

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

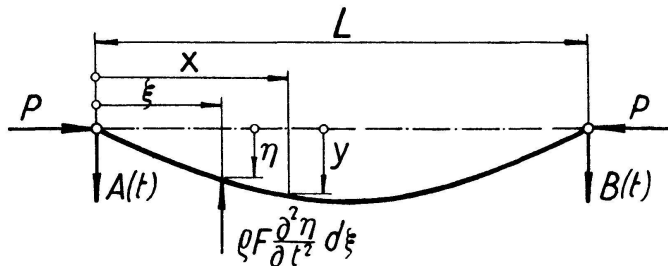
Darin bedeuten  $\nu = \frac{P}{P_e}$  und  $\omega_e = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{JE}{\rho F}}$

die kleinste Eigenkreisfrequenz des unbelasteten Stabes.

1. Fall: Wenn  $P < P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

$\omega = \omega_e \sqrt{1 - \nu}$  ist die Eigenkreisfrequenz des belasteten Stabes. Da die harmonischen Stabschwingungen infolge der unvermeidlichen Energiedissipation abklingen, bleibt schliesslich  $y = 0$ , die stabile Gleichgewichtslage des Stabes.



2. Fall: Wenn  $P = P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 t + c_2) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Je nach Anfangsbedingungen bleibt der Stab entweder in jeder ausgelenkten Lage im indifferenten Gleichgewicht, oder, wenn eine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, knickt er mit konstanter Geschwindigkeit aus. Die Analogie mit einer Kugel auf einer Ebene ist vollkommen.

3. Fall: Wenn  $P > P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sinh \alpha t + c_2 \cosh \alpha t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

mit  $\alpha = \omega_e \sqrt{\nu - 1}$ . Nach einer Störung wird der Stab seine Auslenkung beschleunigt vergrössern.

In allen drei Fällen lassen sich die Konstanten aus den Anfangsbedingungen (Störungsursache) berechnen. Wenn auch nur auf kleine Auslenkungen beschränkt, liegt dann der zeitliche Verlauf des Knickvorganges eindeutig fest.

GEORGES V. TORDION, Zürich,

## Aufgaben

**Aufgabe 118.** Man zeige, dass es für die kubische Parabel  $y = a x^3 - b x$ ,  $a > 0$ ,  $b > 2\sqrt{2}$ , zwei umschriebene und zwei einbeschriebene Quadrate gibt und dass die Flächenverhältnisse der beiden Quadratpaare gleich gross sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

*Lösung:* a) Wegen der Zentralsymmetrie der Kurve ist der Ursprung  $O$  Mittelpunkt der Quadrate. Der Kreis um  $O$  mit Radius  $r$  hat mit der kubischen Parabel drei Paare

von Schnittpunkten  $P_i(x_i|y_i)$ ,  $Q_i(-x_i|-y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), die sich aus der Gleichung

$$a^2 z^3 - 2 a b z^2 + (b^2 + 1) z - r^2 = 0, \quad z = x^2$$

ergeben. Irgend zwei Wurzeln, etwa  $z_1$  und  $z_2$ , geben ein eingeschriebenes Rechteck  $P_1P_2Q_1Q_2$ . Nach dem Satz von VIETA gilt

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{2b}{a} \quad \text{und} \quad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{b^2 + 1}{a^2}$$

oder nach Elimination von  $z_3$

$$a^2 z_1 z_2 + 2 a b (z_1 + z_2) - a^2 (z_1 + z_2)^2 = b^2 + 1. \quad (1)$$

Das Rechteck wird zum Quadrat, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = (a z_1 - b) (a z_2 - b) = -1$$

oder

$$a^2 z_1 z_2 - a b (z_1 + z_2) = - (b^2 + 1). \quad (2)$$

Im Fall des Quadrates gilt ferner  $x_2^2 = y_1^2$ , so dass  $z_1 + z_2 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$ . Eliminiert man  $z_1 z_2$  aus (1) und (2), so erhält man die Gleichung

$$a^2 r^4 - 3 a b r^2 + 2 (b^2 + 1) = 0$$

mit den Lösungen

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2a} (3b \pm \sqrt{b^2 - 8}).$$

Für das gesuchte Flächenverhältnis ergibt sich somit

$$F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2 = (3b + \sqrt{b^2 - 8}) : (3b - \sqrt{b^2 - 8}).$$

b) Wir suchen zuerst die drei Paare von gemeinsamen Tangenten des Kreises  $x^2 + y^2 = R^2$  mit der kubischen Parabel. Für die Schnittpunkte der beliebigen, den Kreis in  $P(x_0|y_0)$  berührenden Kreistangente  $x x_0 + y y_0 = R^2$  mit der Parabel findet man die kubische Gleichung

$$a y_0 x^3 + (x_0 - b y_0) x - R^2 = 0.$$

Die kubische Gleichung  $x^3 + p x + q = 0$  hat eine Doppelwurzel, wenn  $4 p^3 + 27 q^2 = 0$ . In unserem Falle muss also gelten

$$4 (x_0 - b y_0)^3 + 27 a y_0 R^4 = 0. \quad (3)$$

Ferner ist

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2 \quad (4)$$

Zur Vereinfachung dieses Gleichungssystems, das bei gegebenem  $R$  drei Paare paralleler Tangenten, also drei umschriebene Rhomben, liefern würde, benützen wir die orthogonale Transformation

$$x_0 - b y_0 = u \sqrt{b^2 + 1}, \quad b x_0 + y_0 = -v \sqrt{b^2 + 1}.$$

Setzen wir noch  $4 (b^2 + 1)^2 / 27 a = c$ , so geht (3) bzw. (4) über in

$$v = \frac{c u^3}{R^4} - b u, \quad (5)$$

$$u^2 + v^2 = R^2. \quad (6)$$

Zusammen mit der Bedingung  $v_1 v_2 / u_1 u_2 = -1$  für Normalstellung zweier Rhomben-

seiten bzw. der zugehörigen Berührungsradien ergeben (5) und (6) wieder den unter a behandelten Fall, das heisst den der ursprünglichen Parabel umschriebenen Quadraten entsprechen die der Parabel (5) einbeschriebenen Quadrate. Für den Radius erhält man also

$$R^2 = \frac{R^4}{2c} (3b \pm \sqrt{b^2 - 8}) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_{1,2}^2} = \frac{1}{2c} (3b \pm \sqrt{b^2 - 8}).$$

Für das Flächenverhältnis  $F_1^* : F_2^* = R_1^2 : R_2^2$  erhält man also bei passender Nummerierung denselben Wert wie vorhin.

F. STEIGER, Bern.

Herr R. LAUFFER (Graz) weist darauf hin, dass die umschriebenen Quadrate aus den einbeschriebenen durch eine Ähnlichkeitstransformation und nachfolgende Polarisierung am Einheitskreis hervorgehen.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg).

**Aufgabe 119.** Bezeichnet  $s$  den halben Umfang eines Dreiecks,  $S$  die Summe der Tangenten der halben Dreieckswinkel und  $P$  das Produkt dieser Tangenten, so lässt sich folgende Gleichung vierten Grades aufstellen:

$$x^4 - s(P + S)x^3 + s^2(1 + PS)x^2 - 2s^3Px + s^4P^2 = 0.$$

Was ist die geometrische Bedeutung der vier Lösungen dieser Gleichung?

R. LAEMMEL, Zürich.

*Lösung:* Aus dem Halbwinkelsatz ergibt sich sofort die Relation

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho^2(s-c) + \varrho^2(s-b) + \varrho^2(s-a)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\varrho^2 s^2}{F^2} = 1.$$

Für den Inkreis bzw. die Ankreise gilt

$$\varrho = sP, \quad \varrho_a = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \varrho_b = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad \varrho_c = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & x^4 - s(P + S)x^3 + s^2(1 + PS)x^2 - 2s^3Px + s^4P^2 \\ &= (x - sP)(x^3 - sSx^2 + s^2x - s^3P) \\ &= (x - \varrho)(x - \varrho_a)(x - \varrho_b)(x - \varrho_c) = 0. \end{aligned}$$

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), H. FÄHNDRICH (Bern), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), A. MOÓR (Debrecen), F. THOMISSEN (Heerlen, Holland), G. TROMP (Sittard, Holland), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 120.** Bezeichne  $\mathfrak{G}$  eine endliche  $p$ -Gruppe mit den erzeugenden Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , so dass  $a_2, \dots, a_k$   $\mathfrak{G}$  nicht erzeugen. Dann wird  $\mathfrak{G}$  auch von  $a_1^p, a_2, \dots, a_k$  nicht erzeugt.

L. RÉDEI, Szeged (Ungarn).

*Lösung:*  $a_1^p$  gehört der  $\Phi$ -Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  an, welche als Durchschnitt aller maximalen Untergruppen (oder der Untergruppen vom Index  $p$ ) erklärt ist (vgl. H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, S. 44).  $\Phi$  besteht andererseits aus genau den Elementen, die aus jedem Erzeugendensystem gestrichen werden dürfen. Würden also die Elemente  $a_1^p, a_2, \dots, a_k$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  erzeugen, so müssten schon  $a_2, \dots, a_k$  dasselbe leisten im Widerspruch zur Voraussetzung.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

**Aufgabe 121.** Sind  $m$  und  $n$  teilerfremde natürliche Zahlen  $> 1$ , dann liegt in jedem Intervall  $(1, 2), (2, 3), \dots, (m+n-2, m+n-1)$  genau je eine der Zahlen  $j(m+n)/n, k(m+n)/m$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, m-1$ ). R. LAUFFER, Graz.

*Lösung:* Die  $m+n-2$  betrachteten Zahlen müssen sich auf die  $m+n-2$  Intervalle verteilen, da alle Zahlen zwischen 1 und  $m+n-1$  liegen. Man muss deshalb nur zeigen, dass in keinem Intervall  $(N, N+1)$  zwei der Zahlen liegen. In diesem Fall wären die Ungleichungen

$$N < \frac{x(m+n)}{n} < N+1, \quad N < \frac{y(m+n)}{m} < N+1$$

gleichzeitig in ganzen Zahlen  $x, y$  lösbar. Aus

$$x = \frac{n(N+\vartheta)}{m+n}, \quad y = \frac{m(N+\vartheta')}{m+n}, \quad (0 < \vartheta < 1, \quad 0 < \vartheta' < 1)$$

würde aber folgen, dass die ganze Zahl

$$x+y = N + \frac{\vartheta n + \vartheta' m}{m+n} < N+1$$

zwischen  $N$  und  $N+1$  liegt, was für ganzes  $N$  unmöglich ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), B. MARZETTA (Basel), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard).

**Aufgabe 122.** Man beweise, dass die Zahl  $5^{2n+1} 2^{n+2} + 3^{n+2} 2^{2n+1}$  für  $n \geq 0$  stets durch 19 teilbar ist. I. BEREND.

*Lösung:* Wegen  $5^2 \equiv 6 \pmod{19}$  hat man

$$5^{2n+1} 2^{n+2} + 3^{n+2} 2^{2n+1} = 2^{n+1} (10 \cdot 5^{2n} + 2^n \cdot 3^{n+2}) \equiv 2^{n+1} \cdot 6^n (10+9) \equiv 0 \pmod{19}.$$

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BINZ (Paris), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), B. MARZETTA (Basel), T. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard), W. SCHWAB (Kerzers), W. ZULLIGER (Küsnacht).

**Aufgabe 123.** Im Innern eines Kreises ist ein fester Punkt  $P$  gegeben. Durch  $P$  sollen zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen so gelegt werden, dass die Summe ihrer Längen möglichst gross ist. P. TURÁN.

*Lösung:* Sind  $AB$  und  $CD$  die zwei sich in  $P$  senkrecht schneidenden Kreissehnen,  $O$  der Mittelpunkt und  $r$  der Radius des Kreises,  $M$  und  $N$  die Fusspunkte der Lote von  $O$  auf  $AB$  bzw.  $CD$ , so gilt

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{AM}^2 + \overline{DN}^2) = 4(2r^2 - \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2) = 8r^2 - 4\overline{OP}^2.$$

$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$  hat also für alle aufeinander senkrecht stehenden Sehnen durch  $P$  einen konstanten Wert  $K$ . Wegen  $(\overline{AB} + \overline{CD})^2 = 2K - (\overline{AB} - \overline{CD})^2$  hat  $\overline{AB} + \overline{CD}$  seinen maximalen Wert für  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , das heisst jede der Sehnen bildet mit  $OP$  den Winkel  $45^\circ$ .

F. GOLDNER, London.

Der minimale Wert von  $\overline{AB} + \overline{CD}$  wird angenommen, wenn der Unterschied der Sehnen möglichst gross ist, also wenn die eine Sehne Durchmesser ist (Grenzminimum).

Weitere Lösungen (meist mit Differentialrechnung) sandten A. BAGER (Hjørring), J. BINZ (Paris), H. HOFSTETTER (Oberwangen), L. KIEFFER (Luxemburg), R. KLÖTZLER (Leipzig), R. LAUFFER (Graz), E. PLÜSS (Murgenthal), T. REICH (Glarus), A. SCHWARZ (Seuzach), R. SPRANCK (Luxemburg), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard), A. UNTERBERGER (Bludenz).

### Neue Aufgaben

155. Man beweise: Sind von einer Parabel zwei Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  mit dem Schnittpunkt  $T$  und mit den Berührungspunkten  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, so ist der Brennpunkt der Schnittpunkt des Kreises durch  $P_1$ , der  $t_2$  in  $T$  berührt, mit dem Kreis durch  $P_2$ , der  $t_1$  in  $T$  berührt. F. HOHENBERG, Graz.
156. Eine Gummischnur wird um ein Ende mit der Winkelgeschwindigkeit  $w$  gedreht und durch die Fliehkräfte gedehnt. Wie gross ist die Länge  $L$  der gedehnten Schnur, wenn die ungedehnte Schnur die Länge  $L_0$  hat, die Masse pro Längeneinheit in ungedehntem Zustand  $m_0$  ist und die Dehnung (Verlängerung pro Längeneinheit) infolge der Zugkraft  $P$  gleich  $e P$  ist (Hookesches Gesetz bei Vernachlässigung der Querdehnung)? R. LAUFFER, Graz.
157. Zeige, dass für willkürliche positive ganze Zahlen  $m$  und  $n$  gilt

$$\prod_k \left\{ 1 - \left[ \frac{(2n+1)m}{k} \right]^2 \right\} = 1,$$

wo  $k$  alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Vielfachen von  $2n+1$  durchläuft. B. VAN DER POL, Genf.

158. Beweise für ein ganzes  $m \geq 0$

$$\frac{1^{4m+1}}{e^\pi + 1} + \frac{3^{4m+1}}{e^{3\pi} + 1} + \frac{5^{4m+1}}{e^{5\pi} + 1} + \dots = \frac{2^{4m+1} - 1}{4(2m+1)} B_{2m+1},$$

wo  $B_1 = 1/6$ ,  $B_2 = 1/30$ ,  $B_3 = 1/42$ , ... die Bernoullischen Zahlen sind. E. TROST, Zürich.

### Literaturüberschau

S. C. VAN VEEN:

*Passermeetikunde*

184 Seiten, Verlag J. Noorduijn en Zoon, Gorinchem 1951

Die Probleme der Zirkelgeometrie sind immer von neuem anziehend und lehrreich. Das vorliegende Büchlein gibt in den ersten Kapiteln einen leicht lesbaren und kurzgefassten Überblick über die Konstruktionen in der Ebene, wobei sich der Verfasser meist an die Mascheronischen Lösungen hält und auch eine ganze Reihe von Näherungskonstruktionen anführt, wie zum Beispiel die einfache und überraschend genaue Bestimmung der Länge des Viertelskreisbogens von MASCHERONI. Die klaren und ruhig wirkenden Figuren seien besonders erwähnt, da sie in diesem Gebiete der Geometrie durchaus keine Selbstverständlichkeit sind. Ein weiteres Kapitel befasst sich mit Konstruktionen auf der Oberfläche der Kugel, wo die Zirkelgeometrie besonders wichtig wird, da der Gebrauch des Lineals überhaupt ausgeschlossen ist. Hier erhebt sich aber eine bemerkenswerte Schwierigkeit. Es ist sehr wahrscheinlich unmöglich, auf einer gegebenen Kugel von unbekanntem Radius mit dem Zirkel allein und ohne Zuhilfenahme einer Ebene einen Grosskreis zu konstruieren; ein Beweis dieser Unmöglichkeit ist aber meines Wissens bisher nicht bekannt und wird auch in der vorliegenden Schrift nicht gegeben. Hingegen finden sich in einem Anhang die Unmöglichkeitsbeweise für die Lösung bekannter klassischer Probleme sowie die Theorie des regulären Siebzehneckes. Eine Biographie MASCHERONIS bildet den Schluss. Das Büchlein könnte auch einem reiferen Mittelschüler viele Anregung bieten, sofern er willens wäre, sich etwas in die holländische Sprache hineinzulesen. W. LÜSSY.