

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Reihe der elementaren algebraischen Mittelwerte zu ersehen ist. Im Intervall $0 < x < \pi/2$ gilt für

$$\begin{aligned}
 0 < x \leq x_{TC}: & \quad H < Ct < G < S < A < T < C < Q, \\
 x_{TC} \leq x \leq x_{TQ}: & \quad H < Ct < G < S < A < C < T < Q, \\
 x_{TQ} \leq x \leq x_{GS}: & \quad H < Ct < G < S < A < C < Q < T, \\
 x_{GS} \leq x \leq x_{CtS}: & \quad H < Ct < S < G < A < C < Q < T, \\
 x_{CtS} \leq x \leq x_{HS}: & \quad H < S < Ct < G < A < C < Q < T, \\
 x_{HS} \leq x \leq x_{CtG}: & \quad S < H < Ct < G < A < C < Q < T, \\
 x_{CtG} \leq x < \pi/2: & \quad S < H < G < Ct < A < C < Q < T,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 x_{TC} &= 35^\circ 15' 51,8'' = 0,6154797, & x_{CtS} &= 54^\circ 44' 8,2'' = 0,9553166, \\
 x_{TQ} &= 37^\circ 25' 46,8'' = 0,6532709, & x_{HS} &= 61^\circ 43' 1,2'' = 1,0768740, \\
 x_{GS} &= 49^\circ 17' 36,5'' = 0,8603334, & x_{CtG} &= 66^\circ 46' 54,3'' = 1,1655614.
 \end{aligned}$$

H = harmonisches Mittel, G = geometrisches Mittel,
 A = arithmetisches Mittel, Q = quadratisches Mittel,
 S = Sinusmittel, C = Kosinusmittel,
 Ct = Kotangensmittel, T = Tangensmittel.

H. JECKLIN, Zürich.

Kleine Mitteilungen

Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Grössen und ihre Anwendung

1. Darstellung der Dimensionen in einem Vektorraum

Wir setzen als gegeben voraus, dass sich jede physikalische Grösse A in der folgenden Weise durch ihre Dimensionen charakterisieren lässt¹⁾

$$[A] = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n}, \quad (1)$$

wo die A_i die Grunddimensionen und die Exponenten a_i ganze oder rationale Zahlen sind. Gewöhnlich ist $n = 3$ oder $n = 4$. Die Dimension lässt sich dann isomorph auf ein geordnetes Zahlen- n -tupel abbilden, vermöge der Zuordnung

$$A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n} \longleftrightarrow [a_1, a_2, \dots, a_n] = \mathbf{a}. \quad (2)$$

Es ist nun naheliegend, die a_i als Koordinaten eines Vektors $\mathbf{a}$ in einem affinen Vektorraum V_n aufzufassen²⁾. Für diese Vektoren lassen sich nämlich die üblichen Rechenregeln definieren.

¹⁾ E. BODEA, *Giorgis rationales MKS-Maßsystem mit Dimensionskohärenz* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 26.

²⁾ H. WÜGER benutzte ein kartesisches Koordinatensystem, was aber nicht nötig ist. Vgl. H. WÜGER, *Graphische Darstellung von Maßsystemen*, Bull. Schweiz. elektrotechn. Verein 22, 637–640 (1931).

Die *qualitative Verknüpfung*¹⁾ der Grössen und damit auch ihrer Dimensionen zeigt, dass sie in bezug auf diese Operation eine abelsche Gruppe bilden. Diese Gruppe ist das direkte Produkt von n unendlichen Gruppen, die der Gruppe der rationalen Zahlen mit der Addition als Zusammensetzungsvorschrift isomorph sind. Dies führt wegen (2) zur *Addition* der Vektoren

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]. \quad (3)$$

Ebenso ist die *Multiplikation* eines Vektors mit einer rationalen Zahl λ erklärt:

$$\lambda \mathbf{a} = [\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n]. \quad (4)$$

Auf Grund der Eigenschaften der qualitativen Verknüpfung erkennt man, dass die *Addition kommutativ* und *assoziativ* und die *Multiplikation* mit einer Zahl *assoziativ* ist: $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$. Ebenso gelten für die Multiplikation zwei *Distributivgesetze*

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \\ (\lambda + \mu) \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wie sofort zu beweisen ist. Damit sind aber alle Eigenschaften eines Vektorraumes erfüllt²⁾, und es folgt:

Die Dimensionen der physikalischen Grössen bilden einen n -dimensionalen affinen Vektorraum V_n über dem Körper der rationalen Zahlen.

2. Übergang auf neue Grunddimensionen

Der obige Sachverhalt lässt sich dazu ausnützen, den Übergang von einem Dimensionssystem – das Entsprechende gilt für die Einheitensysteme, wenn die Regel der Dimensionskohärenz³⁾ beachtet wird – zu einem neuen sehr bequem durchzuführen.

Es sei zunächst ein bestimmtes Dimensionssystem gegeben. Die Dimension jeder Grösse wird durch einen Vektor dargestellt:

$$\mathbf{a} = \sum_1^n a_i \mathbf{n}_i = a_i \mathbf{n}_i, \quad (6)$$

wo die $\mathbf{n}_i$ die Basisvektoren des V_n sind. Vermöge der nichtsingulären Transformation $T = (t_{ik})$ gehen wir zu einem neuen Koordinatensystem über

$$\bar{\mathbf{n}}_i = t_{ik} \mathbf{n}_k. \quad (7)$$

Die $\bar{\mathbf{n}}_i$ sind dann wieder n linear unabhängige Vektoren des V_n . Der Vektor $\mathbf{a}$ habe im neuen System die Koordinaten $\bar{a}_i$; dann gilt

$$\mathbf{a} = \bar{a}_i \bar{\mathbf{n}}_i, \quad (8)$$

und es folgt leicht aus (6) bis (8)

$$\bar{a}_i = u_{ik} a_k. \quad (9)$$

Hier ist

$$U' = T^{-1} \quad \text{oder} \quad U' T = E, \quad (10)$$

wenn U' die zu U transponierte Matrix und T^{-1} die zu T inverse Matrix bedeutet. Bei einer Änderung des Dimensionssystems gilt demnach für die Dimension der Grössen eine Transformation von der Form

$$\boxed{\bar{\mathbf{a}}' = U' \mathbf{a}'} \quad (11)$$

¹⁾ M. LANDOLT, *Grösse, Masszahl und Einheit* (Rascher, Zürich 1943), Seite 61–65.

²⁾ Vgl. zum Beispiel B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, 1. Teil, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1937), Seite 46.

³⁾ E. BODEA, l. c., Seite 48.

So lautet die zu T kontragrediente Matrix U für den Übergang von einem MLT -System (Masse, Länge, Zeit) n_1, n_2, n_3 zu einem KLT -System (Kraft, Länge, Zeit) $\bar{n}_1 = [1, 1, -2]$, $\bar{n}_2 = [0, 1, 0]$, $\bar{n}_3 = [0, 0, 1]$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man leicht nachprüft. Zur praktischen Bestimmung der Matrix U beachte man, dass in den Kolonnen die Koordinaten der alten Basisvektoren, ausgedrückt im neuen Koordinatensystem, stehen.

Es sei hier noch eine Bemerkung zum $LTQ\Phi$ -System (Länge, Zeit, Elektrizitätsmenge, magnetischer Fluss) von KALANTAROFF¹⁾ gemacht. Die rein elektrischen, magnetischen bzw. mechanischen Grössen werden durch Vektoren mit den Koordinaten $[a_1, a_2, 1, 0]$, $[a_1, a_2, 0, 1]$ bzw. $[a_1, a_2, 1, 1]$ dargestellt, wo die a_i für die üblichen Grössen ganze Zahlen sind. Diese drei Teilgebiete der Physik besitzen demnach Dimensionen, die je in einen dreidimensionalen Teilraum des Vektorraumes V_4 abgebildet werden. Wir können sagen, dass die elektrischen und magnetischen Grössen symmetrisch in bezug auf die mechanischen Grössen liegen²⁾.

3. Maßstabänderungen

In den obigen Betrachtungen wurden nur die Dimensionen der Grössen und ihr Aufbau aus den Grunddimensionen berücksichtigt. Bei den praktisch verwendeten Einheitensystemen treten aber neben den angegebenen Transformationen häufig noch unbequeme Umrechnungsfaktoren hinzu. Wir können uns darauf beschränken, eine *Maßstabänderung* innerhalb eines Einheitensystems zu betrachten. Die gewählten Grundeinheiten sollen durch neue, gleichartige Einheiten ersetzt werden gemäss der Formel:

$$\{A_i\} = \alpha_i \{A'_i\}. \quad (12)$$

Die Einheiten werden durch eine geschweifte Klammer gekennzeichnet, um sie von den zugehörigen Dimensionen zu unterscheiden. Damit lautet die Einheit einer beliebigen Grösse A

$$\{A\} = \{A_1^{a_1} \dots A_n^{a_n}\} = \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_n^{a_n} \{A_1'^{a_1} \dots A_n'^{a_n}\} \quad (13)$$

oder

$$\{a_1, \dots, a_n\} = \prod_{v=1}^n \alpha_v^{a_v} \{a_1, \dots, a_n\}', \quad (13')$$

wenn für die Einheit eine analoge Darstellung wie für die Dimension verwendet wird. Es ist aber zu beachten, dass die Eigenschaften (3) bis (5) für die Symbole $\{\dots\}$ nicht gelten; $\prod_{v=1}^n \alpha_v^{a_v}$ ist der Umrechnungsfaktor. Die Einheiten selber bilden also keinen Vektorraum!

Abschliessend können wir folgendes feststellen. Die Festlegung eines Dimensionensystems zum Aufbau eines Einheitensystems kommt darauf hinaus, im affinen Raume der Dimensionen ein Koordinatensystem auszuwählen. Damit ergibt sich gleichzeitig ein Überblick über die Mannigfaltigkeit der möglichen Systeme.

E. ROTH-DESMEULES, Luzern.

¹⁾ P. KALANTAROFF, *Les équations aux dimensions des grandeurs électriques et magnétiques*, Rev. gén. Electr. 25, 235 (1929).

²⁾ Vgl. dazu E. BODEA, l. c., Tabelle VI, Seite 127.

Grössengleichungen und die Einheit «Mol»¹⁾

In der Physik ist es heute üblich, die Definitionen und Gesetze unabhängig von den Einheiten in Form von Grössengleichungen darzustellen. Wenn dies in der physikalischen Chemie bisher nicht gelang, so liegt das zur Hauptsache daran, dass man sich zu wenig Klarheit verschafft hat über die Art oder Dimension der herkömmlicherweise in Mol (Grammol, Grammolekül) ausgedrückten Grössen.

Der oft vertretenen Ansicht, das Mol sei eine Masseinheit²⁾, können wir uns nicht anschliessen. In Angaben wie «3 Mol Chlor» oder «3 Mol Wasserstoff» usf. steht doch offenbar 3 als Masszahl, Mol als Einheit einer Grösse, in welcher diese gasförmigen Körper übereinstimmen. Das einzige übereinstimmende quantitative Merkmal dieser Gaskörper ist aber die *Anzahl* der freien Gasteilchen, der Moleküle. Die Einheit 1 Mol muss also – ähnlich wie 1 Paar, 1 Dutzend, 1 Gros – ein Zählmass sein, das allerdings seinem Namen nach zunächst noch die Einschränkung in sich schliesst, dass die gezählten Dinge Moleküle sind.

Man kann sich aber von dieser Einschränkung frei machen und das Mol auch als Zählmass für Atome und Ionen verwenden (an Stelle von Grammatom und Grammion), wenn man die Art der Teilchen ausserhalb der Zähleinheit angibt; zum Beispiel:

1 Mol Cl₂ oder 1 Mol Chlormoleküle wiegt 71 g;
 1 Mol Cl oder 1 Mol Chloratome wiegt 35,5 g;
 1 Mol Cl⁻ oder 1 Mol Chlorionen wiegt 35,5 g
 und trägt die Ladung 96 500 Coulomb.

Für das im angedeuteten Sinn verallgemeinerte Mol soll folgende Definition gelten:

1 Mol ist eine dimensionslose Zähleinheit, grösser als die natürliche Zähleinheit 1 Stück. Die Zähleinheit 1 Mol ist festgelegt durch die Anzahl der Moleküle in 32 g Sauerstoffgas. Nachdem diese Anzahl indirekt zu $6,02 \cdot 10^{23}$ Stück bestimmt wurde, kann man die Umrechnungsgleichung angeben:

$$1 \text{ Mol} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ Stück}^3).$$

Es werden auch dekadische Vielfache dieses Zählmasses als neue Zähleinheiten verwendet, zum Beispiel

$$1 \text{ kMol} = 10^3 \text{ Mol} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ Stück}.$$

Dass sich die so festgelegten Einheiten auch bei Elektronen, Lichtquanten usf. als Zählmasse eignen, liegt auf der Hand.

Wird eine Anzahl nicht in der natürlichen Einheit Stück angegeben, so muss die verwendete Zähleinheit, zum Beispiel Mol oder Kilomol, unbedingt genannt werden; bei Angaben in der natürlichen Einheit kann die Bezeichnung Stück unterbleiben. Die folgenden abgeleiteten Grössen geben Anwendungsbeispiele für diese Regeln.

Dividiert man die Masse m eines Körpers, sein Volumen v , seine Wärmekapazität k oder eine andere geeignete Quantitätsgrösse durch die Anzahl z , seiner Atome bzw. Moleküle, so erhält man neue Grössen gleicher Dimension, aber anderer Bedeutung; sie sollen atomare bzw. molekulare Grössen heissen. Man wird in diesen Grössen die bisher ausschliesslich auf die Einheit Grammatom bzw. Grammol bezogenen Begriffe Atommasse, Atomvolumen, Atomwärme bzw. Molmasse, Molvolumen, Molwärme usf. erkennen. Die zugehörigen Definitionsgleichungen sind aber von den Einheiten unabhängig; die darin auftretende *Anzahl z ist eine in der physikalischen Chemie unent-*

¹⁾ Dieses Thema wurde anlässlich des letzten Fortbildungskurses des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer (El. Math. 8, 20 [1953]) in einer Aussprache über Probleme des Physikunterrichts behandelt.

²⁾ Zum Beispiel R. W. POHL, *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, 10. und 11. Auflage (Springer, Berlin 1947), oder W. H. WESTPHAL, *Physikalisches Wörterbuch* (Springer, Berlin 1952).

³⁾ Die Umrechnungszahl $6,02 \cdot 10^{23}$ (Loschmidtsche oder Avogadrosche Zahl) darf in Grössengleichungen natürlich kein besonderes Symbol erhalten.

behrliche Grundgrösse¹⁾, die in jeder der oben angeführten Zählseinheiten ausgedrückt werden kann:

1. Beispiel: Für die atomaren bzw. molekularen Massen $M = m/z$ der Elemente erhält man

$$\text{O}_2: \quad M = 32,000 \frac{\text{g}}{\text{Mol}} = 32,000 \frac{\text{kg}}{\text{kMol}} = 5,36 \cdot 10^{-26} \text{ kg};$$

$$\text{O}: \quad M = 16,000 \frac{\text{g}}{\text{Mol}} = 16,000 \frac{\text{kg}}{\text{kMol}} = 2,68 \cdot 10^{-26} \text{ kg};$$

$$\text{H}: \quad M = 1,008 \frac{\text{g}}{\text{Mol}} = 1,008 \frac{\text{kg}}{\text{kMol}} = 0,167 \cdot 10^{-26} \text{ kg};$$

$$\text{He}: \quad M = 4,003 \frac{\text{g}}{\text{Mol}} = 4,003 \frac{\text{kg}}{\text{kMol}} = 0,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Die üblichen Atomgewichtstabellen enthalten die zu den Einheiten g/Mol oder kg/kMol gehörenden Masszahlen der atomaren Massen. Dem Ausdruck Atomgewicht bzw. Molekulargewicht würden die benannten Zahlen besser entsprechen.

2. Beispiel: Das molekulare Volumen (abgekürzt Molvolumen) $V = v/z$ beträgt für ideale Gase im Normalzustand (Druck $p = 1 \text{ Atm}$; Temperatur $T = 273^\circ \text{ K}$)

$$V = \frac{v}{z} = 22,4 \frac{\text{l}}{\text{Mol}} = 22,4 \frac{\text{m}^3}{\text{kMol}} = 3,73 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^3.$$

Das Molvolumen lässt sich folgendermassen aus der molekularen Masse M und der Dichte d der Substanz berechnen:

$$V = \frac{v}{z} = \frac{v}{m} \cdot \frac{m}{z} = \frac{M}{d}.$$

3. Beispiel: Die atomare Wärmekapazität (kurz Atomwärme) $C = k/z$ misst für Metalle bei hohen Temperaturen ungefähr:

$$C = 6 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K Mol}} = 6 \frac{\text{kcal}}{^\circ\text{K kMol}} = 10^{-23} \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K}} = 4,2 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{^\circ\text{K}}.$$

Für zweiatomige Gase misst die molekulare Wärmekapazität (kurz Molwärme) bei konstantem Druck etwa

$$C_p = 7 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K Mol}} = 7 \frac{\text{kcal}}{^\circ\text{K kMol}} = 1,16 \cdot 10^{-23} \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K}} = 4,9 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{^\circ\text{K}}.$$

Die Atom- bzw. Molwärme C einer Substanz hängt eng mit deren spezifischer Wärme $c = k/m$ zusammen, hat aber nicht dieselbe Dimension.

Zusammenhang:
$$C = \frac{k}{z} = \frac{k}{m} \cdot \frac{m}{z} = c M.$$

4. Beispiel: Zu jeder abgeschlossenen Menge eines idealen Gases gehört eine individuelle Gaskonstante $r = p v/T$. Die entsprechende molekulare Gaskonstante

$$R = \frac{r}{z} = \frac{p v}{T z} = \frac{p V}{T} = \frac{p}{T d} M = \frac{p v}{T m} M$$

¹⁾ Wir halten es nicht für zweckmässig, diese Grundgrösse mit dem vieldeutigen Ausdruck «Stoffmenge» zu belasten. Vgl. Note 2 auf Seite 63.

ist unabhängig von der Menge und der Art des Gases:

$$R = 0,082 \frac{\text{Atm l}}{^\circ\text{K Mol}} = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{^\circ\text{K Mol}} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{^\circ\text{K kMol}}$$

$$= 1,98 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{K Mol}} = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{^\circ\text{K}}.$$

Man erkennt, dass die sogenannte universelle Gaskonstante und die Boltzmannsche Konstante übereinstimmen; in Grössengleichungen sollten sie durch dasselbe Symbol bezeichnet werden.

5. Beispiel: Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Faradayschen Konstanten und der Elementarladung: Durch z gleichartige Ionen werde insgesamt die Ladung q und die Masse m durch einen Leitungsquerschnitt getragen. q/m misst dann die spezifische Ladung, während

$$Q = \frac{q}{z} = \frac{q}{m} \cdot \frac{m}{z} = \frac{q}{m} M$$

die atomare bzw. molekulare Ladung misst. Diese ist immer ein kleines ganzzahliges Vielfaches von

$$Q_0 = 9,65 \cdot 10^4 \frac{\text{C}}{\text{Mol}} = 9,65 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kMol}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}.$$

Wir hoffen, durch diese Betrachtungen die Einführung von Grössengleichungen im Gebiet der physikalischen Chemie zu fördern.

W. BANTLE, Winterthur, J. HABLÜTZEL, Zürich.

Ein Satz der elementaren Geometrie¹⁾

Die Strecken a, b, c sind bekanntlich dann und nur dann Seiten eines Dreieckes der elementaren Geometrie, wenn

$$16 f^2 = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

(Heronsche Gleichung) positiv ist. Ist $16 f^2 = 0$, dann sind a, b, c nicht Seiten eines Dreieckes, sondern Abstände dreier Punkte einer Geraden. Ist $16 f^2$ negativ ($a = 3, b = c = 1$ gibt $16 f^2 = -45$), dann sind a, b, c Seiten eines imaginären Dreieckes

$$\left[a = 3, \quad b = c = 1 \quad \text{gibt} \quad A\left(\frac{3}{2}, \frac{i}{2}\sqrt{5}\right), \quad B(0, 0), \quad C(3, 0) \right].$$

Sind A, B, C die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes und ist D ein Punkt des Umkreises dieses Dreieckes, dann ist wegen des Satzes von PTOLÉMÄUS $16 f^2 = 0$. Für alle anderen Punkte D der Ebene ist $16 f^2 \neq 0$. – Für den Mittelpunkt des Umkreises ist $16 f^2 = 3 r^4$ (r ist der Radius des Umkreises). Für eine Ecke des Tangentendreieckes hat man

$$a^2 = 9 r^2, \quad b^2 = c^2 = 3 r^2 \quad \text{und} \quad 16 f^2 = 54 r^4 > 0.$$

Das heisst $16 f^2$ ist für keinen Punkt der Ebene negativ. Es gilt daher der Satz: Liegt der Punkt D nicht auf dem Umkreis des gleichseitigen Dreieckes ABC , dann lässt sich aus den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ ein Dreieck konstruieren. Liegt D auf dem Umkreis, dann sind diese Abstände nicht Seiten eines Dreieckes, sondern lediglich Abstände von drei Punkten einer Geraden.

R. LAUFFER, Graz.

Anmerkung der Redaktion: Vor Eingang dieser Note sandte uns Herr J.-P. SYDLER ein Manuskript, in dem der oben behandelte Satz von POMPEIU für den R_n ausgesprochen und bewiesen wird. Diese Abhandlung wird in einem der nächsten Hefte erscheinen.

¹⁾ Siehe S. V. PAVLOVIĆ, *Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeiu*, El. Math. 8, 13 (1953), und J.-P. SYDLER, *Autre démonstration du théorème de Pompeiu*, El. Math. 8, 15 (1953).

A propos du pentagone¹⁾

Remarquons d'abord que l'on peut former $C_5^3 = 10$ quadrilatères inscrits différents ayant pour sommet commun le point M et pour autres sommets certains sommets du pentagone $ABCDE$. A chacun d'eux on peut appliquer le théorème de PTOLÉMÉE et l'on obtient:

<i>Polygone</i>	<i>Relation due au théorème de Ptolémée</i>	
$MABC$	$\overline{MB} y = \overline{MA} x + \overline{MC} x,$	(1)
$MABD$	$\overline{MB} y = \overline{MA} y + \overline{MD} x,$	(2)
$MABE$	$\overline{MB} x = \overline{MA} y + \overline{ME} x,$	(3)
$MACD$	$\overline{MC} y = \overline{MA} x + \overline{MD} y,$	(4)
$MACE$	$\overline{MC} x = \overline{MA} y + \overline{ME} y,$	(5)
$MADE$	$\overline{MD} x = \overline{MA} x + \overline{ME} y,$	(6)
$MBCD$	$\overline{MC} y = \overline{MB} x + \overline{MD} x,$	(7)
$MBCE$	$\overline{MC} y = \overline{MB} y + \overline{ME} x,$	(8)
$MBDE$	$\overline{MD} y = \overline{MB} x + \overline{ME} y,$	(9)
$MCDE$	$\overline{MD} y = \overline{MC} x + \overline{ME} x.$	(10)

Après avoir éliminé x et y entre les relations

$$(1) \text{ et } (9) \text{ on a } \overline{MB}^2 = (\overline{MA} + \overline{MC}) (\overline{MD} - \overline{ME}), \quad (11)$$

$$(2) \text{ et } (10) \text{ on a } \overline{MD}^2 = (\overline{MB} - \overline{MA}) (\overline{MC} + \overline{ME}), \quad (12)$$

$$(3) \text{ et } (4) \text{ on a } \overline{MA}^2 = (\overline{MB} - \overline{ME}) (\overline{MC} - \overline{MD}), \quad (13)$$

$$(5) \text{ et } (7) \text{ on a } \overline{MC}^2 = (\overline{MB} + \overline{MD}) (\overline{MA} + \overline{ME}), \quad (14)$$

$$(6) \text{ et } (8) \text{ on a } \overline{ME}^2 = (\overline{MD} - \overline{MA}) (\overline{MC} - \overline{MB}). \quad (15)$$

Corollaire. M est au milieu de $\overline{AE}$. Les formules

$$(11) \text{ et } (12) \text{ donnent } (c_{10/\text{étailé}})^2 = (c_{10/\text{convexe}} + 2r) (c_{10/\text{étailé}} - c_{10/\text{convexe}}), \quad (16)$$

$$(13) \text{ et } (15) \quad (c_{10/\text{convexe}})^2 = (2r - c_{10/\text{étailé}}) (c_{10/\text{étailé}} - c_{10/\text{convexe}}), \quad (17)$$

$$\text{et la formule (14) devient } r^2 = c_{10/\text{convexe}} c_{10/\text{étailé}}. \quad (18)$$

Après avoir divisé membre à membre les formules (16) et (17), on obtient:

$$\boxed{\left(\frac{c_{10/\text{convexe}}}{c_{10/\text{étailé}}} \right)^2 = \frac{2r - c_{10/\text{étailé}}}{2r + c_{10/\text{convexe}}}}. \quad (19)$$

Remarque: Il y a d'autres possibilités d'éliminer x et y entre les relations (1) à (10); mais nous n'avons tenu compte que de celles qui donnent des relations se présentant sous forme de moyenne géométrique.

G. BILGER, Genève.

Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung

Schon aus den Mitteilungen von M. ALTWEGG²⁾ und von A. MÜLLER³⁾ über besondere Punktmengen der Ebene geht hervor, dass ein solches Maximum nicht existiert. Die folgende Konstruktion zeigt für einen Raum beliebiger Dimensionszahl k , wie man zu

¹⁾ Les notations et la méthode sont les mêmes que celle de ma note *A propos du pentagone*, El. Math. 4, 65 (1949). A, B, C, D, E sont les sommets d'un pentagone régulier et M un point quelconque de l'arc AE du cercle circonscrit.

²⁾ El. Math. 7, Nr. 3, 56 (1952).

³⁾ El. Math. 8, Nr. 2, 37 (1953).

jeder natürlichen Zahl $N > k$ ein System von mindestens N Punkten mit lauter ganzzahligen Entfernungen finden kann, die nicht alle demselben linearen Unterraum von $k - 1$ Dimensionen angehören.

Folgende Konstruktion beweist, dass für keine Dimensionszahl k ein solches Maximum existiert, sondern dass man zu jeder natürlichen Zahl $N > k$ auf mindestens eine Art N Punkte mit ganzzahligen Entfernungen angeben kann, die nicht alle demselben linearen Unterraum von $k - 1$ Dimensionen angehören.

I. Im Falle der Ebene ($k = 2$) verwenden wir pythagoreische Dreiecke, deren Katheten OA_i und OB_i auf der positiven x -Achse bzw. y -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit dem Ursprung O liegen. Dabei wählen wir

$$OA_i = p_i \quad \text{und} \quad OB_i = \frac{p_i^2 - 1}{2},$$

also die Hypotenuse $A_i B_i = (p_i^2 + 1)/2$, wo $p_1, p_2, p_3, \dots$ die aufsteigende Reihe der Primzahlen (≥ 3) bedeute. Je grösser p_i , desto grösser ist der Dreieckswinkel α_i bei A_i ; denn

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{1}{2} \left(p_i - \frac{1}{p_i} \right).$$

Sei nun $N > 2$ eine natürliche Zahl. Dann vergrössern wir alle zu den Indizes $1, 2, \dots, N - 2$ gehörenden Dreiecke durch Streckung vom Zentrum O aus so, dass ihre auf der x -Achse liegenden Katheten die gleiche Länge $OA^* = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{N-2}$ erhalten. Die Punkte $B_1^*, B_2^*, \dots, B_{N-2}^*$ der y -Achse, in welche die Punkte B_i übergegangen sind, zusammen mit O und A^* , bilden das gewünschte System von N Punkten mit ganzzahligen Abständen, die nicht alle in einer Geraden liegen.

Übrigens hat es auf der y -Achse ausser den Punkten B_i^* noch weitere Punkte $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots$ welche die Bedingung ganzzahliger Abstände erfüllen; das gilt erst recht, wenn die Figur nochmals mit einem ganzzahligen Faktor gestreckt wird. So liefert unsere Konstruktionsvorschrift beispielsweise für $N = 4$ die Strecke $OA^* = 3 \cdot 5 = 15$ und vorerst die beiden Punkte $B_1^*(0|20)$ und $B_2^*(0|36)$. Brauchbar sind aber auch $\bar{B}_1(0|8)$ und $\bar{B}_2(0|112)$. Streckt man noch mit dem Faktor 8, so existieren zur Kathete

$$OA^* = 8 \cdot 15 = 120$$

insgesamt 22 verschiedene pythagoreische Dreiecke. (Natürlich lässt sich das Punktesystem noch an den Achsen spiegeln.)

II. Im Falle einer beliebigen endlichen Dimensionszahl $k > 2$ bestimme man zu einer gegebenen natürlichen Zahl $N > k$ wie vorhin eine Strecke $OA^* = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{N-k}$. Mit OA^* als Kante denke man sich ein reguläres Simplex von $k - 1$ Dimensionen (das heisst mit k Ecken) konstruiert, zum Beispiel im Falle $k = 3$ ein gleichseitiges Dreieck. Normal zum $(k - 1)$ -dimensionalen Unterraum, der durch das Simplex bestimmt wird, also normal zu den $k - 1$ von O ausgehenden Kanten, lege man durch O eine Achse, auf welcher $N - k$ Punkte $B_1^*, B_2^*, \dots, B_{N-k}^*$ durch das in Abschnitt I geschilderte Verfahren festgelegt seien. Ihre Verbindungsstrecken zur Simplexecke O sind jetzt Katheten, die Strecken von den B_i^* nach den andern $k - 1$ Ecken Hypotenusen von pythagoreischen Dreiecken, so dass in den Simplexecken und den B_i^* wieder insgesamt N Punkte mit ganzzahligen Entfernungen gefunden sind, die nicht alle demselben $(k - 1)$ -dimensionalen Unterraum angehören.

III. Ergänzend seien für die Ebene durch Angabe von Koordinaten zwei Beispiele mitgeteilt, die weitere Anordnungsmöglichkeiten illustrieren:

1. 6 Punkte: $A_{1,2}(+80|\pm 30)$, $B_{1,2}(0|\pm 30)$, $C_{1,2}(-11|\pm 30)$;

auftretende Abstände: 11; 60; 61; 80; 91; 100; 109.

2. 7 Punkte: $A_{1,2,3,4}(\pm 42|\pm 40)$, $B_{1,2}(\pm 33|0)$, $O(0|0)$;

auftretende Abstände: 33; 41; 58; 66; 80; 84; 85; 116. FRANZ STEIGER, Bern.