

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 5 (1950)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Kleine Mitteilungen

## I. Eine Schließungsaufgabe

In einer Ebene  $E$  seien zwei beliebige Kreise  $k_1$  und  $k_2$  vorgegeben, die sich in den beiden reellen Punkten  $A, B$  schneiden mögen.  $Q$  bezeichne irgendeinen festen Punkt in  $E$ , der auf keiner der beiden Kreislinien liegt.

Ausgehend von einem beliebigen Punkt  $P_0$  auf der Peripherie von  $k_1$  ( $P_0 \neq A, B$ ) durchlaufe man einen Zug von Kreisbogen  $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$  nach der folgenden Vorschrift:

$P_0P_1$  gehört dem Kreis an, der durch die drei Punkte  $P_0, A, Q$  bestimmt ist, und  $P_1$  ist der andere Schnittpunkt dieses Kreises mit  $k_2$  (Fig. 1). Der nächste Bogen  $P_1P_2$  gehört dem Kreis durch  $P_1, B, Q$  an, und  $P_2$  ist der andere Schnittpunkt dieses Kreises mit  $k_1$ . Der dritte Bogen  $P_2P_3$  führt wieder durch  $A$  und  $Q$ , der vierte  $P_3P_4$  durch  $B$  und  $Q$ , usw.

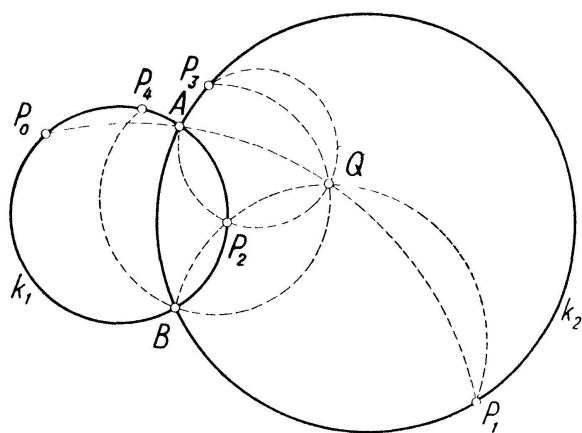


Fig. 1

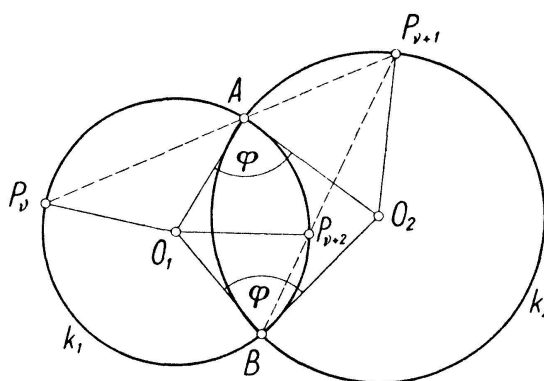


Fig. 2

Es ist gewiß überraschend, festzustellen, daß bei der Lösung der Frage, ob sich dieser Kreisbogenzug einmal schließt, ob also für ein gewisses gerades  $m$   $P_m = P_0$  wird, das Größenverhältnis der beiden Kreisradien und die Lage des Ausgangspunktes  $P_0$  keine Rolle spielen. Es kommt dabei lediglich auf die Größe des Schnittwinkels der beiden Kreise an, worüber der folgende Satz genauere Auskunft gibt:

*Notwendige und hinreichende Bedingung für den Schluß des Kreisbogenzuges ist, daß der Winkel, unter dem sich die beiden Kreise schneiden, mit  $\pi$  kommensurabel ist.*

Beweis: Es liegt nahe, die ganze Figur einer Inversion an einem Kreis mit  $Q$  als Zentrum zu unterwerfen.  $k_1$  und  $k_2$  gehen dabei in zwei neue Kreise über, die sich unter dem gleichen Winkel schneiden, und das Kreisbüschel durch  $Q$  bildet sich in gerade Linien ab. Somit ist klar, daß es genügt, unsere Behauptung für den speziellen Fall eines «eingeschriebenen» Streckenzuges ( $Q = \infty$ ) zu beweisen.

Zu allen Punkten des Streckenzuges  $P_0P_1P_2 \dots$  denken wir uns die zugeordneten Kreisradien  $O_1P_{2\mu}$  bzw.  $O_2P_{2\mu+1}$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) gezogen. Die Vektoren  $\vec{O_1P_{2\mu}}$  bzw.  $\vec{O_2P_{2\mu+1}}$  wollen wir der Kürze halber die Zeiger der betreffenden Punkte  $P$  nennen.

Das Kernstück unseres kurzen Beweises wird die Erkenntnis sein, daß beim Übergang von  $P_v$  zu  $P_{v+1}$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) der zugeordnete Zeiger sich im negativen Sinne um einen festen Winkel dreht, der gerade gleich dem Schnittwinkel der beiden Kreise ist. Diese Erkenntnis ist leicht zu gewinnen: Einer der beiden sich zu  $180^\circ$  ergänzenden Winkel, unter denen sich  $k_1$  und  $k_2$  schneiden, ist der Winkel  $+\varphi$ , den die Vektoren  $\vec{O_1A}$  und  $\vec{O_2A}$  (in dieser Reihenfolge) miteinander bilden (Fig. 2). Denkt man sich jetzt die

Zeiger von  $P_v$  und  $P_{v+1}$  an irgendeiner auf der Strecke  $P_v P_{v+1}$  senkrecht stehenden Geraden gespiegelt, so lassen sich diese Spiegelbilder durch Translation je in einen der beiden Zeiger des Punktes  $A$  überführen. Da bei dieser Spiegelung ein Winkel sein Vorzeichen ändert, müssen die Zeiger von  $P_v$  und  $P_{v+1}$  also den Winkel  $-\varphi$  miteinander einschließen.

Auch die Vektoren  $\overrightarrow{O_2 B}$  und  $\overrightarrow{O_1 B}$  (in dieser Reihenfolge) schließen den Winkel  $+\varphi$  ein, und daher wird der Zeiger von  $P_{v+2}$  wiederum um den Winkel  $-\varphi$  gegenüber seinem Vorgänger, dem Zeiger von  $P_{v+1}$ , gedreht sein, usw. Soll sich der Streckenzug schließen, was nur nach einer geraden Anzahl von Schritten möglich ist, so muß offenbar gelten:

$$2 m \cdot \varphi = n \cdot 2 \pi \quad (m, n = \text{ganze positive Zahlen})$$

oder

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{n}{m},$$

womit der Beweis erbracht ist.

Besonderer Erwähnung bedarf noch der zunächst undurchsichtig erscheinende Fall, daß ein Kreisbogen  $P_v P_{v+1}$  (oder in unserem Spezialfall eine Strecke  $P_v P_{v+1}$ ) des Zuges  $P_0 P_1 P_2 \dots$  einen der Kreise  $k_1, k_2$  berührt, so daß also  $P_{v+1}$  mit  $A$  oder  $B$  zusammenfällt. Nehmen wir an,  $P_v$  sei ein Punkt von  $k_1$  und  $P_{v+1}$  falle mit  $A$  zusammen. Der Punkt  $P_{v+2}$  ist dann offenbar auch identisch mit  $A$ . Eine elementare Stetigkeitsbetrachtung zeigt, daß man jetzt, um  $P_{v+3}$  zu erhalten,  $A$  tangential zu  $k_1$  verlassen und diesen Bogen (bzw. diese Strecke) mit  $k_2$  schneiden muß.

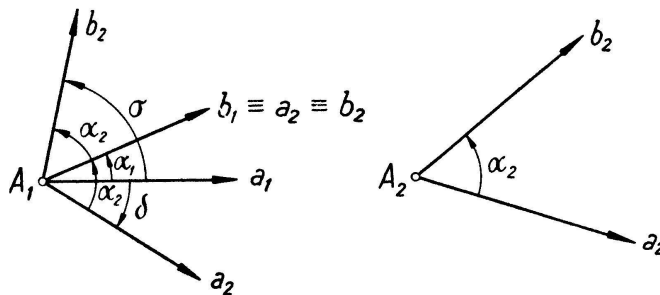
R. CONZELMANN, Basel.

## II. Herleitung der Quadrantenrelationen in der Goniometrie

Es handelt sich um das Problem:

Wie kann man, unter  $f$  ein goniometrisches Funktionszeichen verstanden,  $f(k \cdot 90^\circ \mp \alpha)$  durch eine goniometrische Funktion von  $\alpha$  allein ausdrücken, wie groß auch  $\alpha$  sein mag?

Dabei ist  $\alpha$  als «analytischer» Winkel gedacht, d. h. als Winkel, der durch Drehung entstanden zu denken ist und von dessen Schenkeln der eine als Anfangs-, der andere als Endschenkel gekennzeichnet sein muß. Seine «Entstehungsgeschichte» soll durch



einen «gepfeilten» Bogen wiedergegeben werden. Die bloße Angabe von Anfangs- und Endschenkel bestimmt den analytischen Winkel bis auf ganzzahlige Vielfache von  $360^\circ$ , was für unsere Zwecke genügt.

Bekanntlich gibt die Abszisse bzw. Ordinate des Einheitspunktes (Punkt mit Abstand 1 vom Scheitel) des Endschenkels von  $\alpha$  definitionsgemäß  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$ , wenn man den Anfangsschenkel zur positiven Abszissenachse, den Scheitel zum Nullpunkt und die positive Ordinatenachse auf übliche Weise wählt, d. h. so, daß eine Drehung der positiven Abszissenachse um  $+90^\circ$  diese in die positive Ordinatenachse überführt. Insofern darf man sagen, daß mit jedem analytischen Winkel ein Achsenkreuz in geschilderter Weise verknüpft ist, und dieses wiederum rechtfertigt zugleich die Wahl des Namens «analytischer» Winkel<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe: A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (Birkhäuser, Basel 1945), S. 115–118.

Es mögen nun die Winkel  $\alpha_1 = \sphericalangle(a_1, b_1)$  und  $\alpha_2 = \sphericalangle(a_2, b_2)$  vorliegen. Dann bedeute

$$\begin{cases} \sigma = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \delta = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$

einen analytischen Winkel, den man erhält, wenn man  $\alpha_2$  in der Ebene in Richtung und um den Betrag des Vektors  $A_2A_1$  verschiebt und dann um  $A_1$  so weit dreht, daß  $\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix}$  mit  $b_1$  zusammenfällt.  $a_1$  ist sein Anfangsschenkel und  $\begin{Bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{Bmatrix}$  sein Endschenkel.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns nun dem eingangs formulierten Problem zu (es genügt offensichtlich, die Fälle  $k = 0, 1, 2, 3$  zu behandeln): der Fall  $k = 0$  reduziert sich auf  $f(-\alpha)$  und ergibt bekanntlich  $f(-\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $f(x) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$  ist. Dabei heißt irgendeine Funktion  $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ , wenn sie für konträre Argumentwerte  $\begin{cases} \text{gleiche} \\ \text{konträre} \end{cases}$  Werte annimmt.

Man braucht nur noch den Fall  $k=1$ , und zwar  $f(90^\circ - \alpha)$  zu erledigen, um die noch verbleibenden Fälle als bloße Folgerungen hieraus zu erhalten. Betrachtet man den Winkel  $\delta = 90^\circ - \alpha$  als Differenz zweier analytischer Winkel im geschilderten Sinne und läßt man die Koordinatensysteme von  $\delta$  und  $\alpha$  zusammenfallen, so liegen die Endschenkel beider Winkel spiegelbildlich in bezug auf die Halbierende des ersten und dritten Quadranten, d. h. die Einheitspunkte dieser Endschenkel haben vertauschte Koordinaten. Daher muß  $\sin \delta = \cos \alpha$  und  $\cos \delta = \sin \alpha$ , folglich ganz allgemein:

$$\underline{f(90^\circ - \alpha) = \text{cof}(\alpha)},$$

wobei  $\text{cof}$  das Zeichen für Kofunktion sein soll.

*Folgerungen:*

1.  $f(90^\circ + \alpha) = f[90^\circ - (-\alpha)] = \text{cof}(-\alpha) = \begin{cases} \text{cof}(\alpha) \\ -\text{cof}(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $\text{cof}(x) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ .
2.  $f(2 \cdot 90^\circ - \alpha) = \begin{cases} \text{cof}(90^\circ - \alpha) = f(\alpha) \\ -\text{cof}(90^\circ - \alpha) = -f(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $\text{cof}(x) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$  Funktion von  $x$  ist.

Analog folgert man:

3.  $f(2 \cdot 90^\circ + \alpha) = \begin{cases} f(\alpha) \\ -f(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $f(x)$  und  $\text{cof}(x) \begin{cases} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{cases}$  Charakter  $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ ,
4.  $f(3 \cdot 90^\circ - \alpha) = \begin{cases} \text{cof}(\alpha) \\ -\text{cof}(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $f(x)$  und  $\text{cof}(x) \begin{cases} \text{gleichen} \\ \text{entgegengesetzten} \end{cases}$  Charakter  $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$

aufweisen. Schließlich:

5.  $f(3 \cdot 90^\circ + \alpha) = f(-90^\circ + \alpha) = \begin{cases} \text{cof}(\alpha) \\ -\text{cof}(\alpha) \end{cases}$ , wenn  $f(x) \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ .

Zusammenfassend ergibt sich leicht die bekannte Beziehung:

$$|f(k \cdot 90^\circ \mp \alpha)| = \begin{cases} |f(\alpha)| \\ |\text{cof}(\alpha)| \end{cases}, \text{ wenn } k \text{ eine ganze } \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \text{ Zahl bedeutet.}$$

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

## Bericht

### *Das Kontinuumproblem*

Vortrag von P. FINSLER im Mathematischen Kolloquium Winterthur vom 6. März 1950

Anläßlich der Jahrhundertwende gab HILBERT am Mathematikerkongreß in Paris einen Überblick über den Stand der mathematischen Forschung und bezeichnete 23 Probleme, deren Lösung sich den Anstrengungen der Mathematiker bisher verweigert