometrieunterricht durchzuführen. Sie leistet dann einen Brückenschlag von einem Fach zum andern, und das ist hier um so mehr wünschbar, weil der rein stereometrische Beweis *mehr beweist*, als behauptet war. Der Formel unterstehen weitaus die meisten in der Schule behandelten Körper (Kugel, Kugelteile!).

Außerdem ist es möglich, von dieser stereometrischen Auffassung zur Ebene zurückzukehren und so die Simpsonsche Formel für die Flächeninhalte zu gewinnen (anstatt umgekehrt). Von da aus wird es besonders gut verständlich, daß diese Formel auch als Näherungsformel gute Dienste leistet, wenn nämlich der Grad der Funktion drei übersteigt.

ERWIN VOELLMY, Basel.

## II. Zur elementaren Behandlung des einschaligen Rotationshyperboloides

Definiert man die genannte Fläche durch ihre Entstehung aus der Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefe, nicht senkrechte Achse, so kann der Nachweis,



daß der Meridian ein Kegelschnitt ist, ohne Benützung analytischer Geometrie in folgender Weise sehr elementar geführt werden.

Die Erzeugende  $g$  treffe die betrachtete Meridianebene  $\pi_2$  in  $P$ , die Kehlkreisebene  $\pi_1$  in  $G$  (siehe Figur); ihre Neigung gegen  $\pi_1$  sei  $\gamma$ . Die Normalprojektion  $\overline{GP'}$  der Strecke  $\overline{GP}$  sei  $t'$ . Wir wählen den Kehlkreisradius als Längeneinheit und zeichnen in  $\pi_1$  die Parallele  $a$  zu  $\pi_2$  im Abstand  $\operatorname{tg} \gamma$ . Die Normalprojektionen des Kehlkreismittelpunktes  $M$  und des Punktes  $P$  auf  $a$  seien  $M_a$  und  $P_a$ . Der Winkel  $\overline{PM_aP_a}$  sei  $\varphi$ .

Wir zeigen, daß  $M_aP$  einen Drehkegel beschreibt mit der Achse  $a$  und dem halben Öffnungswinkel  $\varphi = \gamma$ .

$$\text{Beweis: } \operatorname{tg}^2 \varphi = (\overline{P'P_a}^2 + \overline{PP'}^2) : \overline{P_aM_a}^2 = (\operatorname{tg}^2 \gamma + t'^2 \operatorname{tg}^2 \gamma) : (t'^2 + 1) = \operatorname{tg}^2 \gamma,$$

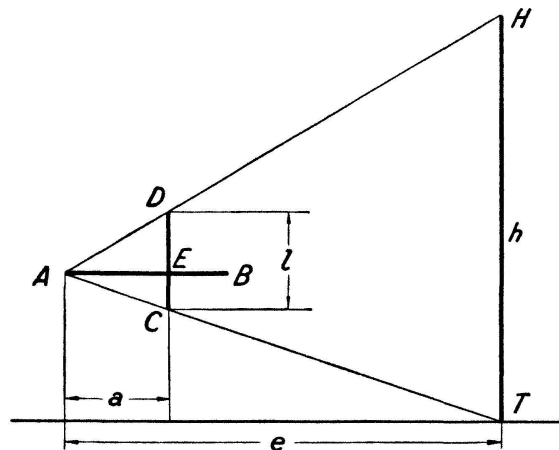
$$\varphi = \gamma, \quad \text{q. e. d.}$$

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

### III. Entfernungsschätzen mit dem Rechenschieber

Es ist bekannt, daß LEVI BEN GERSON (gest. 1344) ein Instrument beschrieben hat, das er *relevator secretorum* nannte und das später als Jakobsstab benützt wurde, um Höhen oder Entfernungen zu bestimmen. Auf einer Meßstange  $\overline{AB}$  war, senkrecht dazu, eine Stange  $\overline{CD}$  von bekannter Länge  $l$  verschiebbar angebracht (s. Figur). Um die Höhe  $h$  eines Turmes  $\overline{TH}$  zu bestimmen, wurde der Stab  $\overline{CD}$  so weit verschoben, daß  $\overline{AD}$  nach  $H$  und  $\overline{AC}$  nach  $T$  zeigte. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ACD$  und  $ATH$  folgt:  $a:l = e:h$ , woraus folgt:  $h = el/a$ . Ist aber die Turmhöhe bekannt, dann dient der Jakobsstab als Entfernungsmesser<sup>1)</sup>.

Bei der Verwendung des Rechenschiebers zum Entfernungsschätzen wird  $A$  als Auge des Beobachters,  $\overline{CD}$  als der Rechenschieber und die Strecke  $a$  als Länge des ausgestreckten Armes angesehen, dessen Hand bei  $E$  den Rechenschieber hält. Man



visiert nun einen Gegenstand bekannter Höhe (oder Länge oder Breite) an, wobei man den Punkt  $D$ , über den die eine Visierlinie läuft, mit dem Nullpunkt der auf einer Kante des Rechenschiebers angebrachten Zentimeterteilung zusammenfallen läßt. Der Punkt  $C$ , über den die andere Visierlinie läuft, kommt dann auf eine bestimmte Zahl  $z$  der Zentimeterteilung zu liegen. Die Entfernung  $a$  des Auges zum Rechenschieber bei  $E$  betrage 60 cm (sie muß fallweise gemessen werden). Es gilt dann:  $60:z = e:h$ , daraus ist  $e = 60 h/z$ . Diesen Wert bestimmt man gleich mit dem Rechenschieber, indem

<sup>1)</sup> Vgl. GONSETH und MARTI, *Planimetrie II*, S. 82, mit etwas abweichender Beschreibung. E. V.

man die Zunge mit  $z$  auf die Ziffer 6 der Grundskala einstellt und dann den Läufer auf  $h$  der Zunge schiebt. Auf der Grundskala liest man unter  $h$  die gesuchte Entfernung ab. Die gesamte Tätigkeit des Entfernungsschätzens mit dem Rechenschieber erfordert nur drei Handgriffe:

1. Visieren,
2. Einstellen der Zunge,
3. Einstellen des Läufers.

Der praktische Wert dieses Verfahrens liegt a) in der Handlichkeit des Gerätes (Taschenrechenschieber), b) in der Schnelligkeit der Ausführung und c) in der Gewinnung ziemlich genauer Zahlenwerte für die gesuchten Entfernungen.

Die Verwendung des Rechenschiebers ist im Vergleich zur Verwendung des Jakobsstabes oder des «Daumensprunges» und der «Daumenbreite» vorteilhafter, weil die Länge  $z$  auf der Zentimeterskala keine Konstante ist, wie bei den genannten Verfahren, sondern sich der bekannten Höhe, Länge oder Breite des anvisierten Gegenstandes entsprechend ergibt.

FRIEDRICH STABER, Graz.

## Aufgaben

**Aufgabe 28.** Eine Parabel ist durch zwei Punkte,  $A$  und  $B$ , und die zugehörigen Tangenten, die sich in  $T$  schneiden mögen, bestimmt. Man beweise die Richtigkeit der folgenden Konstruktion der Krümmungskreise in  $A$  und  $B$ :

Man zeichne das Rechteck über  $AT$ , dessen Gegenseite durch  $B$  geht. Dann verlängere man  $AT$  um sich selbst über  $T$  hinaus bis  $C$  und ziehe durch  $C$  die Normale zur Rechtecksdiagonale aus  $A$ . Ihr Schnittpunkt mit der Parabelnormalen in  $A$  ist das Krümmungszentrum für  $A$ .

Ferner zeige man: Die drei Parabeln, von denen jede zwei Seiten eines Dreiecks in der Mitte berührt, oskulieren sich paarweise, und die Krümmungsradien in den Oskulationspunkten verhalten sich wie die Kuben der Dreiecksseiten. A. STOLL.

*Lösung:* a)  $BC$  ist ein Durchmesser der Parabel, und  $\overline{AC}^2/\overline{BC}$  stellt den zum Durchmesser durch  $A$  gehörenden Parameter  $2p'$  dar. Ist  $M$  der nach Anweisung der Aufgabe konstruierte Punkt und  $n$  der Abstand des Punktes  $B$  von der Tangente  $AT$ , so folgt aus dieser Konstruktion  $\overline{AM} = \overline{AC}^2/2n$ . Das Verhältnis  $BC/n$  ist aber, ebenso wie  $\overline{AC}^2/\overline{BC}$ , von  $B$  unabhängig, also auch  $M$ . Andererseits gilt für den Radius  $r$  des Kreises, der durch  $B$  geht und die Tangente  $AT$  in  $A$  berührt  $\overline{B'A}^2 = \overline{BB'}(2r - \overline{BB'})$  ( $B'$  ist die Projektion von  $B$  auf  $AT$ ). Da  $T$  stets auf dem Durchmesser liegt, der  $\overline{AB}$  halbiert, wird, wenn  $B$  an  $A$  heranrückt,

$$\lim \overline{B'A}/\overline{AC} = 1, \quad \text{also} \quad \lim r = \lim \overline{B'A}^2/2n = \lim \overline{AC}^2/2n = \overline{AM}.$$

b) Die Behauptung über die drei Parabeln folgt fast unmittelbar aus dem gegebenen Ausdruck für den Krümmungsradius. Diese Radien haben hier die Werte  $a^3/2F$ ,  $b^3/2F$ ,  $c^3/2F$ , wo  $F$  die Fläche des Dreiecks bedeutet. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht.

Lösungen, die die allgemeine Formel für den Krümmungsradius verwenden, sandten L. DESCLOUX (Fribourg), K. RIEDER (Riehen) und E. ROTHMUND (Zürich).

Für die analytische Lösung sind wohl folgende Annahmen am zweckmäßigsten:  $A(0|0)$ ,  $T(r|-s)$ ,  $B(2r|t)$ ,  $y = ax^2 + bx$ . Sind  $\alpha$ ,  $\beta$  die Steigungswinkel der Tangenten in  $A$ ,  $B$  und  $\varphi = \alpha - \beta$  ihr Zwischenwinkel, so ist  $b = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $a = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)/4r$

$$\rho_A = -2r/(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) \cos^3 \alpha = 2\overline{AT}^2/\overline{BT} \sin \varphi.$$