

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4 teilbare Zahl, von der noch nicht entschieden werden konnte, ob sie eine H -Zahl ist oder nicht, ist unseres Wissens $n = 92$. H. HADWIGER.

Berichtigung zu Nr. 9. Die beiden in der Tafel (Seite 16) angegebenen Tetraeder I und II besitzen das Volumen $V = 1/2$; damit diese, wie vorgesehen, das Volumen $V = 1$ aufweisen, sind die drei Kanten a , b und c je mit dem Faktor $\sqrt[3]{2}$ zu multiplizieren. Auf dieses Versehen wurde von Herrn F. FAEHNDRICH (Bern) aufmerksam gemacht.

Aufgaben

Aufgabe 229. Man bestimme den Pferchkreis der Höhenschnittpunkte aller Dreiecke, welche einem festen Kreis (M, r) eingeschrieben sind, und bei welchen

- a) eine Ecke auf diesem Kreis ein fester Punkt ist,
b) die Ecken beliebig auf diesem Kreis liegen können.

R. LAUFFER, Graz.

Lösung: a) A sei ein fester Peripheriepunkt und M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises k . \overline{AQ} sei eine Schwerlinie im einbeschriebenen Dreieck ABC . Für den Schwerpunkt S gilt $AS:AQ = 2:3$. Der Pferchkreis k_1 der Schwerpunkte steht also mit dem Kreis k in einer Homothetie mit dem Mittelpunkt A und mit der Charakteristik $2/3$. Der Mittelpunkt von k_1 teilt die Strecke \overline{MA} im Verhältnis $1:2$, und der Halbmesser von k_1 beträgt $2r/3$. Auf der Euler-Geraden MS liegt auch der Höhenschnittpunkt H , und zwar so, dass $MH:MS = 3:1$. So steht der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte in einer Homothetie mit k_1 mit dem Mittelpunkt M und mit der Charakteristik $3/1$. Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also A und sein Halbmesser $2r$.

b) Der Schwerpunkt eines dem Kreis k einbeschriebenen beliebigen Dreiecks ist immer ein innerer Punkt von k . Der Pferchkreis der Schwerpunkte ist also k selbst. Der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte steht mit k in einer Homothetie, deren Mittelpunkt M und deren Charakteristik $3/1$ ist. Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also M und sein Halbmesser $3r$.

Falls wir die entarteten Dreiecke auch in Betracht ziehen, so gehören auch die Randpunkte der erwähnten Pferchkreise zu den Schwerpunkten bzw. Höhenschnittpunkten.

J. SCHOPP, Budapest.

Die Lösungen von A. BAGER (Hjørring) und J. ERDÖSI (Budapest) beruhen auf der Tatsache, dass das Spiegelbild von H bezüglich einer Dreiecksseite auf dem Umkreis liegt. H liegt daher auf der zu k bezüglich BC symmetrischen Kreisscheibe. H gehört daher immer zur Vereinigungsmenge V aller mit k kongruenten Scheiben, die Punkte mit k gemeinsam haben. V ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $3r$. Bleibt A fest, so gehört H zur Vereinigungsmenge V' aller Scheiben, die A enthalten und zu k kongruent sind. V' ist ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $2r$.

Das Resultat von b) ergibt sich auch unmittelbar aus der Formel

$$\overline{HM} = r \sqrt{1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

für $\beta = \gamma \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \pi$.

Weitere Lösungen sandten E. PETHES (Budapest) und I. ZANA (Budapest).

Aufgabe 230. Bekanntlich hat die Gleichung $\varphi(n) = a$, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen $< n$ bedeutet und a eine (notwendig) gerade Zahl ist, nicht immer eine Lösung; zum Beispiel für $a = 34$ gibt es keine Lösung n . Man beweise, dass es unendlich viele gerade Zahlen a gibt, für die die Gleichung keine Lösung besitzt.

M. G. BEUMER, Enschede (Holland).

Lösung: Ist $\varphi(n) = a = 2b$ und $b > 1$ eine ungerade Zahl, also $\varphi(n)$ nicht durch 4 teilbar, so gilt

$$2b = p^e(p-1), \quad e \geq 0, \quad (1)$$

wo p eine ungerade Primzahl ist. Es sind also nur die Lösungen $n = p^{e+1}$ und $n = 2p^{e+1}$ möglich. Ist $b = q^s$, wo q eine von 3 verschiedene ungerade Primzahl ist, so kann (1) nur für $e = 0$ gelten, denn $p = q$ führt auf einen Widerspruch, weil $q - 1 \neq 2q^{s-e}$. Also ist in diesem Fall $p = 2q^s + 1$. Ist $2q^s + 1 = 2b + 1$ keine Primzahl, so existiert also für $b = q^s$ keine Lösung der Gleichung $\varphi(n) = 2b$.

W. SIERPIŃSKI (Warschau) behandelt folgende Fälle: 1. $b = 5^{2k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Wegen $5^{2k} = 25^k \equiv 1 \pmod{3}$ ist $2b + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, also keine Primzahl. 2. $b = 5^{6k+5}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Wegen $5^{6(k+1)} \equiv 1 \pmod{7}$ (Fermat!) ist $5^{6k+5} \equiv 3 \pmod{7}$, also $2b + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

G. PAZDERSKI (Halle/Saale) gibt das Beispiel $b = 7^k$ ($k = 1, 2, \dots$). Wegen $7^k \equiv 1 \pmod{3}$ ist $2b + 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

A. BAGER (Hjørring), U. DIETER (Kiel), R. LAUFFER (Graz), K. MOSONYI (Szeged) und W. SIERPIŃSKI setzen $b = q = 3k + 1$. Nach einem elementar beweisbaren Spezialfall des Dirichletschen Satzes gibt es unendlich viele solche Primzahlen q . Nun ist $2b + 1 = 3(2k + 1)$, also keine Primzahl. Wie W. SIERPIŃSKI mitteilt, ist es nicht bekannt, ob unendlich viele Primzahlen q existieren, für die $\varphi(n) = 2q$ lösbar ist, was zum Beispiel für $q = 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113$ der Fall ist. Die Bestimmung aller b , für die $\varphi(n) = 2b$ keine Lösung hat, ist also mit den heutigen Mitteln nicht möglich.

Ein weiteres Beispiel, $b = 2 \cdot 7 \cdot 3^{2k}$ ($k = 2, 3, \dots$), hat W. GASCHÜTZ, Kiel, angegeben.

Aufgabe 231. Auf was für einer Linie bewegt sich ein Wanderer in ebenem, waagrechttem Gelände, wenn er mit gleichbleibender Geschwindigkeit ständig seinem Schatten nachgeht?

W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Bezeichne β die (mittlere) geographische Breite, δ die Sonnendeklination, σ den veränderlichen Stundenwinkel und c die Wandergeschwindigkeit in km/h. Zur Verwendung gelangt ein rechtes kartesisches Normalkoordinatensystem x, y, z , dessen Ursprung O mit dem Mittagsstandort zusammenfällt; die x -Achse weise nach Osten, die y -Achse nach Norden und die nach oben weisende z -Achse diene als Schattenzeiger. Die Änderung der Schattenrichtung überblickt man am besten, wenn man auf dem Lichtstrahl durch O einen Punkt P in der festen Entfernung 1 ins Auge fasst: Im Laufe des Tages überstreicht die Strecke OP gleichförmig den Mantel eines Drehkegels mit der Öffnung $\pi - 2\delta$, dessen Achse parallel zur Erdachse ist, also nach Norden hin unter dem Winkel β ansteigt; der Grundriss P' von P bewegt sich auf einer Ellipse k' und $P'O$ gibt die Schattenrichtung der z -Achse, also die Fortschreitrichtung des Wanderers an¹).

Die darstellend-geometrische Auswertung dieses Gedankens ermöglicht eine schnelle Beantwortung der gestellten Frage mit Hilfe einer graphischen Integration und erlaubt unmittelbar eine Beurteilung der Bahnform in qualitativer Hinsicht. Je nach der Lage der Ellipse k' zum Ursprung O sind – unter Beschränkung auf nördliche Breiten – sieben Fälle zu unterscheiden:

1. $0 < |\delta| < \beta < \pi/2$ (O innerhalb k'). Die Tagesbahn ist ein zur x -Achse symmetrischer Bogen einer periodischen Kurve vom Aussehen einer verschlungenen Zykloide.
2. $0 = \delta < \beta < \pi/2$ (O = Mitte von k'). Bogen eines zentrisch-symmetrischen Ovals.
3. $0 < |\delta| = \beta < \pi/2$ (O auf k'). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer gespitzten Zykloide.
4. $0 < \beta < |\delta|$ (O ausserhalb k'). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer gestreckten Zykloide.

¹) Vgl. die ähnlichen Überlegungen zur «analematischen Sonnenuhr», *El. Math.* 7, 114–115 (1952).

5. $0 = \beta < |\delta|$ ($k' =$ Strecke). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer Sinuswelle.
6. $0 = \beta = \delta$ ($k' =$ Strecke durch O). Abschnitt der x -Achse.
7. $\beta = \pi/2$ ($k' =$ Kreis um O). Kreis.

Die rechnerische Auswertung, ausgehend von den leicht angebbaren Koordinaten

$$\begin{aligned} X &= -\cos \delta \sin \sigma, \\ Y &= \sin \delta \cos \beta - \cos \delta \sin \beta \cos \sigma, \\ Z &= \sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \cos \sigma \end{aligned}$$

des Hilfspunktes P , verlangt die Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \\ dx^2 + dy^2 = C^2 d\sigma^2 \quad \text{mit } C = 12 c/\pi. \end{cases}$$

Elimination von dy führt auf

$$x = -C \int_0^\sigma \frac{X d\sigma}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = -\frac{C}{\cos \beta} \int \frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^2}} = \frac{C}{\cos \beta} \arccos Z = \frac{C}{\cos \beta} (\zeta - \zeta_0).$$

Man hat also das merkwürdige Resultat, dass die Abszisse x des Wanderers proportional zur Änderung der Zenitdistanz ζ (oder der Höhe $h = \pi/2 - \zeta$) der Sonne ist. – Für die Ordinate y findet man

$$y = -C \int_0^\sigma \frac{Y d\sigma}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = C \int \frac{\cos \delta \sin \beta \cos \sigma - \sin \delta \cos \beta}{\sqrt{1 - (\sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \cos \sigma)^2}} d\sigma,$$

was sich durch die Substitution $\cos \sigma = u$ auf ein im allgemeinen elliptisches Integral zurückführen lässt. In den Sonderfällen 2, 3, 5, 6 und 7 ist elementare Integration möglich.

W. WUNDERLICH, Wien.

Neue Aufgaben

265. An einem Punkt greifen drei koplanare Kräfte an, die sich aufheben. Diese drei Kräfte lassen sich in zwei reguläre Kräftetripel zerlegen. Wie kann man diese Tripel finden? (Unter einem regulären Kräftetripel sollen drei gleichgrosse koplanare Kräfte verstanden werden, die gegeneinander je einen Winkel von 120° aufweisen.)

H. SCHILT, Biel.

266. Man beweise folgende, für ein beliebiges Dreieck gültige Formeln:

$$1. \quad h_a + h_b + h_c = 2R + 4r + \frac{r^2}{R} + 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$2. \quad s^2 - (2R + r)^2 = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

[$R =$ Umkreisradius, $r =$ Inkreisradius, $h =$ Höhe, $s = (a + b + c)/2$]. Hieraus ergeben sich zwei Charakterisierungen des rechtwinkligen Dreiecks, von denen die zweite, $s = 2R + r$, besonders einfach ist.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

267. Von zwei kongruenten Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $\lambda \leq 2 - \sqrt{3}$, die sich decken, soll die eine um ihren Mittelpunkt so weit gedreht werden, dass die beiden Kurven fünf flächengleiche Gebiete begrenzen. (Man gebe entweder eine rein konstruktive Lösung oder berechne den Drehwinkel.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht ZH.

268. Consider the elements $1, 2, \dots, n$ and let be given an integer k with $3 \leq k \leq n$. To be determined is the minimal system A of (i, j) -ambos ($1 \leq i < j \leq n$) with the property that each combination

$$\mu_k \equiv (i_1, i_2, \dots, i_k), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

contains at least one ambo from A .

PAUL TURAN, Budapest.

269. Let $\sigma(n)$ denote, as usual, the sum of the divisors of n . Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n! + 1)}{n! + 1} = 1.$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada) and J. LAMBEK, Montreal.

270. P_n sei das Produkt, gebildet aus den Seiten und allen Diagonalen eines dem Einheitskreis eingeschriebenen n -Ecks. Welches ist der grösstmögliche Wert von P_n ?

E. TROST, Zürich.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

- Über dem spitzwinkligen Dreieck ABC in der Projektionsebene ist das rechtwinklige Tetraeder zu errichten. (Die drei Kanten $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ bilden ein sogenanntes rechtwinkliges Dreibein.)
[Die Normalprojektion S' der Spitze S ist Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC , denn $a \perp E(b, c)$, folglich $a' \perp BC$ usw.]
- Bildet man mit drei von S ausgehenden, gegebenen Kanten a, b, c Tetraeder, so hat das in S rechtwinklige maximale Volumen. (Grösstmögliches Zelt mit drei verschieden langen Stangen.)
[Ohne Differentialrechnung: Wählt man eine Seitenfläche, z. B. SAB als Grundfläche, so ist diese, unabhängig von der Höhe, am grössten, wenn $\angle(a, b) = 90^\circ$ ist; die Höhe ist, unabhängig von der Grundfläche, am grössten, wenn sie gleich c ist. – Stellt man das maximale Tetraeder nun wieder auf die Grundfläche und hält ausser a, b, c auch seine Höhe fest, so können die Punkte A, B, C noch auf konzentrischen Kreisen um den Höhenfusspunkt F wandern, und das Dreieck ABC ist dann am grössten (nach Aufgabe 1!), wenn F Höhenschnittpunkt ist. Durch diese sehr elementare Lösung von Aufgabe 183 der «Elemente» ist auch diese für die Schulstube gewonnen.]
- Für das rechtwinklige Tetraeder mit den Seitenflächen f_1, f_2, f_3 und der Grundfläche g gilt der «Pythagoreische» Satz

$$g^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

- Sind die Grundkanten eines rechtwinkligen Tetraeders u, v und w , so gilt für das Volumen die «Heronsche» Formel

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{(S^2 - u^2)(S^2 - v^2)(S^2 - w^2)},$$

wo S^2 den Ausdruck $\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ bedeutet.

- Über dem Dreieck ABC ist das rechtwinklige Dreibein nach oben zu errichten. $A(5; 6; 4)$, $B(9; 9; 9)$, $C(14; 1; 2)$.
[$S(5,799; 4,177; 6,655)$.]