Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 2

Artikel: Die Gliederung des projektiven Punktraumes durch sechs Ebenen
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19206

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 2 Seiten 25–49 Basel, 10. März 1957

Die Gliederung des projektiven Punktraumes durch sechs Ebenen

Vorbemerkung: In den letzten Jahren ist deutlich geworden, dass der mathematische Unterricht da und dort einer Neugestaltung bedarf. Es ist die Tendenz zu erkennen, in höherem Masse die praktischen Anwendungen zu berücksichtigen. Dieses berechtigte Bestreben erfordert aber einen Ausgleich, der im Erlebnis des mathematisch Schönen gefunden werden kann. Die folgenden Seiten sind dem 14. Kapitel eines im Laufe des Jahres 1957 erscheinenden Buches *Raum und Gegenraum* (Einführung in die Elemente einer modernen Geometrie) entnommen, das Materialien für die Erreichung des genannten Zieles darbieten möchte.

Fünf Geraden einer Ebene, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, gliedern die Ebene als Punktfeld in stets gleicher Art, wie man auch die Geraden wählen mag. Sie bestimmen eine zyklische Ordnung, die im Rand des stets vorhandenen fünfseitigen Kernes in Erscheinung tritt. Um diesen ist ein Kranz von fünf dreiseitigen Kernen gelegt.

Die Zerlegung des Punktraumes durch fünf Ebenen wurde früher angedeutet. Wir gehen einen Schritt weiter zum Studium der Gliederung durch sechs Ebenen, von denen keine drei derselben Geraden und keine vier demselben Punkt angehören. Es handelt sich also um das räumliche vollständige Sechsflach. Dieses Gebilde ist höchst interessant und zeigt eindrucksvolle Eigenschaften. Wir stellen uns die Aufgabe, es im vorstellenden Bewusstsein erfassen zu können. Ein solches Sechsflach erzeugt stets dieselbe Gliederung des Punktraumes, wie man auch die Ebenen wählen mag. Es gibt für die sechs Ebenen eine bestimmte zyklische Ordnung, die an einem in sich geschlossenen Kranz von sechs tetraedrischen Kernen ablesbar ist. Je zwei aufeinanderfolgende Kerne des Kranzes «scheiteln» sich, das heisst: sie haben eine Ecke und die von dieser ausgehenden drei Kantengeraden gemeinsam. Weiter zeigt sich, dass die Gliederung stets zwei sechsflächige Hauptkerne mit lauter vierseitigen Grenzgebieten und schliesslich zwei Hauptpunkte mit besonderen Eigenschaften enthält. Damit ist nur eine vorläufige Andeutung über die merkwürdigen Verhältnisse gegeben.

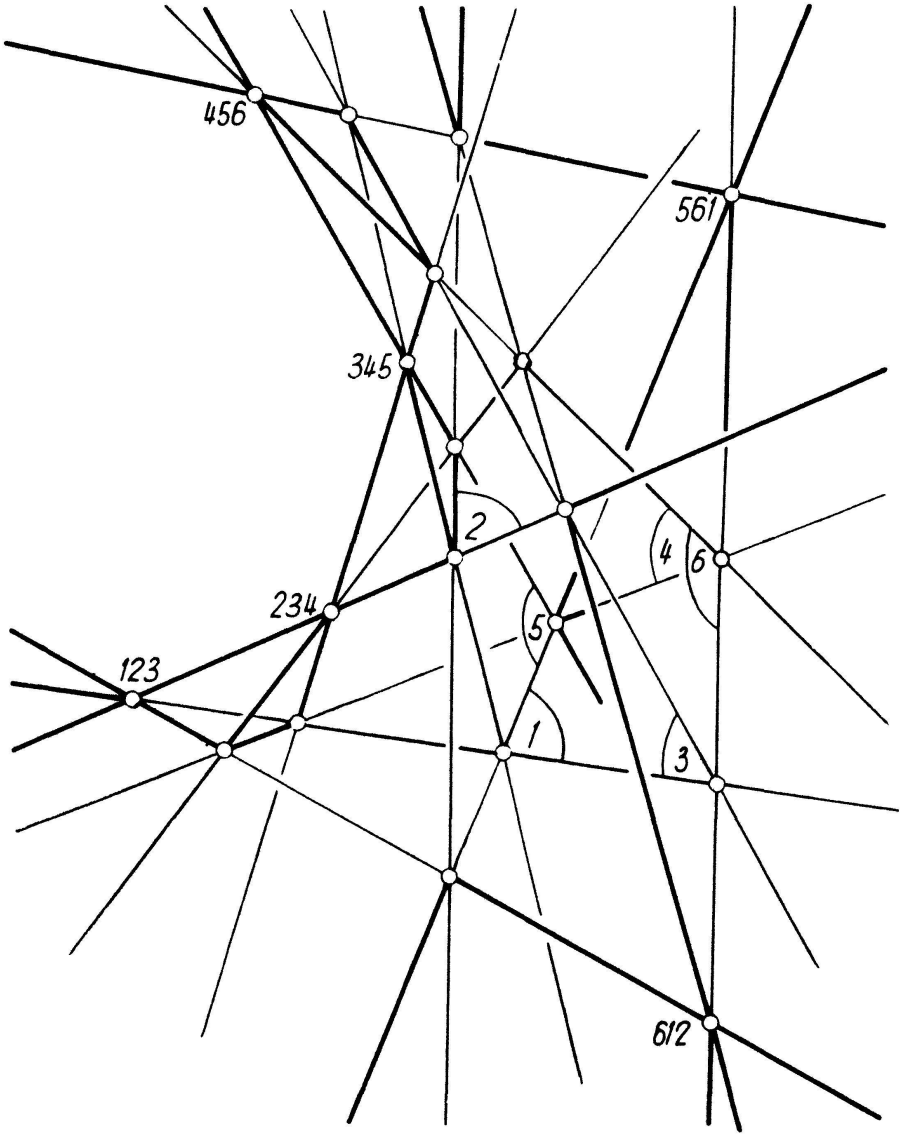
Die sechs Ebenen, die wir kurz mit den Ziffern 1 bis 6 bezeichnen werden, haben 15 Schnittgeraden:

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Es sind dies die Kanten des vollständigen Sechsflachs. Seine zwanzig Ecken ergeben sich als die Schnittpunkte von je drei der sechs Ebenen:

$$123,\ 124,\ 125,\ 126,\ 134,\ \ldots,\ 456.$$

Das Sechsflach gliedert, wie wir sehen werden, den projektiven Punktraum in 26 Kerne.



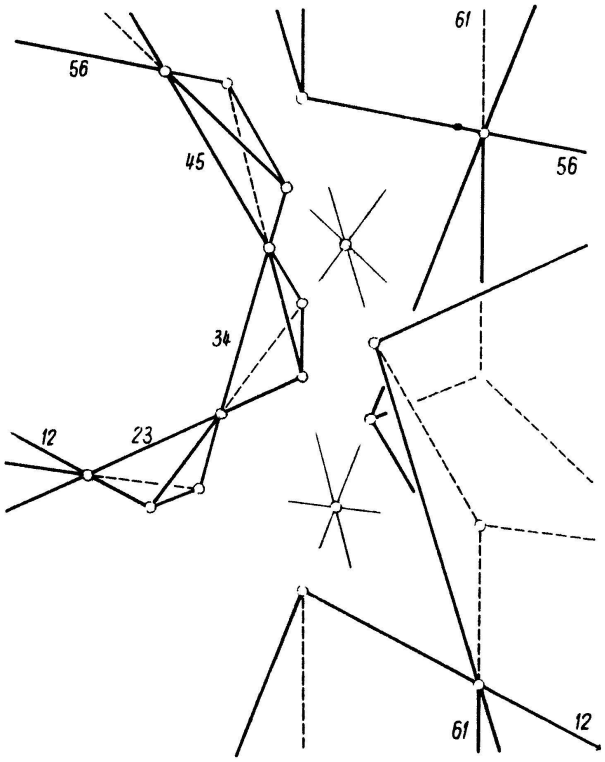
Figur 1

Um das Gebilde aufzubauen, kann man folgendermassen vorgehen: Zunächst zeichne man ein Tetraeder. Dann schneide man dieses mit einer Ebene und erhält damit eine Desarguessche Konfiguration. Ferner schneide man das Tetraeder mit einer zweiten Ebene, was eine zweite Desarguessche Konfiguration ergibt. Schliesslich ist noch die Schnittgerade der beiden das Ausgangstetraeder schneidenden Ebenen zu bestimmen. Die Zeichnung kommt leichter zustande, als man vorerst meint.

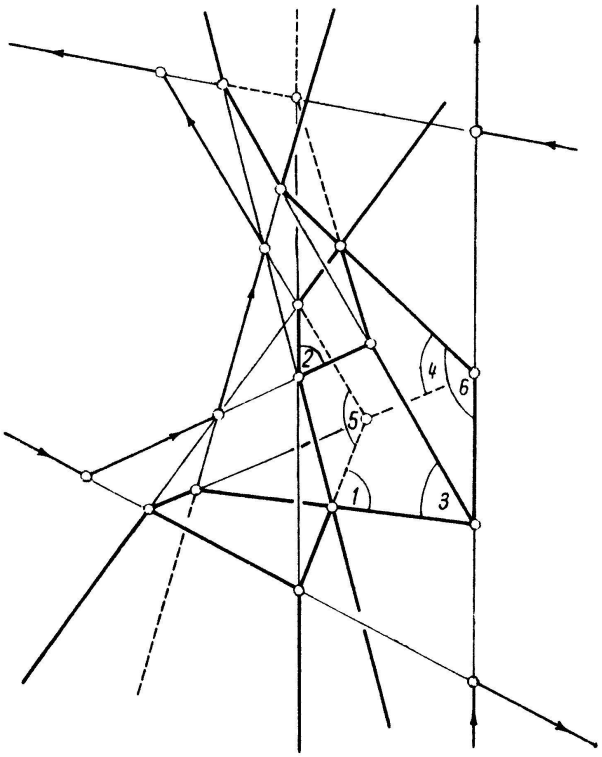
In Figur 1 betrachte man das Tetraeder mit der Spitze 345 und der horizontal gedachten Grundfläche, die sich links an die Beschriftungsziffer 1 anschliesst. Dieses Tetraeder wurde mit der Ebene 2 und mit der Ebene 6 geschnitten.

In Figur 4 nehme man das Tetraeder, dessen eine Kante oben horizontal von links nach rechts läuft, während deren Gegenkante unten von der Ecke 612 vorn nach rechts hinten geht. Es wurde mit den beiden Ebenen 3 und 4 geschnitten.

Den Zyklus der sechs Ebenen findet man folgendermassen: Zunächst sucht man die tetraedrischen Kerne; es gibt deren sechs. Diese «scheiteln» sich aufeinanderfolgend. Dann betrachte man diejenigen sechs Tetraederkanten, welche je zwei solche Scheitelecken, in denen zwei tetraedrische Kerne zusammentreffen, verbinden. Sie bilden einen geschlossenen Zug, den wir den *Hauptzug* nennen. Die Geraden, welche die



Figur 2



Figur 3

Kanten des Hauptzuges enthalten, bezeichne man, mit einer beliebigen beginnend, mit 12, 23, 34, 45, 56, 61, die Ecken des Zuges mit 123 (nämlich Schnitt von 12 und 23), 234 (Schnitt von 23 mit 34), 345, 456, 561, 612. Die Ebenen

$$1 = (61, 12), \quad 2 = (12, 23), \quad 3 = (23, 34),$$

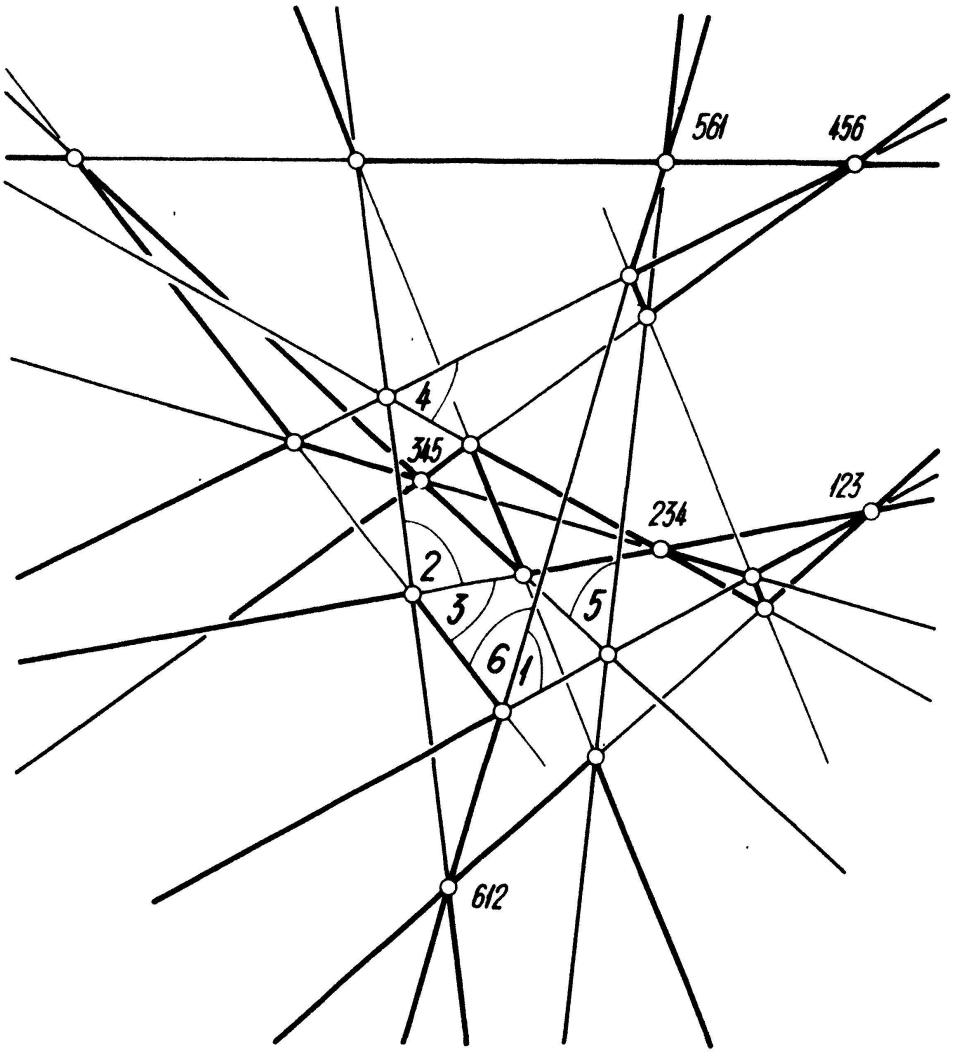
$$4 = (34, 45), \quad 5 = (45, 56), \quad 6 = (56, 61),$$

in der Reihenfolge 123456 genommen, geben den gesuchten Zyklus (123456).

In Figur 1 sind drei der sechs tetraedrischen Kerne ganz im Endlichen. Ein Kern erstreckt sich von der Ecke 123 links unten nach links über die Grenzebene und von rechts zurück nach einem in der Ebene 6 befindlichen dreiseitigen Gebiet, ebenso ein Kern von der Ecke 456 links oben als Spitze zu einem dreiseitigen Gebiet in der Ebene 1. Schliesslich erstreckt sich ein solcher tetraedrischer Kern von der Kante rechts oben nach oben über die Grenzebene, von unten zurück zur Kante auf 12. Figur 2 zeigt den Kranz der Tetraeder von Figur 1 in kleinerem Maßstab.

Auch in Figur 4 sind drei der sechs tetraedrischen Kerne ganz im Endlichen. Figur 5 zeigt – verkleinert – den Kranz.

Von den zwanzig Ecken des vollständigen Sechsflachs erscheinen deren achtzehn als Ecken der sechs tetraedrischen Kerne. Die beiden übrigen, die *Hauptpunkte* des Sechsflachs, sind die Schnittpunkte 135 und 246. Das vollständige Sechsflach besitzt somit zwei Ecken, die vor den übrigen achtzehn qualitativ ausgezeichnet sind.



Figur 4

Die Hauptpunkte sind Gegenecken von *zwei* sechsflächigen, je vierseitig begrenzten Kernen; diese beiden Kerne nennen wir die *Hauptkerne*. Die Ebenen 1 und 2 enthalten Gegenflächen des einen Hauptkerns, ebenso die Ebenen 3 und 4, 5 und 6. Der zweite, mit jenem verkettete Hauptkern besitzt Gegenflächen in den Ebenen 2 und 3, 4 und 5, 6 und 1. Man studiere die merkwürdige gegenseitige Lage der Hauptkerne.

In Figur 3 sind die Hauptkerne von Figur 1 verkleinert dargestellt, desgleichen in Figur 6 diejenigen der Figur 4.

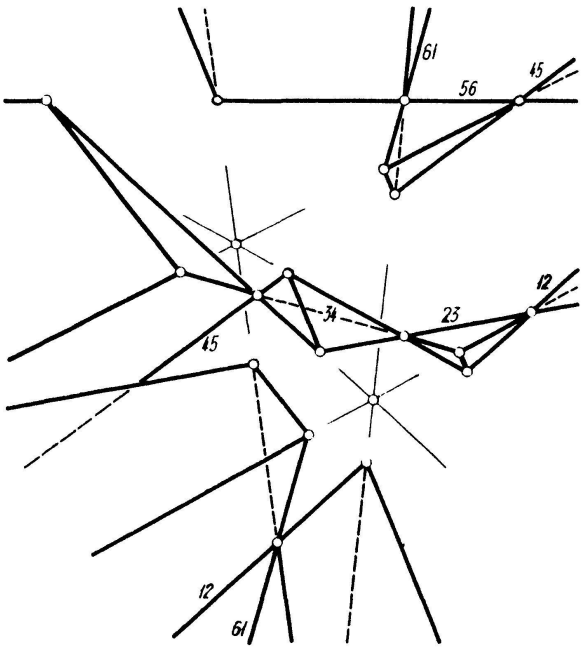
Die Gegenflächen des einen Hauptkerns schneiden sich in den Geraden 12, 34, 56, die Gegenflächen des zweiten in den Geraden 23, 45, 61.

Von den zwanzig Ecken des vollständigen Sechsflachs werden deren vierzehn (zweimal acht minus zwei) als Ecken der beiden Hauptkerne beansprucht. Die übrigen sechs stellen genau die Ecken des Hauptzuges dar.

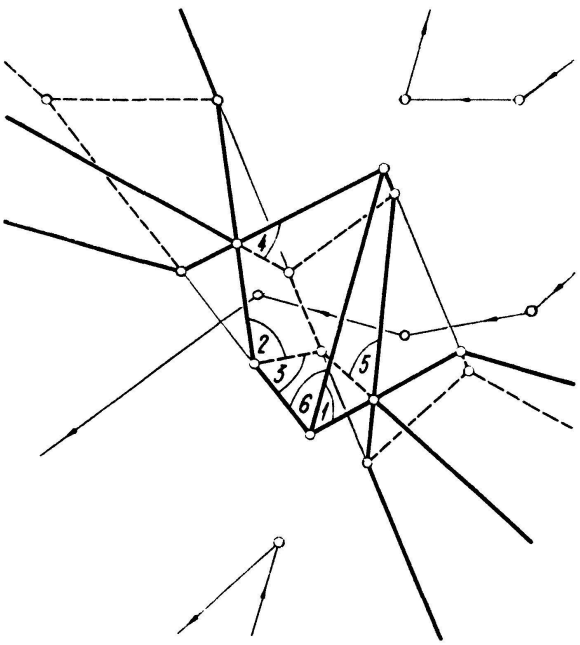
Hat man den Zyklus der sechs Ebenen einmal gefunden, so erscheint alles Weitere in der schönsten Ordnung. Zum Beispiel werden die tetraedrischen Kerne aufeinanderfolgend gebildet von den Ebenen

1234, 2345, 3456, 4561, 5612, 6123.

Auf jeder Geraden der Konfiguration liegen vier Punkte. Der Zyklus (123456) gibt sie in natürlicher Folge. Zum Beispiel ergeben sich die vier Punkte auf 12 als Schnitte



Figur 5



Figur 6

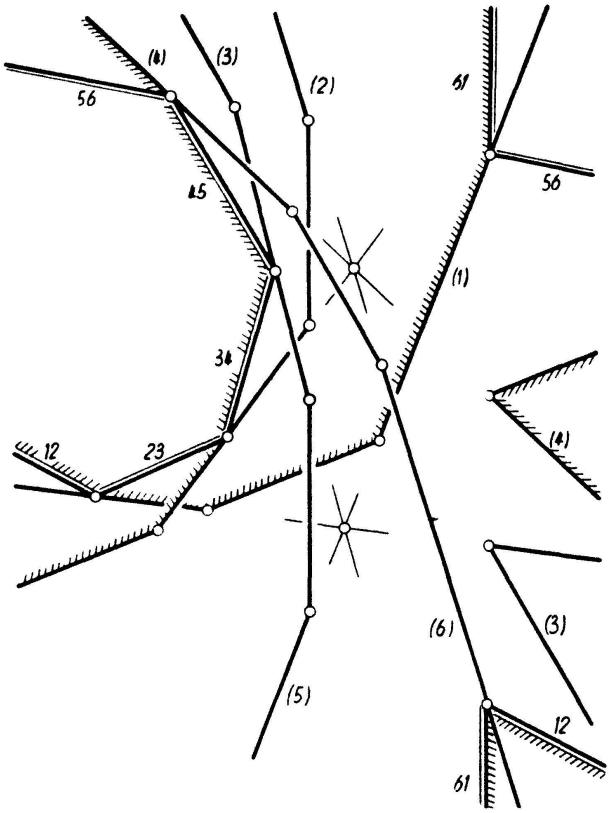
von 12 mit den Ebenen 3, 4, 5, 6 in natürlicher Ordnung, entsprechend die vier Punkte auf 24 als Schnitte von 24 mit den Ebenen 1, 3, 5, 6.

In die Konfiguration sind sechs ebene Gliederungen durch je fünf Geraden komponiert. Jede der sechs Ebenen wird nämlich von den übrigen fünf in je fünf Geraden geschnitten, welche in der betreffenden Ebene ein fünfseitiges Gebiet mit einem Kranz von fünf dreiseitigen Gebieten bestimmen.

Das fünfseitige Gebiet in der Ebene 1 erhält man folgendermassen: Man nimmt die Geraden 12, 13, 14, 15, 16 in dieser Reihenfolge und erhält den Zyklus (12, 13, 14, 15, 16) der fünf Geraden, mit dessen Hilfe das entsprechende Gebiet leicht bestimmbar ist. Entsprechend hat man zum Beispiel in der Ebene 3 den Zyklus (31, 32, 34, 35, 36), in der Ebene 4 den Zyklus (41, 42, 43, 45, 46) usw. In Figur 7 sind die sechs fünfseitigen Gebiete (1), (2) usw. in den Ebenen 1 bzw. 2 usw. der Konfiguration von Figur 1 verkleinert angedeutet, um dem Leser das Auffinden zu erleichtern [die Gebiete (1) und (4) sind leicht hervorgehoben]. Sie hängen in eigenartiger Weise zusammen. Je zwei haben eine Kante des Hauptzuges gemeinsam, nämlich die fünfseitigen Gebiete (1) und (2) die auf der Geraden 12 befindliche Kante des Hauptzuges,

(2) und (3) die auf 23 befindliche Kante usw. Jedes solche fünfseitige Gebiet ist die gemeinsame Begrenzung von zwei sechsflächigen Kernen. Unterscheidet man Vorder- und Rückseite jener Gebiete, so hat man es mit zwölf fünfseitigen Gebieten zu tun.

In Figur 8 ist ein Fall dargestellt, in welchem die beiden Hauptpunkte 135, 246 der Grenzebene angehören; es handelt sich somit um die gegenseitige Durchdringung von zwei dreiseitigen Prismenflächen. Im Falle der Figur 8 sind fünf der tetraedrischen



Figur 7

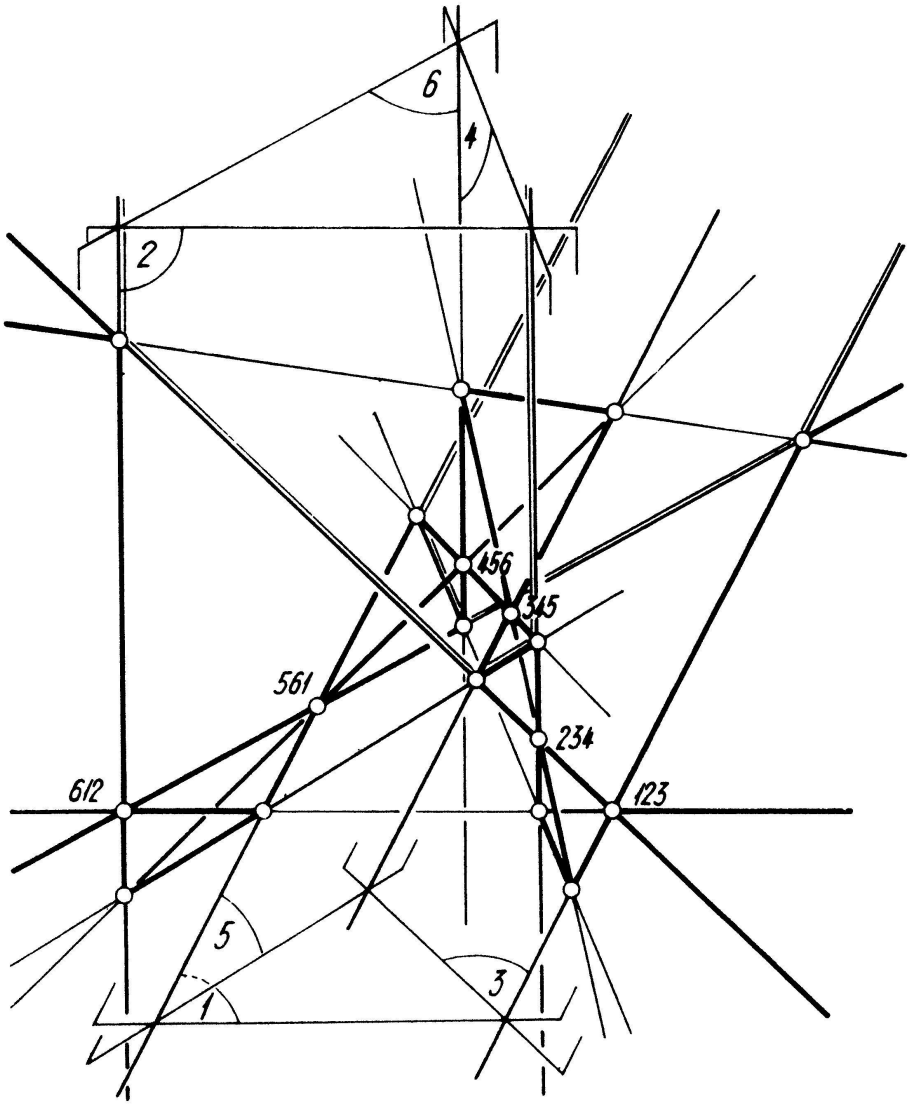
Kerne ganz im Endlichen. Figur 9 zeigt – verkleinert – die sechs fünfseitigen Gebiete der Konfiguration von Figur 8.

Um kurz angeben zu können, von welchen Ebenen ein Kern begrenzt ist und wie die begrenzenden Gebiete beschaffen sind, führen wir die *Charakteristik* eines Kerns ein. Die Charakteristik besteht aus sechs aufeinanderfolgenden Ziffern; die erste bezieht sich auf die Ebene 1, die zweite auf die Ebene 2, die dritte auf die Ebene 3 usw. Die Ziffer selbst gibt die Anzahl der Strecken an, von denen das in der betreffenden Ebene liegende begrenzende Gebiet umrandet ist. So stellt die Charakteristik (330033) den tetraedrischen Kern dar, an dessen Bildung die Ebenen 3 und 4 *nicht* beteiligt sind, während ihn die Ebenen 1, 2, 5, 6 je in einem *drei*seitigen Gebiet begrenzen. Die Charakteristik (553443) stellt einen sechsflächigen Kern dar, an dem also alle sechs Ebenen beteiligt sind. Die Ebenen 1 und 2 begrenzen den Kern je in einem fünfseitigen Gebiet, die Ebenen 3 und 6 je in einem dreiseitigen, die Ebenen 4 und 5 je in einem vierseitigen Gebiet.

Die beiden Hauptkerne haben dieselbe Charakteristik (444444). Man verdeutliche sich, dass der eine Hauptkern als Durchdringungsgebilde der drei Tetraeder 1234,

3456 und 5612 aufgefasst werden kann, der andere als Durchdringungsgebilde von 2345, 4561, 6123.

Die übrigen 24 Kerne werden durch ihre Charakteristik eindeutig bestimmt. Zunächst die sechs tetraedrischen Kerne durch (333300), (033330), (003333), (300333),



Figur 8

(330033), (333003). Dann gibt es zwölf fünfflächige Kerne, begrenzt von zwei dreiseitigen und drei vierseitigen Gebieten, nämlich:

(334440), (444330), (044433), (033444), (403344), (304443),

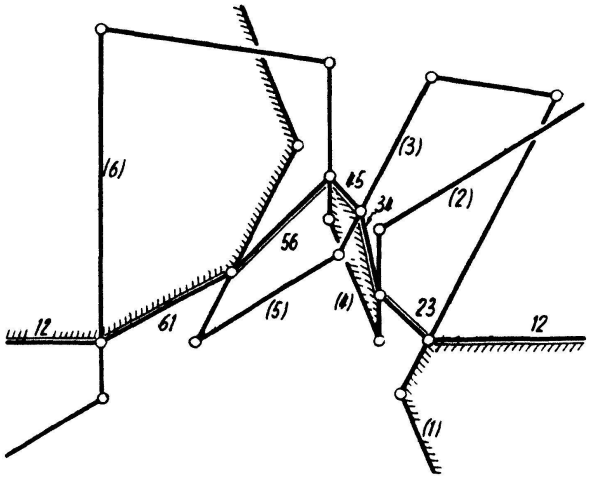
(330444), (440334), (444033), (433044), (443304), (344403).

Schliesslich sind noch sechs sechsflächige Kerne vorhanden, begrenzt von zwei dreiseitigen, zwei vierseitigen und zwei fünfseitigen Gebieten:

(553443), (355344), (435534), (443553), (344355), (534435).

In Figur 8 sind zum Beispiel die Kerne (435534) und (443553) unschwer zu erkennen.

Von besonderem Interesse ist die Frage, wie das Hexaeder als Ausartung des allgemeinen vollständigen Sechsflachs zustande kommt. Man erlangt für den Würfel, allgemeiner für die Reyesche Konfiguration ein tieferes Verständnis, wenn man sich klar gemacht hat, wie die Würfelstruktur mit den noch im Allgemeinen sich haltenden Verhältnissen zusammenhängt. Wir geben dazu einige Andeutungen, die anhand der Figuren den eigentümlichen Übergang zum speziellen Sechsflach, zum Hexaeder zu verfolgen gestatten. Im letzteren bilden die Schnittgeraden der Gegenflächen ein



Figur 9

ebenes Dreiseit. Sind 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 je Gegenflächen eines Hexaeders, so gehören die Schnittgeraden 12, 34, 56 einer Ebene an, während sie beim allgemeinen Sechsflach windschief sind.

Die Flächen 1, 2, 3, 4 und 3, 4, 5, 6 und 5, 6, 1, 2 gehen je durch einen Punkt. Die von 1234, 3456 und 5612 erzeugten tetraedrischen Kerne schrumpfen also je auf einen Punkt zusammen.

Der durch 2345 bestimmte, uns hier interessierende Kern ist das an die Würfelkante auf 25 sich anschliessende tetraedrische Gebiet mit der Gegenkante auf 34. Der weiter in Frage kommende, durch 4561 erzeugte Kern besitzt die Würfelkante auf 41 als Kante, während deren Gegenkante der Geraden 56 angehört. Entsprechende Bedeutung haben die Würfelkanten auf 63 und 12 für 6123.

Aus dem zweiten Hauptkern wird der sechsflächige Kern, begrenzt von sechs dreiseitigen ebenen Gebieten, der sich an die Ecken 135 und 246 des Hexaeders angliedert. Aber nun treten zu diesem Kern drei weitere mit ihm gleichberechtigte sechsflächige Kerne gleicher Art hinzu, die sich an die übrigen drei Paare von Gegenecken anschliessen. Damit aus dem allgemeinen Sechsflach das gewöhnliche Hexaeder zustande kommt, muss die Zweiheit der beiden Hauptkerne aufgehoben werden.

Bemerkung: Die Gliederung des projektiven Raumes durch n Ebenen allgemeiner Lage lässt sich in bezug auf die Anzahl E_n (die man sofort angeben kann) der entstehenden Ecken, die Anzahl R_n der erzeugten Raumteile, die Anzahl F_n der die Raumteile begrenzenden Flächenstücke und die Anzahl K_n der begrenzenden Kanten leicht beschreiben. Man denkt sich zunächst die Gliederung durch m Ebenen und prüft, wie sich die vier Zahlen E_m, K_m, F_m, R_m bei Hinzukommen einer $(m+1)$-ten Ebene

ändern. Man erhält:

$$E_{m+1}=E_m+\binom{m}{2},\quad K_{m+1}=K_m+3\binom{m}{2},\quad F_{m+1}=F_m+1+3\binom{m}{2},\quad R_{m+1}=R_m+1+\binom{m}{2}.$$

Und hieraus ergibt sich mit $E_3=1$, $K_3=3$, $F_3=6$, $R_3=4$:

$$E_n=\binom{n}{3},\quad K_n=3\binom{n}{3},\quad F_n=3\binom{n}{3}+n,\quad R_n=\binom{n}{3}+n.$$

Hingegen ist es schwierig, die Gliederung im einzelnen zu kennzeichnen. Für jedes $n>6$ ergeben sich jedenfalls wesentlich verschiedene Typen. Es scheint aber heute noch unmöglich zu sein, über die Anzahl der Typen allgemeine Aussagen zu machen. Der Beweis (Zurückführung auf die Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome) dafür, dass der Fall $n=6$ (der die Topologie der kubischen Raumkurven und kubischen Ebenengewinde begründet) stets denselben, im Vorangehenden anschaulich beschriebenen Gliederungstypus liefert, ist recht umständlich.

(Es folgen am eingangs genannten Orte weitere Bemerkungen und Übungen zum Thema.)

L. LOCHER-ERNST, Winterthur

Schraubung und Netzprojektion

Unter «*Netzprojektion*» versteht man jene Abbildung des projektiven Punktraumes auf die Punkte einer Bildebene, bei der die Strahlen eines Drehnetzes als Projektionsstrahlen fungieren; als Bildebene wird dabei die Mittelebene des Netzes verwendet. Der Netzriss eines Punktes P ist demnach der Bildspurpunkt des durch P legbaren Netzstrahles. Dieses Abbildungsverfahren wurde im Anschluss an eine Arbeit von L. TUSCHEL [1][1]) von verschiedenen Gesichtspunkten aus untersucht [2], [3]. Das Ziel dieser Note ist es, die Netzprojektion auf elementarem Weg aus den *Gesetzen der euklidischen Schraubung* zu entwickeln und darüber hinaus einige Beispiele für die Fruchtbarkeit dieses Gedankens zu geben. Ausserdem sollen die Verhältnisse in der Bildebene konsequent unter Verwendung komplexer Zahlen beschrieben werden und so aufs neue die Zweckmässigkeit dieses Kalküls für die ebene Geometrie demonstriert werden.

Wir legen durch einen Punkt O der lotrecht gedachten Schraubachse z eine waagrechte Ebene μ und betrachten die Schraubtangenten ihrer Punkte in der Rechtsschraubung mit dem Parameter p (im folgenden kurz «*Grundschraubung*» genannt). Ist r der Abstand eines Punktes A der Bildebene μ von O und α der Neigungswinkel der Schraubtangente a von A gegen μ, so gilt bekanntlich (Figur 1):

$$r\,\mathrm{tg}\,\alpha=p. \tag{1}$$

Die Gesamtheit dieser Schraubtangenten a ist eine gewisse Strahlkongruenz $\mathfrak{N}$. Dreht sich die Schraubtangente a um die z-Achse, so überstreicht a ein Drehhyperboloid, dessen Nebenscheitel auf der z-Achse liegen und die Höhenkoten $\pm i\,p$ besitzen. $\mathfrak{N}$ besteht daher aus den rechtsgewundenen Erzeugenden von ∞^1 koaxialen Dreh-

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 40.