logischen Gesellschaft, der Mathematischen Vereinigung in Basel und im Schweizerischen Mathematiklehrerverein. 1928 wurde ihm in Verbindung mit seinem Kollegen Dr. OTTO MAUTZ die Herausgabe der ersten beiden Leitfäden der Algebra übertragen. Nicht genug damit, übernahm er auch die Herausgabe der fünfstelligen Logarithmentafel, deren erste Auflage in mustergültiger Form 1939 herauskam und die nunmehr in der 9. Auflage vorliegt. Dieser Tafel schlossen sich eine vierstellige, eine fünfstellige mit 100^g Einteilung und eine Tafel für die welsche Schweiz an.

In Würdigung seiner Verdienste ernannte ihn 1947 der Verein Schweizerischer Mathematiklehrer zu seinem Präsidenten, delegierte ihn als seinen Vertreter in eine Formelkommission des Vereins Schweizerischer Elektrotechniker und an einen Kongreß für Schulmathematik nach Holland.

Von Anfang an lieh Dr. VOELLMY aber auch den «Elementen der Mathematik» seine Mitarbeit. Ihm verdanken wir wertvolle Beiträge, insbesondere auch die Biographie von JOST BÜRGI. Das Lebensbild NAPIERS hat er leider nicht mehr zum Abschluß bringen können. Sein Bild wäre unvollständig, wenn wir nicht auch des frohen SAC.-Mitgliedes gedächten. Obwohl körperlich behindert, gehörte die Besteigung einiger Viertausender zu seinem feststehenden Ferienprogramm. Besonders liebte er es, auf solchen Reisen zu zeichnen und zu aquarellieren. Von ganz besonderer Bedeutung für ihn war das Schachspiel. Als Schachschriftsteller und Organisator hat er sich internationale Verdienste erworben. 1920 und 1922 errang er den Titel des Landesmeisters. Viele Jahre war er Delegierter des Schweizerischen Schachvereins beim Weltschachbund. Wir aber haben einen treuen Freund und Mitarbeiter verloren.

P. BUCHNER.

Beweis einer Minimaleigenschaft des Quadrates

Dem Einheitskreis sei ein konvexes n-Eck P_n einbeschrieben, das den Kreismittelpunkt in seinem Innern enthält. Sein Flächeninhalt sei E_n. Die Tangenten in den Eckpunkten bilden ein umschriebenes n-Eck mit dem Flächeninhalt U_n. Unser Problem besteht in der Bestimmung desjenigen P_n, für das $F_n = E_n + U_n$ den kleinstmöglichen Wert annimmt. P. SZÁSZ hat vermutet, daß das einbeschriebene Quadrat das gesuchte Minimum liefert, das also den Wert 6 hat. Diese Vermutung wurde kürzlich von J. ACZÉL und L. FUCHS bewiesen[1]). Da ihr Beweis zwei nicht allgemein bekannte Ungleichungen über konvexe Funktionen (von JENSEN bzw. HARDY-LITTLEWOOD-POLYÀ) verwendet, ist vielleicht die folgende einfache Beweisanordnung von einigem Interesse.

Sind $2\alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, 2\alpha_n$ die zu den Seiten von P_n gehörenden Zentriwinkel, wo $0 \leqq \alpha_i \leqq 90°$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180°$, so ist

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\sin 2\alpha_i + 2 \operatorname{tg} \alpha_i). \tag{1}$$

---

[1]) J. ACZÉL und L. FUCHS, *A minimum-problem on areas of inscribed and circumscribed polygons of a circle*, Compositio mathematica *8*, 61–67 (1950). In einer eben erschienenen Arbeit (Nieuw Tijdschr. Wiskde *38*, 157–163 (1951) behandelt L. KUIPERS das Problem unter Beschränkung auf die Fälle $n = 3$ und $n = 4$, die bei uns von Anfang an wegfallen.

F_n ist also eine stetige Funktion von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ in einem nach unten abgeschlossenen Bereich und besitzt somit ein Minimum.

Wir halten nun $n-1$ Ecken $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n$ von P_n fest und verschieben die Ecke A_k auf dem durch A_{k-1} und A_{k+1} begrenzten Kreisbogen soweit, bis F_n möglichst klein wird. Dabei kann A_k auch mit A_{k-1} oder A_{k+1} zusammenfallen. Ein Polygon P_n nennen wir «stabil», wenn es keine Ecke A_k gibt, durch deren Verschiebung man F_n verkleinern kann. Das gesuchte Minimalpolygon muß offenbar unter den stabilen Polygonen gesucht werden. Wir stellen deshalb zuerst die Stabilitätsbedingungen auf.

Wir fixieren in (1) $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$, ebenso $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$, wo $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ vorausgesetzt werden darf, und betrachten den Ausdruck

$$y = \sin 2\alpha_1 + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 + \sin 2(\beta - \alpha_1) + 2\,\mathrm{tg}(\beta - \alpha_1)$$

$$= 2\sin\beta\left[\cos(\beta - 2\alpha_1) + \frac{1}{\cos\alpha_1 \cos(\beta - \alpha_1)}\right].$$

Differentiation nach α_1 ergibt

$$y' = 2\sin\beta\sin(\beta - 2\alpha_1)\left[2 - \frac{1}{\cos^2\alpha_1\cos^2(\beta - \alpha_1)}\right],$$

$$y'' = 4\left[\frac{1}{\cos^2\alpha_1\cos^2(\beta - \alpha_1)} - 2\right]\cos(\beta - 2\alpha_1)\sin\beta + \frac{4\sin^2(\beta - 2\alpha_1)\sin\beta}{\cos^3\alpha_1\cos^3(\beta - \alpha_1)}.$$

Nun betrachten wir die Nullstellen von y'. $\alpha_1 = \beta/2$ gibt ein Minimum, wenn y'' für diesen Wert positiv ist, das heißt, wenn $\cos\beta/2 < 1/\sqrt[4]{2}$, also $\beta > \beta_0 = 65°29'$. Aus Stetigkeitsgründen liefert aber $\alpha_1 = \beta/2$ auch für $\beta = \beta_0$ das Minimum; man findet hier übrigens $y''' = 0$, $y^{(4)} = 96\sqrt{2}\sin\beta$. Ist $\beta < \beta_0$, so haben wir die Gleichung

$$\cos\alpha_1\cos(\beta - \alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

zu lösen. y'' ist dann positiv. Schreiben wir (2) in der Form $\cos\beta + \cos(\beta - 2\alpha_1) = \sqrt{2}$, so läßt sich die Gleichung leicht graphisch am Einheitskreis lösen, indem man zu der zum Zentriwinkel 2β gehörenden Sehne im Abstand $\sqrt{2}$ die den Kreis schneidende Parallele zieht und einen Schnittpunkt mit dem Kreismittelpunkt verbindet. Wir erkennen, daß $\beta \geqq 45°$ sein muß. Für $\beta = 45°$ wird $\alpha_1 = 0$. Ist $\beta < 45°$, so gibt $\alpha_1 = 0$ ein Grenzminimum, denn für wachsendes α_1 ist y' im Intervall $0 \leqq \alpha_1 \leqq \beta/2$ positiv, weil hier $\cos\beta + \cos(\beta - 2\alpha_1) > \sqrt{2}$. $\alpha_1 = 0$ bedeutet Übergang zu einem Polygon mit der Eckenzahl $n - 1$. Wir dürfen daher $\beta > 45°$ voraussetzen. Hieraus folgt sofort $n \leqq 7$. Gibt es einen Zentriwinkel $2\alpha_i > 90°$, so können wir zwischen die zwei entsprechenden Eckpunkte eine neue Ecke so einführen, daß F_n sich verkleinert, denn wir sind im Falle $\beta > 45°$. Hieraus folgt $\alpha_i \leqq 45°$, somit $n \geqq 4$, wo das Gleichheitszeichen nur für das Quadrat gilt.

Wir können jetzt leicht die Übersicht über die stabilen Polygone gewinnen. Ein solches Polygon ist entweder regulär, was nur für $n = 4$ und $n = 5$ möglich ist, oder es besitzt genau zwei verschiedene Zentriwinkel $\xi = 2\alpha_1$ und $\eta = 2(\beta - \alpha_1) > \xi$, da durch (2) der Nachbarwinkel eindeutig bestimmt ist. Aus (2) folgt sofort $\xi < \beta_0$, $\eta > \beta_0$. Somit können mehrere Winkel η aufeinanderfolgen, während ξ immer von zwei Winkeln η umgeben wird.

$\underline{n = 7}$. Die Zerlegung $\xi + 6\,\eta = 360°$ ist wegen $\eta > \beta_0$ unmöglich. Aus

$$2\,\xi + 5\,\eta = 360° \qquad \text{folgt} \qquad 2\,\beta = \xi + \eta < 90°.$$

Es bleibt also nur $3\,\xi + 4\,\eta = 360°$ übrig. Wir erhalten aus (2) die Gleichung

$$\cos\frac{\xi}{2}\cos\left(45° - \frac{3\,\xi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \leqq \xi < 32°\,42'.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\xi = 0$ die einzige Lösung in diesem Intervall ist. Das Siebeneck wird damit zum Quadrat.

$\underline{n = 6}$. Die Zerlegung $\xi + 5\,\eta = 360°$ kommt wegen $\xi + \eta > 90°$ nur für das Intervall $22°30' < \xi < 32°35'$ in Frage. In diesem Intervall ist aber

$$\cos\frac{\xi}{2}\cos\left(36° - \frac{\xi}{10}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Die Zerlegung $2\,\xi + 4\,\eta = 360°$ führt auf

$$\cos\frac{\xi}{2}\cos\left(45° - \frac{\xi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \leqq \xi < 49°\,2'.$$

Da $\xi = 0$ die einzige Lösung ist, werden wir wieder auf das Quadrat geführt.

Aus $3\,\xi + 3\,\eta = 360°$ folgt $\xi + y = 120° = \text{const}$, so daß wir die Gleichung $\cos\xi/2\,\cos(60° - \xi/2) = \sqrt{2}/2$ sofort am Einheitskreis lösen können. Man erhält $\cos(60° - \xi) = \sqrt{2} - 0{,}5$ und daraus $F_6 = 0{,}75\,(4\sqrt{2} - 1)\sqrt{3} = 6{,}049$ (für das reguläre Sechseck ergibt sich der größere Wert $3{,}5\sqrt{3} = 6{,}062$).

$\underline{n = 5}$. Das reguläre Fünfeck ist offenbar stabil. Hier ist $F_5 = 6{,}010$. Die aus $\xi + 4\,\eta = 360°$ folgende Gleichung

$$\cos\frac{\xi}{2}\cos\left(45° - \frac{\xi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \leqq \xi < 54°\,38',$$

besitzt neben der Lösung $\xi = 0$, die wieder dem Quadrat entspricht, noch die Lösung $\xi = 49°52'$. Für die entsprechende Fläche F_5 erhält man hier 6,012, so daß das reguläre Fünfeck kleiner ist. Die Zerlegung $2\,\xi + 3\,\eta = 360°$ ist mit den Bedingungen $\xi + \eta \leqq 2\,\beta_0 = 130°58'$ und $\eta \leqq 90°$ unverträglich und fällt somit außer Betracht.

Damit ist bewiesen, daß das Quadrat mit der Fläche $F_4 = 6$ die verlangte Minimaleigenschaft besitzt.

Beachtet man, daß F_n nach (1) nicht von der Reihenfolge der $2\,\alpha_i$ abhängt[1]), so kann man sich auf die Zerlegungen $360° = \xi + (n - 1)\,\eta$ beschränken, so daß sofort $n \leqq 6$ folgt. Allerdings finden wir dann nicht alle stabilen Polygone.

E. TROST, Zürich.

---

[1]) Diesen Hinweis verdanke ich Dr. W. GRUNER, Zürich.