Beispiel zum Grenzwertsatz

Il suffira d'effectuer la construction pour tous les angles α_i et l'on aura établi la proposition suivante:

Tout polyèdre P est équivalent à un polyèdre rationnel R.

Employons la terminologie de HADWIGER et disons que deux polyèdres A et B sont équivalents (mod R) lorsque l'un augmenté d'un polyèdre rationnel R_1 est équivalent à l'autre augmenté d'un polyèdre rationnel R_2. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Pour que deux polyèdres euclidiens soient équivalents (mod R), il faut et il suffit qu'ils vérifient les conditions de Dehn.

Reste une dernière question: Un polyèdre rationnel est-il équivalent à un cube? Si cette propriété était vraie (et nous penchons à le croire), nous pourrions alors affirmer que les conditions de DEHN sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres. Nous n'avons pas encore pu éclaircir ce dernier point.

J.-P. SYDLER, Zurich.

Beispiel zum Grenzwertsatz

W. SAXER[1]) gab einen ausgezeichneten Überblick über die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einem einfachen Beispiel kann auch bei Schülern Verständnis für diesen wichtigen Satz erweckt werden.

In einer Urne U_1 befinden sich die Nummern x: -2, -1, 0, 1, 2 in gleicher Anzahl vertreten, so dass die Wahrscheinlichkeit $w_1(x) = 0{,}2$ ist, irgendeine bestimmte dieser

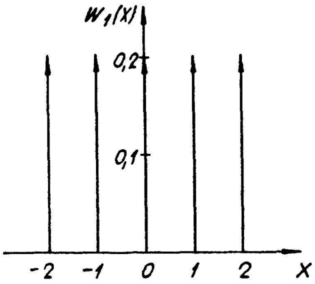

Fig. 1

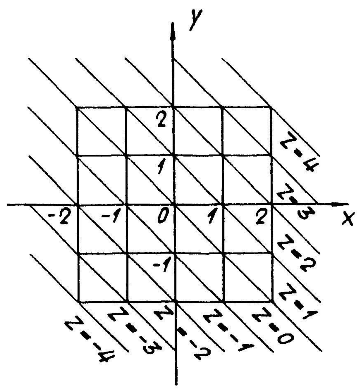

Fig. 2

fünf Nummern zu ziehen. Wir sprechen von einem Kollektiv mit Gleichverteilung (Figur 1). Infolge der symmetrischen Anordnung der Nummern ist der Mittelwert $\bar{x} = 0$, und für die Streuung ergibt sich

$$\sigma^2(x) = \frac{2}{5}\,(1^2 + 2^2) = 2 .$$

Zur Urne U_1 trete die Urne U_2 mit gleicher Füllung. Wir ziehen zugleich aus U_1 die Nummer x mit der Wahrscheinlichkeit $w_1(x)$ und aus U_2 die Nummer y mit der

1) W. SAXER, *Über die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, El. Math. *5*, 50 (1950).

Wahrscheinlichkeit $w_2(y)$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $w_3(z)$ die Summe

$$z = x + y,$$

wo z eine vorgegebene ganze Zahl mit $|z| \leqq 4$ ist, zu ziehen?

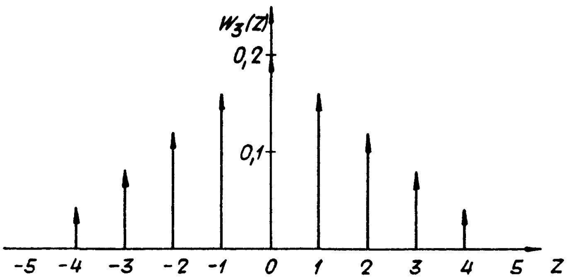

Fig. 3

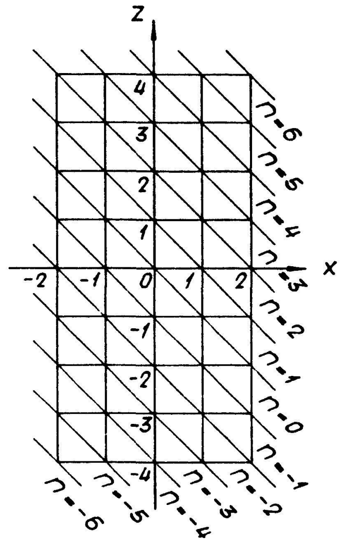

Fig. 4

Das Zahlenpaar (x, y) bestimmt einen Gitterpunkt der Zahlebene. Gitterpunkte, die derselben Summe z zugeordnet sind, liegen auf einer Diagonale des Quadrates der Figur 2. Demnach ist

$$w_3(\mp 4) = w_1(\mp 2)\, w_2(\mp 2) = \frac{1}{25},$$

$$w_3(\mp 3) = w_1(\mp 2)\, w_2(\mp 1) + w_1(\mp 1)\, w_2(\mp 2) = \frac{2}{25},$$

$$w_3(\mp 2) = w_1(\mp 2)\, w_2(0) + w_1(\mp 1)\, w_2(\mp 1) + w_1(0)\, w_2(\mp 2) = \frac{3}{25},$$

$$w_3(\mp 1) = w_1(\mp 2)\, w_2(\pm 1) + w_1(\mp 1)\, w_2(0) + w_1(0)\, w_2(\mp 1) + w_1(\pm 1)\, w_2(\mp 2) = \frac{4}{25},$$

$$w_3(0) = w_1(\mp 2)\, w_2(\pm 2) + w_1(\mp 1)\, w_2(\pm 1) + w_1(0)\, w_2(0) + w_1(\pm 1)\, w_2(\mp 1) + w_1(\pm 2)\, w_2(\mp 2) = \frac{5}{25}.$$

Natürlich ist

$$\sum_{z=-4}^{4} w_3(z) = 1 \qquad \text{und} \qquad \bar{z} = \sum_{z=-4}^{4} z\, w_3(z) = 0,$$

während sich für die Streuung

$$\sigma^2(z) = \sum_{z=-4}^{4} z^2\, w_3(z) = 4 = \sigma^2(x) + \sigma^2(y)$$

ergibt. Figur 3 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung in diesem Summenkollektiv. Statt aus den Urnen U_1 und U_2 gleichzeitig je eine Nummer zu ziehen, können wir eine Nummer z einer Urne U_3 entnehmen, in der die Nummern in der eben berechneten Häufigkeit enthalten sind.

Zieht man jetzt gleichzeitig aus der Urne U_1 eine Nummer x mit der Wahrscheinlichkeit $w_1(x)$ und eine Nummer z aus U_3 mit der Wahrscheinlichkeit $w_3(z)$, so können wir wieder nach der Wahrscheinlichkeit $w(u)$ fragen, eine vorgegebene Summe

$$u = x + z$$

zu ziehen, wobei

$$-6 \leqq u \leqq 6$$

ist. Die Zerlegungen von u in die Summanden x und z können der Figur 4 entnommen werden. Es wird

$$w(\mp 6) = \frac{1}{125}, \qquad w(\mp 5) = \frac{3}{125}, \qquad w(\mp 4) = \frac{6}{125},$$

$$w(\mp 3) = \frac{10}{125}, \qquad w(\mp 2) = \frac{15}{125}, \qquad w(\mp 1) = \frac{18}{125}, \qquad w(0) = \frac{19}{125}.$$

Der Mittelwert berechnet sich zu $\bar{u} = 0$ und die Streuung zu

$$\sigma^2(u) = 6 = \sigma^2(x) + \sigma^2(z) = 3\,\sigma^2(x).$$

An Stelle der Variablen u führen wir die sogenannte «standardisierte Veränderliche»

$$t = \frac{u}{\sigma} = \frac{u}{\sqrt{6}}$$

ein und multiplizieren zugleich die Ordinate w mit σ, damit der Flächeninhalt, den die Kurve umschliesst, unverändert bleibt. Wir vergleichen alsdann unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Normalverteilung

$$s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}.$$

u	t	$w\sqrt{6}$	s
0	0	0,372	0,399
± 1	$\pm \frac{\sqrt{6}}{6} = 0{,}408$	0,353	0,367
± 2	$\pm \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}816$	0,294	0,286
± 3	$\pm \frac{\sqrt{6}}{2} = 1{,}225$	0,196	0,188
± 4	$\pm 2\frac{\sqrt{6}}{3} = 1{,}633$	0,118	0,105
± 5	$\pm 5\frac{\sqrt{6}}{6} = 2{,}041$	0,0588	0,0497
± 6	$\pm \sqrt{6} = 2{,}449$	0,0196	0,0199

Die Tabelle und die Figur 5 zeigen die gute Übereinstimmung der beiden Verteilungen.

Führen wir diese Summenoperationen nicht nur dreimal, sondern n-mal durch, dann wird nach dem Grenzwertsatz mit wachsendem n die Übereinstimmung zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, auf die die Summenoperation führt, und der

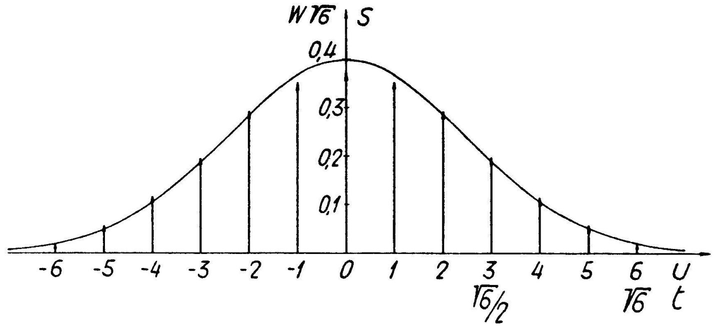

Fig. 5

Normalverteilung immer besser. Geht man von einem Kollektiv mit Gleichverteilung aus, so zeigt unser Beispiel, dass die Konvergenz sehr gut ist. Bei zehnmaliger Wiederholung ergibt sich für $u = 0$: $w\sqrt{20} = 0{,}392$. Die Abweichung von $s = 0{,}399$ liegt unter 2%. Natürlich lässt der Grenzwertsatz sehr viel allgemeinere Ausgangskollektive zu, und erst darin liegt ja dann seine grosse Bedeutung. P. BUCHNER, Basel.

Kleine Mitteilungen

Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung

Im Anschluss an eine Bemerkung zum Beweis des Satzes von CHOQUET und KREWERAS, dass eine unendliche Punktmenge des p-dimensionalen euklidischen Raumes R^p mit nur ganzzahligen Entfernungen von Punkt zu Punkt notwendigerweise linear sein muss, stellt E. TROST[1]) die Frage nach der Bestimmung der maximalen Anzahl N_p von Punkten des R^p, die nicht alle auf einer Geraden liegen und deren gegenseitige Entfernungen ausschliesslich ganzzahlig sind. Eine solche Maximalzahl N_p existiert nun nicht, für kein p, denn es gilt der Satz:

Zu jedem n lassen sich im R^2 n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ so bestimmen, dass alle Entfernungen $\overline{P_i P_k}$ ganzzahlig sind und dass je drei dieser Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

Es lassen sich also wohl beliebig viele, niemals aber unendlich viele Punkte mit der gewünschten Eigenschaft finden; und in der Tat bedeutet ja «endlich» nicht notwendigerweise auch «beschränkt».

Der leitende Gedanke des Beweises ist folgender. Zunächst darf man als Masszahlen der Entfernungen $\overline{P_i P_k}$ beliebige rationale Zahlen zulassen. Da die Anzahl der Punkte in jedem Falle endlich ist, lassen sich die Distanzen durch eine anschliessende Streckung stets ganzzahlig machen. Weiter möchten wir zeigen, dass man zu gewissen Punktkomplexen mit rationalen Entfernungen durch geeignete Spiegelungen unbeschränkt weitere Punkte so hinzunehmen kann, dass auch die in diesen Erweiterungen neu auftretenden Entfernungen rational werden. Dies führt uns auf die zusätzliche Forderung

---

[1]) E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, Nr. 3, 59 (1951).