

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 3.** Herr W. Süss (Freiburg i. Br.) lenkt gelegentlich wieder die Aufmerksamkeit auf eine reizvolle Frage der Geometrie der Eilinie, die bereits im Jahre 1918 von W. BLASCHKE und andern aufgestellt wurde, bis heute aber unbeantwortet blieb. Das Problem lautet: Gibt es eine Eilinie in der Ebene, welche zwei Speichenpunkte aufzuweisen hat? Ein Punkt im Innern einer Eilinie heisst Speichenpunkt, wenn alle durchlaufenden Sehnen gleiche Länge haben.

Bemerkenswerterweise kennt man eine ganze Reihe von Eigenschaften einer solchen Eilinie, die von W. Süss [Tôhoku Math. J. 25, 86–98 (1925)] aufgestellt worden sind. Eine Note von G. A. DIRAC [J. London Math. Soc. 27, 429–437 (1952)] aus neuerer Zeit befasst sich auch mit diesen Eigenschaften. Nur weiss man nicht, ob eine solche Eilinie überhaupt existiert!

H. HADWIGER, Bern.

## Aufgaben

**Aufgabe 195.** Man beweise: Rolllt eine Gerade eines starren ebenen Systems  $\Sigma$  auf einer festen Zykloide, so existiert in  $\Sigma$  ein Strahlenbüschel, dessen Geraden im Ablauf der Bewegung ähnliche Zykloiden umhüllen. R. BEREIS, Wien.

*Lösung des Aufgabenstellers:* Dreht sich eine Ebene  $\Sigma_1$  um einen ihrer Punkte  $O$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$ , eine komplanare Ebene  $\Sigma_2$  um einen Punkt  $A$  ( $OA = a$ ) von  $\Sigma_1$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\beta$  (gegenüber einem ruhend gedachten System  $\Sigma_0$ ), so beschreibt bekanntlich jeder Punkt von  $\Sigma_2$  im ruhenden System  $\Sigma_0$  eine Trochoide. Die Polkurven dieser Bewegung  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  sind Kreise mit den Radien

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{\beta - \alpha}{\beta} a && \text{(Fixkreisradius),} \\ r &= \frac{\alpha}{\beta} a && \text{(Rollkreisradius).} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Jeder Punkt des Gangkreises  $k$  durchläuft eine Zykloide, deren Spitzen auf dem Rastkreis  $k_0$  liegen.

Da ferner Bahntangente  $t$  und Bahnnormale  $n$  eines beliebigen Punktes  $B$  von  $k$  stets durch zwei feste Punkte  $P$  und  $Q$  von  $\Sigma_1$  hindurchgehen –  $P$  und  $Q$  liegen auf dem Verbindungssteg  $OA$ ;  $P$  übernimmt dabei die Rolle des jeweiligen Momentanpoles der Bewegung von  $\Sigma_2$  gegen  $\Sigma_0$  –, so führt das durch  $t$  und  $n$  aufgespannte System  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_2$  eine Drehung um  $B$  und gegen  $\Sigma_1$  eine umgekehrte Ellipsenbewegung aus. Die Bewegung von  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_0$  kann auch durch Abrollen von  $n$  auf der Evolute  $e$  der Bahnzykloide  $z$  von  $B$  hervorgerufen werden. Dieses Abrollen vollzieht sich, wie aus den bestehenden Winkelrelationen zu ersehen ist, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (2)$$

Da die Gerade  $t$  stets die Zykloide  $z$  berührt, eine Verschiebung von  $t$  in sich während der Bewegung von  $\Sigma_3$  auf ihre Hüllbahn ohne Einfluss ist, ferner  $t$  immer den in  $\Sigma_1$  festen Punkt  $Q$  trägt und sich gegen  $\Sigma_0$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  dreht, so ist damit zunächst der bekannte Satz bewiesen:

Eine Gerade, die gleichförmig (Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$ ) um einen ihr angehörigen Punkt rotiert, der seinerseits mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\alpha$  auf einem Kreis wandert, umhüllt eine Zyklode mit dem Rollkreisradienverhältnis  $2\gamma:\alpha$ .

Da nun, wie erwähnt,  $\Sigma_3$  gegen  $\Sigma_1$  eine umgekehrte Ellipsenbewegung ausführt, gleitet jede Gerade des Strahlbüschels  $B$  (von  $\Sigma_3$ ) durch einen festen Punkt von  $\Sigma_1$  (dieser feste Punkt liegt, wie auch aus Peripheriewinkeleigenschaften leicht abzuleiten ist, auf jenem Kreis von  $\Sigma_1$ , der stets den Rastkreis  $k$  von  $\Sigma_2$  deckt), und hat somit zufolge ihrer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  gegenüber  $\Sigma_0$  eine zur Zyklode  $z$  ähnliche Hüllbahn in  $\Sigma_0$ . Damit ist auch ein einfacher geometrischer Beweis für den Satz von FOURET (1880) erbracht, nämlich, dass alle Evolutoiden einer Zyklode zu ihr ähnliche Kurven sind. Da insbesondere die Gerade  $n$  die Evolute  $e$  von  $z$  umhüllt und auf  $z$  im Ablauf der Bewegung ohne zu Gleiten abrollt, ist damit der geforderte Beweis erbracht.

Da ferner der Punkt  $B$  beim Abwälzen von  $n$  auf  $e$  offenbar mit allen Scheiteln von  $e$  in Berührung kommen muss, kann man in Erweiterung des zu beweisenden Satzes sagen:

«Rollt eine Gerade eines starren ebenen Systems  $\Sigma$  auf einer festen Zyklode, so existiert in  $\Sigma$  ein Strahlbüschel, dessen Geraden im Ablauf der Bewegung ähnliche Zykloiden umhüllen. Der Träger dieses ausgezeichneten Strahlbüschels ist jener Punkt der Wälztangente, der mit den Scheiteln der gegebenen Zyklode zur Deckung kommt. Alle übrigen Geraden von  $\Sigma$  umhüllen naturgemäss Parallelkurven genannter Zykloiden.»

Eine rechnerische Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 196.** Démontrer que

$$\frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{1 - \binom{4n}{2} 3 + \binom{4n}{4} 3^2 - \binom{4n}{6} 3^3 + \dots + \binom{4n}{4n} 3^{2n}}{1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \binom{4n}{6} + \dots + \binom{4n}{4n}}$$

est pour tout  $n$  entier positif un nombre entier.

H. BREMEKAMP, Delft.

*Lösung:* Der Zähler ist der Realteil von  $(1+i\sqrt{3})^{4n}$  und hat somit den Wert  $(-1)^n 2^{4n} \cos n\pi/3$ . Der zweite Teil des Nenners ist die reelle Zahl  $(1+i)^{4n} = (-4)^n$ . Für den in Frage stehenden Quotienten findet man also den Wert  $2 \cos n\pi/3$ , das heisst, es sind nur die Werte  $\pm 1, \pm 2$  möglich.

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. BINZ (Bern), K. EJRNAES (Tønder, Dänemark), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), H. LENZ (München), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich).

**Aufgabe 197.** Man beweise für natürliche Zahlen  $r$  und  $s$  die Identität

$$\binom{2s}{r} = \sum_{p=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} 2^{r-2p} \binom{s}{r-p} \binom{r-p}{p}.$$

M. G. BEUMER, Bergen op Zoom (Holland).

*Lösung:* Die Nummern  $1, 2, 3, \dots, 2s$  seien gleichmässig auf  $s$  feste Gruppen  $g_1, g_2, \dots, g_s$  verteilt. Eine Auswahl von  $r$  Nummern möge sich aus genau  $r-p$  solcher Gruppen  $g_i$  rekrutieren. Eine solche «Rekrutierungsbasis» lässt sich auf  $\binom{s}{r-p}$  Arten auswählen. Innerhalb einer solchen Basis können die  $p$  Zahlenpaare, die je einer Gruppe  $g_i$  angehören, auf  $\binom{r-p}{p}$  Arten und die übrigen  $r-2p$  Nummern, die  $r-2p$  verschiedenen Gruppen angehören, jedesmal auf  $2^{r-2p}$  Arten gewählt werden. Das gibt, wenn man noch  $p$  variieren lässt, gerade die angegebene Summe für  $\binom{2s}{r}$ .

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

*Bemerkung des Aufgabenstellers:* Setzt man  $r = s - k$ , so ergibt sich eine von N. KEMMER<sup>1)</sup> mit Gammafunktion und hypergeometrischen Funktionen bewiesene Identität. Einen weiteren Beweis hat GUPTA<sup>2)</sup> gegeben.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London) und R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 198.** Soit  $\pi_i$  un plan passant par l'arête  $A_{i-1}A_i$  d'un polygone plan ( $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ ,  $A_n = A_0$ ). Quelles sont les conditions à remplir pour que chaque plan  $\pi_i$  soit orthogonal au plan  $\pi_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )? J.-P. SYDLER, Zurich.

*Solution de l'auteur:* Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les angles intérieurs du polygone,  $\beta_i$  l'angle que fait  $\pi_i$  avec le plan du polygone. Pour que  $\pi_i$  et  $\pi_{i+1}$  soient orthogonaux, il faut que

$$\cos \alpha_i = \operatorname{ctg} \beta_i \operatorname{ctg} \beta_{i+1}.$$

Donc

$$\operatorname{ctg} \beta_{2k+2} = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_{2k+1}}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_{2k}} \operatorname{tg} \beta_1, \quad \operatorname{tg} \beta_{2k+1} = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_{2k-1}}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_{2k}} \operatorname{tg} \beta_1.$$

Si  $n = 2s + 1$  on a  $\beta_1 = \beta_{n+1} = \beta_{2s+2}$ ,

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_n}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_{n-1}} \operatorname{tg} \beta_1, \quad \operatorname{ctg}^2 \beta_1 = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_n}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_{n-1}}.$$

Si  $n = 2s$  on a

$$\beta_1 = \beta_{n+1} = \beta_{2s+1}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_{n-1}}{\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_n} \operatorname{tg} \beta_1,$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \dots \cos \alpha_{n-1} = \cos \alpha_2 \cos \alpha_4 \dots \cos \alpha_n. \tag{1}$$

Donc pour  $n$  impair il y a une et une seule solution quel que soit le polygone. Pour  $n$  pair, il y a ou aucune solution ou une infinité, suivant que le polygone ne vérifie pas ou vérifie la relation (1). Pour un polygone pair vérifiant (1), toute chaîne orthogonale se ferme après un tour. Pour un polygone impair, toute chaîne se ferme après deux tours et il existe une chaîne particulière qui se ferme déjà après un tour. Pour un polygone pair ne vérifiant pas (1), aucune chaîne ne se ferme.

Autre énoncé du problème: Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un polygone quelconque d'angles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Soit  $h_i$  l'hyperbole située à l'intérieur de l'angle  $A_i$ , d'asymptotes  $A_{i-1}A_i$  et  $A_iA_{i+1}$  et d'axe réel  $\sqrt{\cos \alpha_i / (1 - \cos \alpha_i)}$ . Par un point quelconque  $P_i$  de  $h_i$  menons la parallèle à  $A_iA_{i+1}$  qui coupe  $h_{i+1}$  en  $P_{i+1}$ ; par  $P_{i+1}$  la parallèle à  $A_{i+1}A_{i+2}$ , etc. Quelles sont les conditions pour que le polygone  $P_1P_2 \dots P_n$  se ferme après un ou deux tours?

*Solution:* Les hyperboles  $h_i$  sont les lieux des traces des droites d'intersection des plans orthogonaux du problème précédent dans un plan parallèle au polygone. On a donc les mêmes conditions.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 199.** Drei Punkte  $A, B, C$ , die sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten geradlinig bewegen, befinden sich in einem Zeitpunkt in  $A_1, B_1, C_1$  und in einem anderen Zeitpunkt in  $A_2, B_2, C_2$ . Man ermittle diejenige Lage, bei der die Fläche des Dreiecks  $ABC$  verschwindet oder möglichst klein wird. W. ZULLIGER, Küsnacht.

*Lösung:* Es sei  $\overrightarrow{A_1X} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2} = \lambda u$ ,  $\overrightarrow{B_1Y} = \lambda \overrightarrow{B_1B_2} = \lambda v$ ,  $\overrightarrow{C_1Z} = \lambda \overrightarrow{C_1C_2} = \lambda w$ . Bei variablem  $\lambda$  beschreiben die Punkte  $B^* = A_1 + \lambda(u - v)$ ,  $C^* = A_1 + \lambda(u - w)$  zwei Geraden  $b^*, c^*$  und auf ihnen zwei projektive Punktreihen. Sollen  $X, Y, Z$  kollinear sein, so müssen wegen  $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{B_1B^*}$ ,  $\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{C_1C^*}$   $\overrightarrow{B_1B^*}$  und  $\overrightarrow{C_1C^*}$  parallel sein. Projiziert man also  $C_1$  in Richtung  $B_1B^*$  nach  $C^{**}$  auf  $c^*$ , so ergibt sich auf  $c^*$  eine Projektivität  $C^* \rightarrow C^{**}$ . Durch Konstruktion der Doppelpunkte dieser Projektivität erhält man die

<sup>1)</sup> The algebra of meson matrices. Proc. Cambr. Phil. Soc. 39, 189-196 (1943).

<sup>2)</sup> Math. Student, Madras, 15 (1947).

kollinearen  $X, Y, Z$ , sofern solche existieren. Sind  $X_1, X_2$  bzw.  $Y_1, Y_2$  und  $Z_1, Z_2$  die beiden möglichen Lagen für  $X$  bzw.  $Y$  und  $Z$ , so ergeben die Mitten der Strecken  $\overline{X_1 X_2}, \overline{Y_1 Y_2}, \overline{Z_1 Z_2}$  ein Dreieck, für das der Betrag der Fläche ein relatives Maximum annimmt, da diese Fläche eine quadratische Funktion von  $\lambda$  ist. Sind  $X_1, X_2$  usw. imaginär, so kann man aus jener Projektivität gleichwohl den (reellen) Mittelpunkt leicht konstruieren und erhält damit das Dreieck mit dem kleinsten Betrag der Fläche.

C. BINDSCHEDLER, (Küsnacht).

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

### Neue Aufgaben

227. Die Asymptoten einer Hyperbel  $H$  schneiden aus der Tangente im Kurvenpunkte  $P$  eine Strecke ab, deren Länge mit  $2s$  bezeichnet sei. Von  $P$  aus trägt man auf der Normalen die Strecke  $PQ = s$  nach innen ab. Welche Kurve beschreibt  $Q$ , wenn  $P$  die Hyperbel durchläuft? Beziehungen zwischen  $H$  und  $K$ ?  
L. LOCHER-ERNST, Winterthur.
228. Man konstruiere a) einen Rhombus, b) ein Rechteck, dessen Ecken auf vier gegebenen windschiefen Geraden liegen.  
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.
229. Man bestimme den Pferchkreis<sup>1)</sup> der Höhenschnittpunkte aller Dreiecke, welche einem festen Kreis  $(M, r)$  eingeschrieben sind, und bei welchen  
a) eine Ecke auf diesem Kreis ein fester Punkt ist,  
b) die Ecken beliebig auf diesem Kreis liegen können.  
R. LAUFFER, Graz.
230. Bekanntlich hat die Gleichung  $\varphi(n) = a$ , wo  $\varphi(n)$  die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen  $< n$  bedeutet und  $a$  eine (notwendig) gerade Zahl ist, nicht immer eine Lösung; z. B. für  $a = 34$  gibt es keine Lösung  $n$ . Man beweise, dass es unendlich viele gerade Zahlen  $a$  gibt, für die die Gleichung keine Lösung besitzt.  
M. G. BEUMER, Enschede (Holland).
231. Auf was für einer Linie bewegt sich ein Wanderer in ebenem, waagrechtem Gelände, wenn er mit gleichbleibender Geschwindigkeit ständig seinem Schatten nachgeht?  
W. WUNDERLICH, Wien.

## Berichte

### Verein schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Im Zentrum der 58. Jahresversammlung, die am 2. Oktober 1954 in Genf stattfand, standen die Referate von B. L. VAN DER WAERDEN über «Lagerungen von Punkten auf der Kugel» (siehe untenstehendes Résumé) und von R. EXTERMANN über «Electronique et recherche physique». Über die Geschäftssitzung, die im Anschluss an das gemeinsame Nachtessen im Restaurant du Boulevard unter dem Vorsitz von Herrn C. ROTH stattfand, wird voraussichtlich ein kurzer Bericht im *Gymnasium Helveticum* orientieren.

Redaktion

#### *Lagerungen von Punkten auf der Kugel*

Der Biologe P. M. L. TAMMES hat die Verteilung der Austrittsstellen der Pollenkörner verschiedener Pflanzenarten untersucht. Bei manchen Arten, z. B. *Fumaria capreolata*, sind die Austrittsstellen über die ganze Kugeloberfläche verteilt, und zwar anscheinend so, dass die gegenseitigen Abstände der Austrittsstellen nicht zu klein werden. TAMMES fand, dass bei derselben Art die Anzahl der Austrittsstellen im allgemeinen mit der Pollengrösse wächst und dass dabei die Anzahlen 4, 6, 8, 12 bevorzugt werden. Er stellte jetzt die mathematische Frage: Wie gross muss eine Kugel sein, damit  $N$  Punkte mit Mindestabstand Eins auf der Kugeloberfläche Platz haben?

<sup>1)</sup> Unter dem Pferchkreis einer Punktmenge versteht man den kleinsten Kreis, der die Punktmenge im Innern enthält.