Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 6 (1951)

Heft: 4

Rubrik: Berichte

Man beweise diese Ungleichung. Erwünscht wären noch andere Abschätzungen dieses Produkts von Binomialkoeffizienten. ERWIN BAREISS (Zürich).

133. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie stets durch einen festen Punkt O geht und einer ihrer Punkte stets auf einem festen Kreise liegt. Ein Punkt P dieser Gerade werde so gewählt, daß die von ihm beschriebene Kurve k durch O geht. Zeige, daß der Krümmungsradius von k in O gleich dem halben Abstand von O und dem zugehörigen Momentanzentrum ist. R. SCHOECK (Winterthur).

134. Der Radius OA eines Kreises werde in fünf gleiche Teile geteilt. B_1, B_2, B_3 und B_4 seien die Schnittpunkte der in den Teilpunkten auf OA errichteten Lote mit der Kreisperipherie. Man beweise, daß alle Winkel AOB_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit dem rechten Winkel inkommensurabel sind. VICENTE INGLADA (Madrid).

Berichte

Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie

Zusammenfassung eines Vortrages von Herrn Prof. Dr. H. HADWIGER im Mathematischen Kolloquium Winterthur am 4. Dezember 1950

Innerhalb der heute bestehenden Wahrscheinlichkeitstheorie, für die ein axiomatisch strenger Aufbau erstrebt wird, unterscheiden sich hauptsächlich zwei verschiedene Entwicklungsrichtungen. Die eine geht von einem maßtheoretischen, die andere von einem limestheoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriff aus[1]). Diese neuzeitlichen Theorien geben wohl Definitionen für die mathematische Wahrscheinlichkeit und geben die Grundgesetze an, nach welchen aus bekannt vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten wieder andere abgeleitet werden können, aber eine eigentliche Berechnung irgendeiner Wahrscheinlichkeit ist nach den vorgesehenen Grundlagen nicht möglich. – Die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt aber bekanntlich zahllose Fragestellungen, welche durch die tatsächliche Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte beantwortet werden. Es handelt sich hier um Probleme *a priori*, für die als charakteristisches Merkmal etwa angeführt werden kann, daß durch willkürlich, aber sinnvoll gewählte Annahmen über Gleichmöglichkeiten eine weitergehende Idealisierung des der Problemstellung zugrunde liegenden Modells erwirkt wird. Derartige Festsetzungen, von denen man lange irrtümlich annahm, sie weiter begründen zu müssen, sind durchaus zulässig und decken keineswegs eine Zirkelhaftigkeit der angewendeten Wahrscheinlichkeitsdefinition auf, sondern bedeuten eine implizite Definition des in einem bestimmten Sinne idealisierten Modells[2]).

Solche Wahrscheinlichkeitsprobleme lassen sich mit analogen zusätzlichen Festsetzungen auch innerhalb der neuen Theorien lösen. Die jeweils zusätzlich hinzutretenden Festsetzungen sind von den übrigen Axiomen völlig unabhängig und von Fall zu Fall willkürlich wählbar.

Der Referent ist der Meinung, daß es durchaus wünschbar wäre, durch weitere, zusätzlich zu den übrigen hinzutretende Axiome, die nur für die Fälle *a priori* in Kraft gesetzt werden sollen, eine allgemein verbindliche Richtlinie für die Wahl dieser Festsetzungen zu fixieren. Er schlägt ein Invarianz- und ein Eindeutigkeitsaxiom vor, die zusammen mit den übrigen Axiomen die Grundlage einer Wahrscheinlichkeitstheorie *a priori* bilden können. Es handelt sich erstens um die Forderung, daß ein Maß bzw. ein Limes bezüglich eines Ereignismengensystems gegenüber einer Gruppe invariant sei.

---

[1]) Vgl. etwa: A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, in: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1933). – R. VON MIESES, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Z. *5* (1919). – E. KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (Teubner, Leipzig 1932).

[2]) Vgl. auch die trefflichen Ausführungen hierüber bei P. FINSLER, *Über die mathematische Wahrscheinlichkeit*, El. Math. *2*, H. 6, 108 (1947).

Der Ereignisraum ist hierbei Wirkungsraum der Gruppe. Zweitens sollen die oben genannten Werte die einzig möglichen sein, welche invariant sind. Dies bedeutet in seiner Konsequenz eine starke Einschränkung der zulässigen Ereignismengensysteme.

Die Anwendung des Invarianzprinzips ist keineswegs neu. Bei der Berechnung von sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten ist es seit langer Zeit[1]) als wirkungsvoll erkannt und stets benutzt worden. Allerdings handelt es sich hier nur um die Bewegungsgruppe. Neu ist vielleicht der Versuch, dieses bekannte fruchtbare Prinzip in die Axiomatik einer allgemeinen Wahrscheinlichkeitstheorie einzubauen, so daß diese in gleicher Weise Probleme vom endlichen, vom abzählbaren und vom kontinuierlichen Typ erfaßt.

Zur Illustration streift der Referent kurz die Lösungen von drei klassischen Aufgaben, die sich nach dem neuen ergänzten axiomatischen System vollziehen.

1. Die Aufgabe von Bertrand betreffend die drei Kästchen (endlicher Typ). Für dieses Problem gibt es bekanntlich eine äquivalente Würfelinterpretation: Ein Würfel sei nicht in der normalen Art punktiert, sondern so, daß die drei antipodischen Paare etwa (1, 2), (3, 5), (4, 6) lauten. Nach einem Wurf stelle man eine ungerade Punktzahl fest. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die antipodische Punktzahl gerade ist? Die Lösung, die sich nach klassischer Argumentation auf zwei bis drei Bemerkungen reduziert, vollzieht sich strenger nach der axiomatischen Grundlage wie folgt: Der Ereignisraum R besteht aus den 24 Würfellagen, die sich aus einer Anfangslage durch die 24 Operationen der Würfelgruppe G ergeben. Die Menge E der in Betracht gezogenen Ereignisse ist die Menge aller Lagen mit ungerader Punktzahl oben. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit W gefragt, daß ein Ereignis zur Menge P gehöre, wobei P die Menge aller Lagen mit gerader Punktzahl unten ist. Es ist dann $W = \varphi(EP)$, wobei $\varphi(A)$ ein für alle Teilmengen A von R definiertes, nichtnegatives, additives und G-invariantes Funktional ist, das so normiert sein muß, daß $\varphi(E) = 1$ ist. Das einzige solche Funktional ist durch $\varphi(A) = n(A)/n(E)$ gegeben, wobei $n(A)$ die Anzahl der Elemente von A bezeichnet. Nun ist $n(E) = 12$, $n(P) = 12$ und $n(EP) = 4$, so daß sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $W = 1/3$ ergibt[2]).

2. Die Aufgabe von Tschebyscheff über die Kürzbarkeit bei Brüchen (abzählbarer Typ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß sich ein aus zwei natürlichen Zahlen p und q gebildeter Bruch p/q kürzen läßt? Der Ereignisraum R besteht hier aus dem ebenen Einheitsgitter, dessen Punkte durch positive und negative ganze kartesische Koordinaten gegeben sind. Die Menge E der in Betracht gezogenen Ereignisse wird durch den Quadranten der Gitterpunkte mit positiven Koordinaten gebildet. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß ein Ereignis zu der Menge P derjenigen Gitterpunkte gehöre, die wenigstens einem Primzahlgitter angehören. Es ist dann $W = \varphi(EP)$, wobei $\varphi(A)$ ein über den Gitterpunktsmengen eines Mengensystems K erklärtes Funktional darstellt, das wiederum die bereits oben erwähnten Eigenschaften hat und gegenüber der Gittergruppe invariant ist. Wenn K das System derjenigen Mengen ist, die eine mittlere Dichte aufweisen, so ist dieses Funktional das einzig Mögliche. Es ergibt sich $W = (\pi^2 - 6)/\pi^2$.

3. Die Aufgabe von Bertrand über die Sehnenlänge im Kreis (kontinuierlicher Typ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W, daß eine Gerade, die einen Kreis trifft, auch den konzentrischen Kreis mit dem halben Radius trifft? Der Ereignisraum R besteht aus allen Geraden der Ebene. Die Menge E bzw. P besteht aus denjenigen Geraden, die den größeren bzw. den kleineren Kreis treffen. Wieder ist $W = \varphi(EP)$, wo $\varphi(A)$ ein über den Geradenmengen A eines Mengensystems K erklärtes Funktional bedeutet, bei welchem neben den üblichen Eigenschaften die Invarianz gegenüber der euklidischen Bewegungsgruppe der Ebene besteht. Als K dient das System derjenigen Geradenmengen A, deren durch die Polarkoordinaten (p, Θ) gegebene Bildmenge im Poincaréschen Diagramm einen Jordanschen Inhalt haben. Das Funktional ist dann wieder das einzig Mögliche, und als Resultat ergibt sich $W = 1/2$.

W. Prokop, Winterthur.

---

[1]) M. W. Crofton, London, 1868, 1877, 1885; R. Deltheil, Paris, 1926.

[2]) E. Czuber hat in einer älteren Abhandlung (Jahresberichte DMV., 1923) den unrichtigen Wert $W = 1/2$ angegeben.

Die dritten «Gespräche von Zürich», 18. bis 21. April 1951

Dringender vielleicht als je in der Geschichte der Menschheit benötigen wir heute sicheres Wissen um Werte und um Wahrheit – weniger aber als je scheint uns dieses Wissen zur Verfügung zu stehen. Die absolute Gründung unserer Erkenntnis gerät zusehends ins Wanken, ein pragmatistischer Relativismus aber bedroht uns mit der Grausamkeit einer sinn- und wertlosen Anarchie. Diejenigen unter uns, welche sich in Werten und Wissen verwurzelt fühlen, dabei aber die Fragwürdigkeit einer absoluten Fundierung dieser Werte und dieses Wissens erleben, scheinen zu einer Art philosophisch-geistigen Doppellebens verurteilt zu sein.

Mit dieser Situation hat sich seit einer Reihe von Jahren F. GONSETH in Zürich auseinandergesetzt, zunächst allein, später als geistiges Haupt und Zentrum einer Gruppe von Philosophen und Wissenschaftern. Sein primäres Anliegen war es dabei, die Situation zu erkennen, in der wir uns als denkende Menschen *de facto* befinden. GONSETHS Gedankengänge nahmen so ganz natürlich die Form einer methodologischen Untersuchung an. Dieser lagen zwei sich ergänzende Gesichtspunkte zugrunde: einerseits kann es sich nicht darum handeln, unserer Erkenntnis, wie sie tatsächlich vorliegt, Absolutheitsansprüche gewissermaßen gewaltsam aufzuzwingen, mögen diese uns auch noch so sehr ans Herz gewachsen sein. Zugleich aber stellen wir fest, daß wir in Wirklichkeit nicht einem totalen Relativismus ausgeliefert sind. Wir verfügen über ein gewisses, sich stets erweiterndes Maß an Wissen, und erleben dieses als weder willkürlich noch in leichtfertiger Weise anfechtbar. Dies ist die Situation, in der wir uns vorfinden; mag sie auch unseren hochfahrenden Wünschen nicht gerecht werden, so müssen wir uns doch mit ihr in ehrlicher Bescheidenheit auseinandersetzen.

Dem Erkennen dieser Situation und der Auseinandersetzung mit ihr ist GONSETHS philosophische Arbeit gewidmet. Um ihrer willen sind die in regelmäßigen Abständen stattfindenden «Gespräche von Zürich» zustande gekommen, an denen Gelehrten und Philosophen aus aller Welt die sich aus dieser Arbeit nach und nach ergebenden Gesichtspunkte zur Diskussion unterbreitet werden.

Ursprünglich ging GONSETH, seinem Herkommen entsprechend, von der Mathematik aus. Die philosophischen Grundlagen der Mathematik befinden sich in zweifacher Hinsicht in einer Krise; einmal wurde das Vertrauen in die mathematische Evidenz bereits durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien, später noch mehr durch die atemberaubende Kühnheit gewisser mathematischer Begriffserweiterungen erschüttert; das entstehende Malaise trat deutlich in der bitteren Polemik KRONECKERS gegen CANTOR wie auch in der Entwicklung, die zur Schaffung des intuitionistischen Lehrgebäudes führte, zutage; die Entdeckung der mengentheoretisch-logischen Antinomien tat ein übriges, um den Glauben an die absolute Fundierung der Mathematik zu erschüttern oder zumindest zum Problem zu machen. In den gleichen Zeitraum fielen aber großartige Fortschritte der Mathematik, und die forschenden Mathematiker fühlten sich mehr denn je als Könige in ihrem Reich. So finden sich denn alle methodischen Aspekte der eingangs geschilderten Situation bereits in der Mathematik selber vor. Die ersten «Gespräche von Zürich», im Jahre 1938, waren denn auch gänzlich den Grundlagen der Mathematik gewidmet, und auch an den späteren Gesprächen war der Mathematik stets ein großer Platz eingeräumt.

Die zweiten «Gespräche», die infolge des Krieges erst 1948 stattfinden konnten, waren dem Begriffe der Dialektik gewidmet, der in der Entwicklung der Gonsethschen Gedankengänge eine hervorragende Rolle spielt. Hier geht es im engsten Sinne um die grundlegende Fragestellung: wieso haben wir noch Gewißheiten, wenn wir doch zur Kenntnis nehmen müssen, daß wir nicht in der Lage sind, diesen Gewißheiten Absolutheitsanspruch zuzubilligen?

Vom 18. bis 21. April dieses Jahres fanden nun in Zürich die dritten «Gespräche» statt. Ihnen lag das Thema *Das Prinzip der Dualität von Theorie und Erfahrung* zugrunde. Damit ist die von GONSETH betonte und durch ihn zu einem empirischen Postulat erhobene Feststellung gemeint, daß Theorie und Erfahrung in unserem geistigen Leben unlöslich miteinander verwoben sind und als voneinander losgelöste Begriffsbildungen sinnlos würden.

Eingeleitet wurden die Gespräche durch ein Referat von BERNAYS (Zürich), in dem dieser sich eingehend mit den Begriffen «empirisch» und «rational» beschäftigte; BERNAYS trat insbesondere dafür ein, diese Begriffe weit genug zu fassen, als daß man einerseits (im Sinne FRIES') die Vernunft als das Einheitsprinzip des Geistigen ansehen könne, andererseits auch dem Element des Erfahrungs- und Erlebnismäßigen in jedem theoretischen Bereiche – auch dem der Mathematik – Rechnung tragen könne. Dem Begriffe der Erfahrung in der Mathematik wurde an den «Gesprächen» ein breiter Raum eingeräumt. Darüber, daß in der Tätigkeit des Mathematikers von den primitivsten bis zu den höchstgezüchteten Stadien eine Art der Erfahrung eine hervorragende Rolle spielt, herrschte völlige Einigkeit. Um so eingehender befaßte man sich mit der Frage, welcher Art diese Erfahrung sei bzw. was an ihr das spezifisch Mathematische sei. BERNAYS unterstrich das Auftreten, in der mathematischen Forschung, sowohl eines Momentes der *Entdeckung* wie auch eines solchen einer bloß *empirischen* Sicherheit – zum Beispiel der Sicherheit, daß die Analysis widerspruchsfrei ist. BOULIGAND (Paris) ging so weit, vom Bestehen von kausalen Beziehungen in der Mathematik zu sprechen; tatsächlich erleben wir ja zahlreiche mathematische Untersuchungen als dem Aufsuchen von «Ursachen» gewisser mathematischer «Erscheinungen» gewidmet. – ARNOLD SCHMIDT (Göttingen) vertrat die Auffassung, daß der Mathematik neben der einfach wahrnehmungsmäßigen und der logischen auch noch eine spezifische Kategorie der Erfahrung eigentümlich ist: es ist dies die Erfahrung am Bereich der ganzen Zahlen, mit denen wir ja *rational manipulieren* können – wie es etwa bei einer numerischen Verifikation geschieht. Es hatte übrigens seinerseits BERNAYS darauf hingewiesen, daß selbst ein mathematischer Beweis nicht nur unter dem Gesichtspunkt des Rationalen, sondern ebenfalls auch unter dem Gesichtspunkt des Empirischen angesehen werden kann, da er ja eine Folge von geistig wahrnehmbaren und überprüfbaren vernunftmäßigen *Handlungen* darstellt – ein Moment, welches eine entscheidende Rolle in der heutigen Logistik spielt. – Zum Schlusse seien noch, in einem mehr psychologischen Zusammenhang, die Ausführungen von PIAGET (Genf) erwähnt, welche sich mit der Entwicklung des mathematischen Vermögens beim Kinde befaßten; PIAGET wies unter anderem auf das Problem der adäquaten Beschreibung der logischen Entwicklung des Kindes hin; diese sollte mit den Mitteln geleistet werden, welche die moderne Logistik uns zur Verfügung gestellt hat – wobei aber dem Umstande gebührend Rechnung zu tragen ist, daß die Entwicklung des Kindes nicht stets dem Wege folgt, den der theoretische Aufbau der Logik vorzuzeichnen scheint.

Mit diesen Hinweisen ist natürlich das an den «Gesprächen» Gesagte in keiner Weise erschöpft. Insbesondere sprachen noch zur Mathematik: APÉRY (Caen), FIALA (Neuchâtel), HIRSCH (Bruxelles) und im Zusammenhange der Diskussion unter anderem LORENZEN (Bonn) und v. FREYTAG-LÖRINGHOFF (Tübingen). Ferner erfolgten nicht minder eingehende Erörterungen zur Physik, Psychologie, Rechtsphilosophie und nicht zuletzt auch zur allgemeinen Philosophie – hier besonders im Rahmen einer Diskussion über das Kantische Apriori, welche einerseits von den Physikern bei der Erörterung der Erkenntnisprobleme der Quantentheorie, andererseits von den Metaphysikern, insbesondere dem Pater ISAYE (Louvain), eingeleitet wurde. – Nur kurz gestreift wurde leider der ethische Bereich. – Der Platzmangel zwingt uns hier zur Unvollständigkeit; wir verweisen aber darauf, daß die Akten der «Gespräche» als eine Sondernummer der Zeitschrift *Dialectica* erscheinen werden.

Zum Schlusse einige organisatorische Angaben: Die «Gespräche» wurden durch einen ausgedehnten Austausch von vervielfältigten Thesen (vorläufigen Stellungnahmen) vorbereitet. Sie fanden in der Eidgenössischen Technischen Hochschule statt. Das allgemeine Präsidium hatte F. GONSETH inne, der auch das zugleich zusammenfassende und richtungweisende Schlußreferat hielt. Eröffnet wurden die Gespräche namens der ETH. durch Rektor STÜSSI, im Beisein von Schulratspräsident PALLMANN, Regierungsrat VATERLAUS und dem Zürcher Stadtpräsidenten LANDOLT. TH. SPÖRRI überbrachte die Grüße der Zürcher Universität, HAVET die der UNESCO, GAWRONSKY und GATTENGO bzw. diejenigen des Centro Romano di Comparazione e Sintesi und die der Universität London. Die Eröffnungssitzung war zugleich der Einweihung des «Internationalen Forums Zürich» (IFZ.) gewidmet, dessen erste Aufgabe die regelmäßige Weiterführung der bis jetzt stets durch GONSETH persönlich organisierten «Gespräche» sein wird. Als Dolmetscher der deutsch und französisch geführten Gespräche fungierte der Unterzeichnete. ALEXANDER WITTENBERG, Zürich.

Literaturüberschau

LUDWIG SCHLÄFLI: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*

Band I, herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft
Verlag Birkhäuser, Basel 1950

Jeder Literaturfreund weiß, daß ein gewisser JOHN MILTON in einem hochberühmten Werk das verlorene Paradies besungen hat. Aber es sind ihrer wenige, die es (ganz) gelesen haben; und das ist vielleicht gut so. Genau so kennt jeder Mathematiker den Titel *Theorie der vielfachen Kontinuität* des genialen Jugendwerkes von LUDWIG SCHLÄFLI. Doch gelesen und studiert haben es wieder nur wenige; und das ist ausgesprochen schade. Denn wo anders als aus dieser klassischen Abhandlung könnte insbesondere der Mathematiklehrer authentischere Belehrung und vielfältigere Anregung schöpfen für die Beantwortung der immer wieder an ihn gerichteten Schülerfragen nach dem Wesen und der Vorstellbarkeit der vierten Dimension!

Als mildernder Umstand für die wenig verbreitete Kenntnis dieses Originalwerkes konnte bis vor kurzem ins Feld geführt werden, daß es nur auf wissenschaftlichen Bibliotheken und selten in Antiquariaten erhältlich war. Wer die «Vielfache Kontinuität» bei der Bibliothek der ETH. bestellte, der bekam ein Buch ausgehändigt mit dem freundlichen Vermerk: Überreicht vom Verfasser. Allein die erste Freude über diese nahe Verbundenheit mit dem Meister mußte wohl regelmäßig der schmerzlichen Erkenntnis weichen, entweder einem makabren Scherz eines früheren Lesers zum Opfer gefallen zu sein oder dann nur die Visitenkarte des ersten Herausgebers vor sich zu haben. Denn tatsächlich hat ja SCHLÄFLI die Veröffentlichung dieser Arbeit nicht erlebt. Sie wurde erst 50 Jahre nach ihrer Entstehung von J. H. GRAF, dem Schüler und Nachfolger SCHLÄFLIS, erstmals herausgegeben. Heute, 100 Jahre nach ihrer Begründung, wird die Theorie der vielfachen Kontinuität zum zweiten Male, zusammen mit zwölf anderen Abhandlungen aus den Jahren 1846 bis 1850, in mustergültiger Weise veröffentlicht.

Wir verdanken die auf drei Bände veranschlagte Ausgabe der Gesammelten mathematischen Abhandlungen von L. SCHLÄFLI dem Auftrag und der finanziellen Unterstützung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft, den Druckzuschüssen weiterer Institutionen, der selbstlosen Herausgebertätigkeit des Steiner-Schläfli-Komitees und dem Verlag Birkhäuser. Dieses Werk, das naturgemäß kein Bestseller werden kann, unter seine Obhut genommen zu haben, bedeutet eine verlegerische Tat, die ihren Wert in sich selber trägt. Denn das Schläflische Opus gereicht dem in kurzer Zeit zu einer imponierenden Größe herangewachsenen Birkhäuserschen Verlagswerk zur Zierde und zur Ehre.

Damit soll keineswegs angedeutet sein, daß die Sammlung und der Neudruck der zerstreuten und vergessenen, kleinen und großen Abhandlungen dieses schweizerischen Mathematikers nur ein Akt der Pietät, patriotischen Stolzes und später Ehrenrettung darstelle. Solche Motive mögen vielleicht bei den Auftraggebern mitgespielt haben. Daneben sind aber die meisten Arbeiten und Entdeckungen SCHLÄFLIS trotz ihres Alters herrlich wie am ersten Tag. Das gilt ganz besonders von der bereits erwähnten