

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgabe 69. Man beweise für ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Flächeninhalt F die Ungleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4 F \sqrt{3}, \quad b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 \geq 16 F^2.$$

F. GOLDNER (London).

Lösung: Es ist nach der Heronschen Formel

$$16 F^2 = 2 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$= b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 c^2 - (a^2 - b^2)^2 - (c^2 - b^2) (c^2 - a^2)$$

und

$$48 F^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - 4 (a^4 + b^4 + c^4)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4 (a^2 - b^2)^2 - 4 (c^2 - b^2) (c^2 - a^2).$$

Die Elimination von F gibt

$$3 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \{(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - b^2) (c^2 - a^2)\}.$$

Es ist daher, wenn wir unter c die größte Seite verstehen,

$$48 F^2 \leq 3 (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

wobei die Gleichheitszeichen nur für $a = b = c$ Geltung haben.

Wegen $(a^2 + b^2 + c^2) : 4 F = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \omega \geq \sqrt{3}$ ergibt sich die bekannte Ungleichung für den Brocardschen Punkt

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

R. LAUFFER (Graz).

A. BAGER (Hjørring, Dänemark) und P. GLUR (Bern) verwenden die Identitäten

$$48 F^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2 [(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - b^2)].$$

$$16 F^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - 0,5 [(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - b^2)].$$

Weitere Lösungen sandten: H. BIERI (Bern), I. HESSELBERG (Noestved, Dänemark), S. JOSS (Bern), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich), B. SCHENKER (Fetan), A. SCHWARZ (Seuzach), A. STOLL (Zürich).

Die erste der beiden in der Aufgabe angegebenen Ungleichungen wurde zuerst von R. WEITZENBÖCK bewiesen (Math. Z. 5 [1919]).

Neue Aufgaben

95. Man bestimme die Ellipse, die durch drei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis doppelt berührt. Liegen die drei Punkte im Innern des Kreises, so ist die Aufgabe bekanntlich leicht lösbar, indem man die Figur als Normalprojektion einer eben geschnittenen Kugel auffaßt. Verlangt ist eine rein planimetrisch begründete Konstruktion, die auch den Fall berücksichtigt, wo die drei Punkte außerhalb des Kreises liegen.

W. LÜSSY (Winterthur).

96. Man zeige: Unter allen Rotationskörpern von der festen Länge $l > 0$ gibt es immer genau einen Kegel und einen Zylinder, welche in Oberfläche und Volumen übereinstimmen. Wie groß sind Oberfläche und Volumen dieses ausgezeichneten Körperpaares?
H. BIERI (Bern).
97. Von einem Brennpunkt einer Ellipse geht ein Lichtstrahl aus und kehrt nach zweimaliger Reflexion an der Ellipse in diesen Punkt zurück. Man bestimme die Ausgangsrichtung so, daß der Lichtstrahl eine möglichst große Dreiecksfläche umschließt.
H. LEHMANN (Bern).
98. Der Kreis K liegt auf einem elliptischen Paraboloid mit vertikaler Achse. Man betrachte diejenigen auf dem Paraboloid liegenden Wurfparabeln, die K berühren, und zeige, daß die Geschwindigkeit v im Berührungspunkt für alle Punkte von K dieselbe ist.
R. LAUFFER (Graz).

Literaturüberschau

Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946

Band 2, Reine Mathematik, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948

In der deutschen Ausgabe der *Fiat Review of German Science*, die die wissenschaftliche Arbeit Deutschlands während der Kriegszeit in gedrängtester Form zusammenfaßt, erstattet W. Süss mit 30 Mitarbeitern auf fast 800 Seiten Bericht über die Forschung in reiner Mathematik. Ein anderer Band ist der angewandten Mathematik gewidmet. Zum Teil sind auch ausländische Autoren zitiert, sofern sie während der Berichtszeit in deutschen Zeitschriften publiziert haben oder in Deutschland tätig waren. Auch unveröffentlichte Arbeiten wurden in großer Zahl aufgenommen.

Die Lektüre dieses Berichts ist außerordentlich anregend. Er wird nicht nur dazu beitragen, die Verbindung der deutschen mit der internationalen Wissenschaft wieder herzustellen, sondern auch jedem Leser neue mathematische Kenntnisse vermitteln.

Da es unmöglich ist, auf einzelne Arbeiten einzugehen, beschränken wir uns auf die Angabe der Kapitel und ihrer Bearbeiter. 1. Geschichte der Mathematik (J. E. HOFMANN); 2. Grundlagen der Mathematik (P. LORENZEN); 3. Elementarmathematik (M. ZACHARIAS); 4. Algebra und Zahlentheorie (H. HASSE); 5. Gruppentheorie (H. ZASSENHAUS); 6. Verbände (G. KÖTHE); 7. Allgemeine Mengen und reelle Funktionen (G. NÖBELING); 8. Unendliche Zahlenfolgen, Limitierungsverfahren (K. KNOPP); 9. Fastperiodische Funktionen (W. MAAK); 10. Spezielle Funktionen der mathematischen Physik (W. MAGNUS); 11. Reihenentwicklung der mathematischen Physik (J. LENSE); 12. Funktionentheorie (H. KNESER und E. ULLRICH); 13. Elliptische Modulfunktionen und automorphe Funktionen (H. PETERSSON); 14. Gewöhnliche Differentialgleichungen (M. MÜLLER); 15. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und Pfaffsches Problem (H. BILHARZ); 16. Potentialtheorie (K. MARUHN); 17. Partielle Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung (M. PINL); 18. Spezielle Randwertaufgaben (H. BUCHHOLZ); 19. Variationsrechnung (H. BOERNER); 20. Integralgleichungen (G. TAUTZ); 21. Eigenwerttheorie (H. WIELANDT); 22. Funktionalanalysis, Integraltransformationen (G. KÖTHE); 23. Grundlagen der Geometrie (E. SPERNER); 24. Analytische und höhere Geometrie (W. SÜSS); 25. Algebraische Funktionenkörper und algebraische Geometrie (M. DEURING); 26. Differentialgeometrie (G. BOL); 26a. Projektive Relativitätstheorie und Kosmologie (P. JORDAN); 27. Theorie der geometrischen Ordnungen (O. HAUPT); 28. Konvexe Körper und Differentialgeometrie im Großen (H. GERICKE); 29. Integralgeometrie (W. MAAK); 30. Topologie (H. SEIFERT und W. THRELFALL).

E. Trost.