Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 5 (1950)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Damit haben wir aber einen *Widerspruch gegen Axiom II 3* konstruiert. *Die Gegenannahme ist also zu verwerfen und Satz 2 ist vollständig bewiesen.*

W. GRUNER, R. STETTLER, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 56. In wie viele Gebiete wird die Ebene durch n Kreise zerlegt, die die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte haben? C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

1. Lösung: $G(n)$ sei die Anzahl der Gebiete bei n Kreisen. $G(1) = 2$. Der n-te Kreis wird durch die $n-1$ übrigen Kreise in $2(n-1)$ Bogenstücke zerlegt, von denen jedes ein Gebiet in zwei Teile teilt, so daß $2(n-1)$ neue Gebiete entstehen. Daher ist

$$G(n) = 2 + 2\left\{1 + 2 + \cdots + (n-1)\right\} = 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} = \underline{n^2 - n + 2}.$$

Denselben Wert für $G(n)$ erhält man, wenn die Kreise auf der Oberfläche einer Kugel liegen. Damit läßt sich die Anzahl $K(n)$ der Teile finden, in die der Raum durch n Kugeln geteilt wird, bei denen die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte von drei Kugeln auftritt. Die n-te Kugel wird durch die andern in $n-1$ Kreisen mit maximaler Schnittpunktanzahl geschnitten, so daß die Kugelfläche in $n(n-1) + 2$ Flächenstücke zerlegt wird. Jedes Flächenstück teilt ein Raumgebiet in zwei Teile, wobei stets ein neues Teilstück entsteht. Somit ist

$$K(n) = 2\sum_{n=2}^{n}\binom{n-1}{1} + 2(n-1) + 2 = 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{1}.$$

H. FÄHNDRICH (Bern).

2. Lösung: Es sei $e(n)$ die Zahl der Schnittpunkte der n Kreise, $k(n)$ die Zahl der unmittelbar benachbarte Punkte verbindenden Kreisbogen («Kanten») und $f(n)$ die Zahl der Gebiete, dann ist nach EULER:

$$f(n) = k(n) + 2 - e(n) \qquad [k(1) = 0] \qquad (1)$$

Nun ist

$$e(n) = 2\binom{n}{2} = n(n-1). \qquad (2)$$

$k(n)$ findet man z. B. mit Hilfe einer Rekursionsformel. Gibt man zu $\nu - 1$ Kreisen einen weiteren, so entstehen auf den ersteren offenbar $2(\nu-1)$ neue «Kanten», ebenso viele aber auch auf dem ν-ten Kreis. Also ist

$$k(\nu) = k(\nu-1) + 4(\nu-1). \qquad (\nu \geqq 2) \qquad (3)$$

Setzt man hierin der Reihe nach $\nu = 2, 3, \ldots, n$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$k(n) = 4[1 + 2 + \cdots + (n-1)] = 4\binom{n}{2} = 2n(n-1). \qquad (4)$$

Aus (3), (2) und (1) folgt:

$$\underline{f(n)} = 2n(n-1) + 2 - n(n-1) = \underline{n(n-1) + 2}. \qquad (5)$$

Für Kurven, die sich paarweise in m Punkten schneiden, erhält man in entsprechender Weise

$$f(n) = \frac{1}{2}\, m\, n(n-1) + 2.$$

B. SCHENKER (Fetan).

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Biel), L. Descloux (Fribourg), E. Rothmund (Zürich), A. Stoll (Zürich).

Aufgabe 57. Welches ist die größte ganze Zahl n, die durch alle ganzen Zahlen des Intervalls $(2, \sqrt[3]{n})$ teilbar ist? L. Rédei (Szeged, Ungarn).

Lösung des Aufgabenstellers: Wir beweisen, daß die gesuchte Zahl $n = 420$ ist. Da diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, haben wir nur noch die Unmöglichkeit der Annahme $n \geqq 421$ nachzuweisen. Es sei $g = [\sqrt[3]{n}]$ die größte ganze Zahl $\leqq \sqrt[3]{n}$. Dann gilt

$$n \leqq (g+1)^3 - 1 = g\,(g^2 + 3\,g + 3). \qquad (1)$$

Da $g \geqq 7$ und alle natürlichen Zahlen $\leqq g$ Teiler von n sind, muß auch $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ ein Teiler von n sein. Wegen der Annahme ist somit $n \geqq 840$ und $g \geqq 9$. Folglich ist $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$ ein Teiler von n, also $n \geqq 2520$ und $g \geqq 13$. Da n durch alle natürlichen Zahlen $\leqq g$ teilbar ist, gilt die Darstellung

$$g\,(g-1)\,(g-2)\,(g-3)\,t = 6\,n. \qquad (t \text{ ganz}, \geqq 1)$$

Mit (1) ergibt sich

$$(g-1)\,(g-2)\,(g-3) \leqq 6\,(g^2 + 3\,g + 3).$$

Hieraus folgt $g \leqq 12$, im Widerspruch mit $g \geqq 13$.

2. Lösung: (Ergebnis $n = 420$). Mit v_z sei das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $2, \ldots, z$ bezeichnet. Es ist dann $v_2 = 2$; $v_z = p\,v_{z-1}$, wenn z eine Potenz der Primzahl p ist, $v_z = v_{z-1}$, wenn z keine Primzahlpotenz ist. Es sei $z = [\sqrt[3]{n}]$. Wir betrachten die Intervalle $z^3 \leqq n < (z+1)^3$. Ein solches Intervall enthält so viele Zahlen n von der in der Aufgabe beschriebenen Art, als es Vielfache von v_z gibt, die zwischen z^3 und $(z+1)^3$ liegen. Im Intervall $z = 7$ liegt genau eine Zahl dieser Art, nämlich $n = 420$. Die folgenden Intervalle sind leer, wie aus der zu beweisenden Ungleichung $v_z > (z+1)^3$ für ganzzahliges $z \geqq 8$ hervorgeht. Es genüge, den Beweis für $z \geqq 19$ zu führen. Unter den Zahlen $m+1, \ldots, 8\,m$ sind drei Potenzen von 2 und je eine von 3, 5, 7. Daher $v_{8m} \geqq 840\,v_m > 9^3\,v_m$.

Daraus folgt:

$$v_{8^l m} > 9^{3l}\,v_m \qquad \text{für ganzzahliges } l \geqq 1,$$

$$v_{8^l m} > 9^{3[l]}\,v_m > \frac{9^{3l}}{3^6}\,v_m \qquad \text{für beliebiges } l \geqq 1. \qquad (8^l\,m \text{ ganzzahlig})$$

Mit $8^l = m'$ ist $9^{3l} > 8^{3l} = m'^3$,

also $$v_{m m'} > \frac{m'^3}{3^6}\,v_m \qquad \text{für beliebiges } m' \geqq 1. \qquad (m\,m' \text{ ganzzahlig})$$

Nun ist $$v_{19} = 232\,792\,560 > 3^{17},$$

also $$v_{19m'} > 3^{11}\,m'^3 > (27\,m')^3 = (19\,m' + 8\,m')^3 > (19\,m' + 1)^3$$

für beliebiges $m' \geqq 1$. Mit $19\,m' = z$ hat man $v_z > (z+1)^3$ für ganzzahliges $z \geqq 19$. O. Mäder (Feldkirch, Vorarlberg).

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), J. M. Ebersold (St. Gallen), H. Ruch (Bottmingen).

Aufgabe 59. Ein Torus wird von einem schiefen Kreiszylinder, dessen Kreisschnitte zur Torusachse senkrecht sind, in zwei Punkten berührt. Es bedeute $R + r$ bzw. $R - r$ den Radius des Äquator- bzw. Kehlkreises, ϱ den Radius der Zylinderkreise ($\varrho \leqq R - r$), d den Abstand der Mittellinie des Zylinders von der Torusachse ($d \leqq R - r - \varrho$), α den Neigungswinkel der Mittellinie des Zylinders gegen die Äquatorebene und L die

Länge der Mantellinien zwischen den beiden berührenden Kreisen des Zylinders. Man zeige:

$$\arcsin \frac{r}{R-\varrho} \leqq \alpha < \arcsin \sqrt{\frac{r}{R-\varrho}},$$

$$L = 2\sqrt[4]{(R-r-\varrho-d)\,(R-r-\varrho+d)\,(R+r-\varrho-d)\,(R+r-\varrho+d)}.$$

E. TROST (Zürich).

Lösung: Die Körperkombination ist schiefsymmetrisch in bezug auf die Äquatorebene des Torus. B sei der eine Berührungspunkt, B' seine Projektion auf die Äquatorebene. Diese werde von der berührenden Zylindermantellinie in A und von der Zylinderachse in C durchstoßen. AC ist parallel zur Meridianebene des Torus durch B. M sei der Mittelpunkt des Torus, D der Schnittpunkt von MB' mit der Normalen zu AB' durch A. Dann ist MC parallel DA und $\overline{MC} = \overline{DA} = d$ und $\overline{MD} = \overline{CA} = \varrho$.

Die äquatoriale Spur der Tangentialebene des Torus in B geht durch A und ist normal zu MB'; sie schneide MB' in E. EB ist in B Tangente an den Meridiankreis des Torus, dessen Mittelpunkt F sei. Schließlich sei $\overline{FB'} = p$, $\overline{B'E} = q$ und $R - \varrho = s$ gesetzt.

Zur Elimination der neueingeführten Größen p und q erhält man folgende Gleichungen: aus Dreieck DBF wegen $\overline{BF} = r$:

$$p\,(p+q) = r^2, \tag{1}$$

aus Dreieck DAB' wegen $\overline{DB'} = s - p$:

$$(s-p)\,(s-p-q) = d^2, \tag{2}$$

aus den Dreiecken $AB'B$ und $AB'D$ wegen $\overline{BB'} = pq$ und $\overline{AB} = L/2$:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 - pq = (s-p)^2 - d^2. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = sq \tag{4}$$

und damit aus (1):

$$sp^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 p - sr^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist $\delta^2 = (L/2)^4 + 4s^2r^2$, so daß kommt:

$$2sp = -\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \delta,$$

und mit (4):

$$2s\,(p+q) = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \delta,$$

und daraus:

$$2s\,(s-p) = 2s^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \delta,$$

$$2s\,(s-p-q) = 2s^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \delta.$$

Zufolge (2) wird also

$$4s^2d^2 = (2s^2-\delta)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^4$$

$$= 4s^4 + 4s^2r^2 - 4s^2\delta,$$

somit

$$\delta = s^2 + r^2 - d^2$$

und

$$\left(\frac{L}{2}\right)^4 + 4s^2r^2 = (s^2+r^2-d^2)^2,$$

woraus man durch leichte Umformung erhält:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^4 = (s + r + d)\ (s + r - d)\ (s - r + d)\ (s - r - d).$$

Für den Neigungswinkel α liefert das Dreieck ABB' mit (4): $(\sin\alpha)^2 = p\,q/s\,q = p/s < r/s$. Das erreichbare Minimum von p ist r^2/s, so daß $\sin\alpha \geqq r/s$ wird. Die obere Schranke bedeutet, daß bei Erreichung derselben die Bedingung von zwei *verschiedenen* Berührungspunkten nicht mehr erfüllt werden kann; ohne diese Bedingung kann natürlich $\alpha = 90°$ werden.

Bemerkung: $L^2/16$ ist eine Realisierung der «Fläche» eines uneigentlichen Dreiecks mit $r + d < s$. A. STOLL (Zürich).

Eine weitere Lösung sandte H. RUCH (Bottmingen).

Neue Aufgaben

75. Des relations
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \qquad (1)$$
et
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \qquad (2)$$
déduire les relations
$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \qquad (3)$$
et
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0. \qquad (4)$$

Peut-on déduire réciproquement (2) de (1) et (3) ? Plus généralement, trouver toutes les relations entre α, β et γ permettant de satisfaire à (1) et (3).

On cherchera à traiter symétriquement par rapport à α, β, γ ce problème dont les données sont symétriques (selon le conseil de M. G. PÓLYA dans *How to solve it*, p. 172[1])). F. FIALA (Neuchâtel).

76. Das dem Kreise mit der Fläche K einbeschriebene regelmäßige Polygon von der Fläche P rollt ohne zu gleiten auf einer Geraden. Eine Ecke beschreibt dabei einen aus Kreisbogen zusammengesetzten Kurvenzug. Man berechne den Inhalt der durch den Kurvenzug und die Gerade begrenzten Flächenstücke. G. TORDION (Zürich).

77. Die Zahl des Geburtsjahres eines berühmten schweizerischen Mathematikers hat folgende Eigenschaften:

Die Quersumme der Zahl, die Summe und Differenz der dritten und vierten Ziffer und die letzte Ziffer selbst sind alles von Null verschiedene Quadratzahlen. Ebenso bilden die zwei ersten Ziffern als Zahl im Zehnersystem gelesen eine Quadratzahl. L. LEHMANN (Bern).

78. Ein Pyramidenstumpf hat die Grundfläche G, die Höhe h und das Volumen $V = k\,h\,G$ $(1/3 \leqq k \leqq 1)$. Welchen Wert hat das Ähnlichkeitsverhältnis von Grund- und Deckfläche? E. TROST (Zürich).

VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIKLEHRER

53. Jahresversammlung in Baden, 1. Oktober 1949

Bei der Neuwahl des Vorstandes für die Amtsperiode 1949–1952 ist der bisherige Präsident, Dr. E. VOELLMY (Basel) durch Dr. FRANZ STEIGER (Bern) abgelöst worden. Ein ausführlicher Bericht über den geschäftlichen Teil der Jahresversammlung wird in der Zeitschrift «Gymnasium Helveticum» erscheinen.

Die Referate waren dieses Jahr ausschließlich Fragen der angewandten Mathematik gewidmet. Zur allgemeinen Freude hatte sich unser Altpräsident Dr. H. SCHÜEPP von seinen schweren, beim Wädenswiler Eisenbahnunglück erlittenen Verletzungen glänzend erholt und den Verein an der Abendsitzung mit einem Vortrag beehren können. In seiner ihm eigenen, begeisternden Art sprach Herr SCHÜEPP über die *Mathematische Behandlung des Temperaturbegriffs, besonders hoher Temperaturen, im Schulunterricht.*

[1]) Deutsche Übersetzung: *Schule des Denkens*, Sammlung Dalp, Band 36, A. Francke Verlag, Bern 1949, Seite 214.