Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Ferner gilt

$$q(x+y) = q(x) + q(y) \quad \text{für} \quad 0 < x < x+y < R.$$

Denn

$$q(x+y) = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x+y}{2^n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{y}{2^n} + 2^n \sin\frac{y}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right\}$$

$$= q(x) + q(y)$$

wegen der Stetigkeit des $\cos x$ bei $x = 0$. Weil alle $q_n(x)$ in unserem Bereich monoton wachsen, nimmt dort $q(x)$ nirgends ab. Daher hat $q(x)$ als Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung die Form $q(x) = c\,x$, wo c eine Konstante >0 ist. (5) nimmt damit die Form $\sin x = c\,x\,p(x)$ an, das heisst, es ist $\sin x/x = c\,p(x)$. Wegen (4) ist $\lim\limits_{x\to 0+} p(x) = 1$, also

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = c.$$

Damit ist nach (1) oder (2)

$$\frac{d}{dx}\sin x = c\cos x.$$

Setzen wir $x = y/c$ und $\sin y/c = \mathrm{s}(y)$, $\cos y/c = \mathrm{c}(y)$, dann wird

$$\frac{d}{dy}\mathrm{s}(y) = \mathrm{c}(y) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dy}\mathrm{c}(y) = -\mathrm{s}(y).$$

y ist das Bogenmass des Winkels. Weil dieser Name aber erst in der Integralrechnung erklärt wird, nennen wir es hier lieber das natürliche Winkelmass[4]).

c kann man aus der Gleichung

$$c\,x = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x}{2^n}\right\} \tag{6}$$

für ein beliebig gewähltes x berechnen. Ist $3\,x_0$ die Maßzahl des gestreckten Winkels, dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x_0}{2^n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\{2^n a_n\}, \quad \text{wo} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$$

ist. Dieser wohl schon ARCHIMEDES bekannte Grenzwert ist $\pi/3$. Er kann als Definition von π genommen werden. Nach (6) ist also $c = \pi/3\,x_0$. Wird x im Gradmass gemessen, dann ist $x_0 = 60$ und $c = \pi/180$. π erscheint bei dieser Auffassung als Masszahl des gestreckten Winkels im natürlichen Winkelmass. L. VIETORIS, Innsbruck.

Ungelöste Probleme

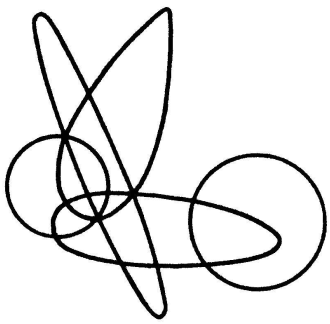
Nr. 15. Nach dem bekannten Hellyschen Satz haben alle Eibereiche einer Menge ebener Eibereiche einen nichtleeren Durchschnitt, falls dies bereits für je drei Eibereiche der Menge zutrifft. – Wir fragen hier, ob sich eine modifizierte Aussage noch machen lässt, wenn man mit wesentlicher Abschwächung der genannten Voraussetzung des Hellyschen Satzes nur verlangt, dass sich unter je vier beliebig aus der Menge ausgewählten Eibereichen stets wenigstens drei finden lassen, die einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen. – Das mit Figur 1 veranschaulichte einfache

[4]) Wir mussten hier für den Augenblick die Winkelfunktionen des im natürlichen Winkelmass gemessenen Winkels anders bezeichnen als für das ursprünglich verwendete Winkelmass.

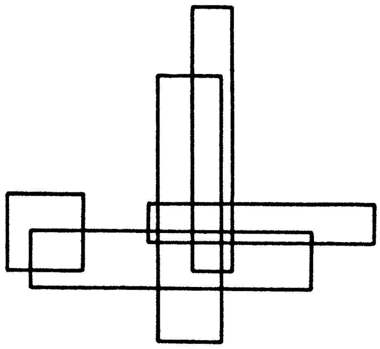
Beispiel zeigt, dass unter dieser schwächeren Voraussetzung die Aussage des Hellyschen Satzes nicht mehr gilt. Dagegen lässt sich die Eibereichsmenge in unserm Beispiel in zwei Teilmengen zerlegen, so dass die Aussage noch für jede einzelne Teilmenge zutrifft. Ist dies immer so? Speziell für parallel liegende Rechtecke ist dies in der Tat der Fall, das heisst, es gilt der folgende Satz:

Lassen sich in je vier beliebig aus einer wenigstens vier Elemente enthaltenden Menge parallel liegender Rechtecke ausgewählten Rechtecken stets wenigstens drei Rechtecke finden, die einen nichtleeren Durchschnitt haben, so lässt sich die Rechtecksmenge in zwei Teilmengen zerlegen, so dass alle ein und derselben Teilmenge angehörenden Rechtecke einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen.

Der Beweis ist sehr einfach und kann dem Leser überlassen werden; man muss



Figur 1



Figur 2

hierbei eine für Rechtecke gültige Verschärfung des Hellyschen Satzes passend anwenden, wonach man die Stichzahl «drei» durch «zwei» ersetzen kann[1]).

Figur 2 illustriert eine den Voraussetzungen unseres Satzes entsprechende Rechtecksmenge, wobei sich auch das Zutreffen der Behauptung leicht ablesen lässt.

Die Frage, ob ein Satz der hier erwogenen Art auch für Mengen beliebiger Eibereiche gilt, wobei die Anzahl der Teilmengen eventuell noch erhöht werden muss, konnte bisher noch nicht geklärt werden. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 251. Es ist

$$N(x) = N(x-6) + x$$

und $N(-5) = N(-4) = N(-3) = N(-2) = N(-1) = 0$ und $N(0) = 1$. Man zeige, dass

$$\frac{(x+1)(x+5)}{12} \leqq N(x) \leqq \frac{x^2+6x+12}{12}.$$

Diese Abschätzung ersetzt für ganze Zahlen x eine independente Darstellung von $N(x)$.

R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Die Abschätzung ist sinngemäss nur für alle ganzzahligen Werte von x zu verifizieren; bei willkürlicher Vorgabe von Funktionswerten $N(x)$ für $0 < x < 1$ und Fortsetzung mittels der Funktionalgleichung könnte sie nämlich falsch werden.

---

[1]) Vergleiche hierüber H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseign. math. *1955*, Heft 1, 56–89; insbesondere S. 67, Nr. 25.