

# Aufgaben

Autor(en): **[s.n.]**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **12 (1957)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19208>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- [5] G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven II* (Teubner, Leipzig 1911), S. 195 ff.  
 [6] W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 156, 155–173 (1948).

## Ungelöste Probleme

**Nr. 16.** Es sei  $K$  ein eigentlicher ebener Eibereich. Für einen inneren Punkt  $P \in K$  bilde man das Integral des reziproken Stützabstandes

$$B(P) = \int \frac{ds}{p},$$

wobei  $ds$  das Längendifferential der Randkurve von  $K$  und  $p$  den Abstand der zugehörigen Stützgeraden von  $P$  bedeuten und die Integration über den gesamten Rand von  $K$  erstreckt werden soll. Es existiert dann die untere Grenze

$$B = \inf B(P) \quad [P \in K],$$

wo  $P$  alle inneren Punkte von  $K$  durchläuft.

In der von G. PÓLYA<sup>1)</sup> und seinen Mitarbeitern behandelten Theorie der physikalischen Eibereichsfunktionale spielt die Grösse

$$\Phi = A^2 B I^{-1},$$

wo  $A$  den Flächeninhalt und  $I$  das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment von  $K$  bezeichnen, eine wichtige Rolle als Vergleichsfunktional.

Nach einer durch zahlreiche Sonderuntersuchungen gestützten Vermutung von Herrn G. PÓLYA<sup>2)</sup> gilt die Ungleichung

$$36 < \Phi \leq 54,$$

wo rechts Gleichheit für das reguläre Dreieck besteht, während die Schranke links durch sehr schmale gleichschenklige Dreiecke angenähert wird. Spezielle Zwischenwerte des interessanten Funktionals sind ferner:

$$\Phi = 4\pi^2 \quad [K = \text{Ellipse}]; \quad \Phi = 48 \quad [K = \text{Parallelogramm}].$$

Von verschiedenen Seiten wurde bisher vergeblich versucht, die obenstehende Ungleichung zu beweisen. H. HADWIGER

## Aufgaben

**Aufgabe 258.** Von einer rationalen, bizirkularen Quartik  $q$  mit dem Doppelpunkt  $D$  kennt man eine der beiden (als reell vorausgesetzten) Doppelpunkt tangenten sowie die beiden restlichen aus  $D$  an  $q$  legbaren Tangenten  $t_1, t_2$  samt ihren Berührungspunkten  $T_1, T_2$ . Man konstruiere die Quartik, wenn  $t_1, t_2$  ebenfalls reell sind.

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

<sup>1)</sup> Vergleiche G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press 1951).

<sup>2)</sup> Brief von G. PÓLYA an den Unterzeichneten vom 3. Juli 1956.

*Lösung der Aufgabensteller:* Jede rationale, bizirkulare Quartik  $q$  ist Fusspunktskurve eines Mittelpunktskegelschnittes  $k$  [siehe zum Beispiel H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (1908), S. 5]. Legt man den Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems in den Doppelpunkt  $D$  und hat  $k$  die Halbachsen  $a, b$  und die Mittelpunktskoordinaten  $(-\alpha, -\beta)$ , so lautet die Gleichung seiner Fusspunktsquartik  $q$  bezüglich des Poles  $D$  (wenn  $x_0$  die homogenisierende Koordinate bedeutet)

$$\left. \begin{aligned} f \equiv (x_1^2 + x_2^2)^2 + 2(\alpha x_0 x_1 + \beta x_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ + (\alpha^2 - a^2)x_0^2 x_1^2 + 2\alpha\beta x_0^2 x_1 x_2 + (\beta^2 - b^2)x_0^2 x_2^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die erste Polare  $q_1$  von  $q$  bezüglich  $D$

$$f_1 \equiv (\alpha x_1 + \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2) + (\alpha^2 - a^2)x_0 x_1^2 + 2\alpha\beta x_0 x_1 x_2 + (\beta^2 - b^2)x_0 x_2^2 = 0 \quad (2)$$

schneidet  $q$  in den absoluten Punkten  $I, J$  (je zweifach zu zählen), in dem endlichen Doppelpunkt  $D$  (sechsfach zu zählen, da  $q, q_1$  in  $D$  gleiche Doppelpunktstangenten besitzen) und in den beiden Punkten  $T_1, T_2$ , den Berührungspunkten der aus  $D$  an  $q$  legbaren Tangenten  $t_1, t_2$ .

Aus  $f - f_1 = 0$  erkennt man, dass die gesuchten Punkte  $T_1, T_2$  auch auf dem Kreis  $m$

$$x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_0 x_1 + \beta x_0 x_2 = 0 \quad (3)$$

liegen. Dieser Kreis  $m$  ist übrigens die Sehnenmittenkurve von  $q$  bezüglich  $D$ . Aus (2) und (3) ergeben sich die Richtungen der gesuchten Tangenten  $t_1, t_2$  zu

$$a x_1 \pm b x_2 = 0. \quad (4)$$

Sind  $t_1, t_2$  reell, so ist  $q$  die Fusspunktskurve einer Hyperbel  $k$ , deren Asymptoten zu  $t_1, t_2$  normal stehen.

*Konstruktionsvorgang:* Zeichnet man durch  $T_1$  die Normale zu  $t_1$ , durch  $T_2$  die Normale zu  $t_2$ , so erhält man die Asymptoten der Hyperbel  $k$ . Das Lot auf die gegebene Doppelpunktstangente in  $D$  liefert eine weitere Tangente von  $k$ , wodurch  $k$  und damit  $q$  als ihre Fusspunktskurve bezüglich  $D$  leicht konstruierbar ist.

Einen anderen, allerdings konstruktiv etwas schwerfälligeren Weg liefert die Inversion an einem Kreis mit der Mitte  $D$ . Durch diese quadratische Transformation geht die gegebene Quartik  $q$ , die die drei Hauptpunkte der Inversion zu Doppelpunkten besitzt, in einen Kegelschnitt  $e$  über, von dem man (nach Verwertung der gegebenen Stücke von  $q$ ) zwei Linienelemente und einen Fernpunkt kennt.

Lösungen mittels einer Kreisverwandtschaft sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 259.** Soit  $\pi$  un plan quelconque.  $O$  et  $P$  deux points de l'espace,  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) les projections de  $\overline{OP}$  sur les côtés d'un polygone régulier situé dans  $\pi$ . Alors l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_1^n a_k^2,$$

c'est-à-dire le moyen des carrés des projections de  $\overline{OP}$  sur les côtés du polygone a la même valeur pour tous les polygones réguliers du plan. H. BREMEKAMP, Delft

*Lösung:* Da die Länge der Normalprojektion der Strecke  $\overline{OP}$  auf eine Gerade nur von der Richtung dieser Geraden abhängt, legen wir durch die Normalprojektion  $O'$  von  $O$  auf die Ebene  $\pi$  die  $n$  Geraden  $g_1, g_2, \dots, g_n$  so, dass  $\sphericalangle g_j g_{j+1} = 2\pi/n$  ist. Ist  $P'$  die Normalprojektion von  $P$  auf  $\pi$ , dann liegt die Normalprojektion von  $P$  auf  $g_j$  auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $d = \overline{O'P'}$ , und es ist  $a_j = d \cos(\varphi_0 + 2j\pi/n)$ .

Mittels der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^n \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\beta\right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

erhält man

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 = \frac{d^2}{2n} \sum_{j=1}^n \left\{ 1 + \cos\left(2\varphi_0 + \frac{4j\pi}{n}\right) \right\} = \frac{d^2}{2}.$$

Lösungen dieser Art sandten C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), R. WHITEHEAD (Camborne, Cornwall, England), G. N. VLAHAVAS (London).

**Aufgabe 260.** Wählt man auf jeder Seite eines Dreiecks einen Punkt, so bestimmen diese drei Punkte ein eingeschriebenes Dreieck und drei Randdreiecke. Man weise nach, dass die Fläche des eingeschriebenen Dreiecks mindestens so gross ist wie die des kleinsten Randdreiecks.

Gilt eine entsprechende Aussage für die Umfänge der Dreiecke? H. DEBRUNNER, Bern

*Lösung:* Da die Behauptung affin invariant ist, kann man das in Dreieck  $ABC$  eingeschriebene Dreieck  $MNP$  ( $M$  auf  $BC$ ,  $N$  auf  $CA$ ,  $P$  auf  $AB$ ) gleichseitig annehmen. Die Bezeichnungen können weiter so gewählt werden, dass  $\sphericalangle A \geq \sphericalangle B \geq \sphericalangle C$ . Dann ist  $\sphericalangle A \geq 60^\circ = \sphericalangle PMN$ . Der Kreisbogen  $PMN$  ist dann mindestens gleich «hoch» über  $NP$  wie der Kreisbogen  $PAN$ . [Die «Höhe» des Fasskreisbogens zum Winkel  $\alpha$  über der Sehne  $a$  beträgt  $(a/2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$ .] Da  $M$  der höchste Punkt des erstgenannten Bogens ist, ist Dreieck  $MNP \geq$  Dreieck  $PAN$ . A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Graz.

Die Frage, ob eine entsprechende Aussage für die Umfänge der Dreiecke gilt, bleibt offen.

**Aufgabe 261.** Prove that the first  $n$  terms in the binomial expansion of  $(2-1)^{-n}$  sum to  $1/2$ . LEO MOSER, Edmonton (Kanada)

*Solution:* Since

$$(2-1)^{-n} = 2^{-n} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r}$$

the sum of the first  $n$  terms is equal to

$$s_n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r}.$$

Then

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_1^n \binom{n+r-1}{r-1} 2^{-n-r-1} + \sum_0^n \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r-1} \\ &= \sum_0^{n-1} \binom{n+r}{r} 2^{-n-r-2} + \sum_0^n \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r-1} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} - 2^{-2n-2} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2} s_n + 2^{-2n-1} \binom{2n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{2} s_n + 2^{-2n-1} \left\{ \binom{2n-1}{n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{2} s_n, \end{aligned}$$

so that  $s_{n+1} = s_n$ . Since  $s_1 = 1/2$  it follows that

$$s_n = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1).$$

L. CARLITZ, Durham (USA)

Dieselbe Lösung sandten A. BAGER (Hjørring), R. LAUFFER (Graz) und J. SCHOPP (Budapest). Beweise mittels vollständiger Induktion gaben R. KLÖTZLER (Leipzig) und H. WAGNER (Karlsruhe).

**Aufgabe 262.** Démontrer que l'intégrale double

$$\frac{h^2}{\pi} \iint e^{-h^2(x^2+y^2)} dx dy$$

étendu au domaine entre les droites  $y + pn = a^{-1}(x + pn)$  et  $y + pn = a(x + pn)$  est égale à l'intégrale simple

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-b}^{+b} e^{-h_1^2 \xi^2} d\xi \quad \left( h_1 = hpn, \quad b = \frac{a-1}{\sqrt{a^2+1}} \right).$$

H. BREMEKAMP, Delft

*Solution de l'auteur:* Soit  $(y + pn)/(x + pn) = u$ . On a  $y = u(x + pn) - pn$ ,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (u^2 + 1)x^2 + 2pnx(u^2 - u) + p^2n^2(u - 1)^2 \\ &= (u^2 + 1) \left\{ x^2 + 2pnx \frac{u(u-1)}{u^2+1} + p^2n^2 \frac{u^2(u-1)^2}{(u^2+1)^2} \right\} + p^2n^2 \frac{(u-1)^2}{u^2+1} \\ &= (u^2 + 1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2, \quad v = x + \frac{u(u-1)}{u^2+1} pn. \end{aligned}$$

Introduisons  $u$  et  $v$  comme variables d'intégration. On trouve

$$x = v - \frac{u(u-1)}{u^2+1} pn, \quad y = uv + \frac{u-1}{u^2+1} pn,$$

et le déterminant de JACOBI

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{u^2+2u-1}{(u^2+1)^2} pn & 1 \\ v - \frac{u^2-2u-1}{(u^2+1)^2} pn & u \end{vmatrix} = -\left(v + \frac{u+1}{u^2+1} pn\right);$$

$u$  parcourt l'intervalle de  $1/a$  à  $a$ ,  $v$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ . L'intégrale double, qui est évidemment positif, devient

$$\frac{h^2}{\pi} \int_{1/a}^a du \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -h^2 \left\{ (u^2+1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2 \right\} \right] \left( v + \frac{u+1}{u^2+1} pn \right) dv.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -h^2 \left\{ (u^2+1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2 \right\} \right] v dv = 0.$$

<sup>1)</sup>  $\exp[\alpha] = e^\alpha$ .

Nous avons encore à déterminer

$$\begin{aligned} & \frac{h^2 p n}{\pi} \int_{1/a}^a \frac{u+1}{u^2+1} \exp\left[-\frac{(u-1)^2}{u^2+1} h^2 p^2 n^2\right] du \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-h^2(u^2+1)v^2] dv \\ &= \frac{h p n}{\sqrt{\pi}} \int_{1/a}^a \frac{u+1}{(u^2+1)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(u-1)^2}{u^2+1} h^2 p^2 n^2\right] du, \end{aligned}$$

parce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-h^2(u^2+1)v^2] dv = \frac{\sqrt{\pi}}{h(u^2+1)^{1/2}}.$$

Choisissant maintenant comme variable d'intégration

$$\xi = \frac{u-1}{(u^2+1)^{1/2}}$$

nous obtenons le résultat désiré. – Le problème est visiblement issu d'une question de probabilité.

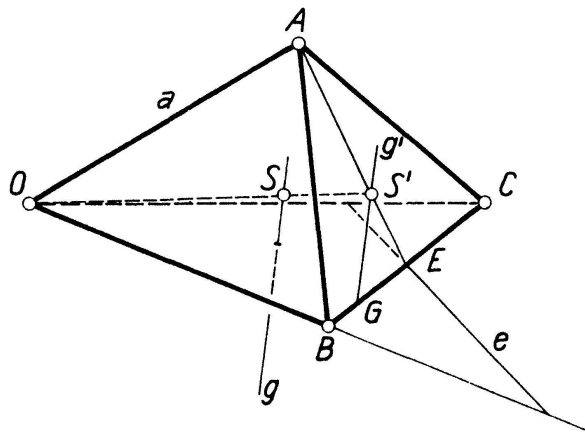
**Aufgabe 263.** Zwei Seiten eines konvexen Dreikants werden von einer Geraden  $g$  geschnitten. Man bestimme die zu  $g$  parallele Ebene so, dass der Schwerpunkt des entstehenden Tetraeders auf  $g$  liegt.

J. SCHOPP, Budapest

*Lösung:*  $O$  sei die Ecke des Trieders, die übrigen Ecken des Tetraeders seien der Reihe nach  $A, B, C$ , so dass die gegebene Gerade  $g$  die Seitenfläche  $OBC$  durchschneide.  $S$  sei der Schwerpunkt des Tetraeders, der Schwerpunkt der  $O$  gegenüberliegenden Seitenfläche sei  $S'$  (Figur 1).

Der Ort des Punktes  $S$  ist die gegebene Gerade  $g$ . Wegen  $OS:OS' = 3:4$  ergibt sich als Ort für  $S'$  eine der Geraden  $g$  parallele Gerade  $g'$ . Da die Ebene  $ABC$  parallel zu  $g$  ist, enthält sie die Gerade  $g'$ .

Die auf der Seitenfläche  $ABC$  gelegene Schwerlinie  $s_a$  liegt auf der Geraden  $AS'$ . Für ihren Schnittpunkt  $E$  mit der Kante  $BC$  gilt offenbar  $S'E:AS' = 1:2$ . Da der geometrische Ort des Punktes  $A$  bzw.  $S'$  die Gerade  $a$  bzw.  $g'$  ist, erhält man als Ort des Punktes  $E$  die zu  $a$  und  $g'$  parallele Ebene  $\varepsilon$ , wo auf jeder gemeinsamen Transversalen von  $a$  und  $g'$  die obige Proportion der Entfernungen für den Schnittpunkt mit der Ebene und die beiden Fusspunkte gilt.



Figur 1

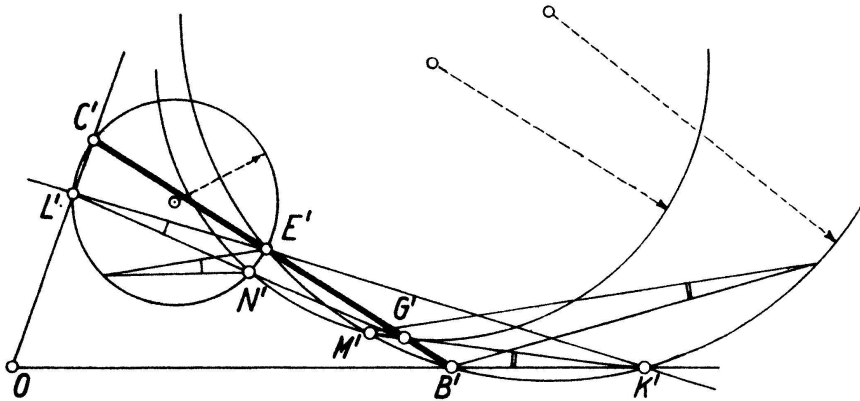
Da  $E$  in der Ebene  $OBC$  liegt, erhalten wir als geometrischen Ort die Gerade  $e$ , als Schnittlinie der Ebenen  $\varepsilon$  und  $OBC$ .

Mit Vollzug dieser Konstruktionen haben wir die Aufgabe auf eine in der Ebene  $OBC$  zu vollziehende ebene Aufgabe reduziert:

Zwischen den Geraden  $OB$  und  $OC$  ist eine Strecke  $BC$  einzuschieben, die durch den Schnittpunkt  $G$  der Geraden  $g'$  mit der Ebene  $OBC$  geht und von der Geraden  $e$  halbiert wird.

Ähnlichkeitsbetrachtungen ergeben die Lösung der Aufgabe: Wir gehen von irgendeiner Strecke  $B'C'$  (Figur 2) aus und halbieren sie. Der Halbierungspunkt sei  $E'$ . Der Winkel der Geraden  $OB$  und  $e$  ist gegeben, die Ortskurve ihres Schnittpunktes  $K'$  ist daher ein Kreisbogen. Dies gilt in ähnlicher Weise für den Schnittpunkt  $L'$  der Geraden

$OC$  und  $e$ . Die Winkel  $G'K'B'$  und  $G'L'E'$  sind gegeben, die auf den entsprechenden Kreisbogen gelegenen Fusspunkte  $M'$  bzw.  $N'$  der Geraden  $K'G'$  bzw.  $L'G'$  können daher konstruiert werden. Und da der Winkel  $M'G'N'$  als Aussenwinkel im Dreieck  $L'G'K'$  bekannt ist, erhält man als Ortskurve für  $G'$  einen Kreisbogen, welcher  $B'C'$  in



Figur 2

$G'$  trifft. Durch die Geraden  $G'N'$  bzw.  $G'M'$  werden schliesslich die Punkte  $L'$  bzw.  $K'$  auf den betreffenden Ortsbogen bestimmt.

Durch Konstruktion der ähnlichen Figur ist die Aufgabe gelöst.

J. VIGASSY, Budapest

In der Lösung des Aufgabenstellers und derjenigen von A. SCHWARZ (Seuzach) ist  $OBC$  diejenige Dreikantsebene, deren Schnittpunkt  $G$  mit  $g$  ausserhalb der Seite  $OBC$  liegt. Zur Lösung der planimetrischen Hilfsaufgabe verwendet J. SCHOPP die Hyperbel, von der  $\overline{OG}$  ein Durchmesser ist, während die Asymptoten zu  $OB$  und  $OC$  parallel sind. Von dem durch  $O$  gehenden Hyperbelast werden die zwischen  $OB$  und  $OC$  liegenden Abschnitte der Transversalen durch  $G$  halbiert. A. SCHWARZ benutzt die Parabel, die  $OB$ ,  $OC$  und  $e$  so berührt, dass  $e$  parallel zur Berührungssehne von  $OB$  und  $OC$  ist. Der Abschnitt der durch  $G$  an den Parabelbogen gelegten Tangente wird dann von  $e$  halbiert. K. LEGÉNDY (Budapest) studiert die Bewegung der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf den Kanten des Dreikants bei gleichförmiger Bewegung von  $S$  auf  $g$ . Aus der Lage in zwei beliebigen Zeitpunkten lässt sich die gesuchte zu  $g$  parallele Schnittebene konstruieren. Eine Lösung mit analytischer Geometrie des Raumes gab R. LAUFFER (Graz).

### Neue Aufgaben

291. Man bestimme den geometrischen Ort der Brennpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche die vier Seiten eines gegebenen Parallelogramms berühren.

J. SCHOPP, Budapest

292. Sur un diamètre  $AB$  d'un cercle  $(O)$ , on marque un point  $C$ , entre  $A$  et  $B$ , et l'on décrit sur  $CB$  le demi-cercle  $(O')$ , au-dessus de  $AB$ , puis les cercles  $(\omega_1)$ ,  $(\omega_2)$ , ...,  $(\omega_n)$  tangents au demi-cercle  $(O)$ , à la demi-corde  $CD$  perpendiculaire à  $AB$  et, de proche en proche, aux cercles  $(O')$ ,  $(\omega_1)$ ,  $(\omega_2)$ , ...,  $(\omega_{n-1})$ , au-dessus de  $AB$ . Exprimer le rayon  $r_n$  du cercle  $(\omega_n)$ , d'indice donné  $n$ . Pour quelle position de  $C$  sur  $AB$  le cercle  $(\omega_3)$ , d'indice 3, est-il le plus grand?

V. THÉBAULT, Tennie (Sarthe, France)

293. Man zerlege für jede Primzahl  $p$  das zwölfte Kreisteilungspolynom

$$\Phi_{12} \equiv x^4 - x^2 + 1$$

so explizit wie möglich mod  $p$  in irreduzible Faktoren mod  $p$ .

A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

294. Prove the proposition: If a side of a triangle is less than the average (arithmetic mean) of the two other sides, the opposite angle is less than the average of the two other angles.  
 G. PÓLYA, Palo Alto (California, USA)

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1.  $\sqrt[3]{1,7649} = \sqrt[3]{5}$ . [ $x = 1,7649$ .]
2. Die dreireihige Determinante aus neun aufeinanderfolgenden Quadratzahlen

$$\begin{vmatrix} u^2 & (u+1)^2 & (u+2)^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & (u+8)^2 \end{vmatrix}$$

hat den festen Wert  $-6^3$ .

3.  $X, Y, Z, W$  sind die Seitenmitten eines beliebigen konvexen Vierecks,  $P$  ist ein Punkt in seinem Innern. Durch die Schnitte  $PX, PY, PZ, PW$  wird das Viereck in vier Teile zerlegt, aus denen stets ein anderes Viereck zusammengesetzt werden kann.
4. In der Ebene des Dreiecks  $ABC$  bewegt sich ein Punkt  $P$ . Die Schwerpunkte der Dreiecke  $PAB, PBC, PCA$  sind die Ecken eines Dreiecks fester Form und Grösse.
5. Zum sicheren Zeichnen einer Ellipse, von der die Hauptachsen  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  gegeben sind, bedient man sich mit Vorteil der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten. Man hat dazu das Lot aus einer Ecke des Tangentenrechtecks auf die Strecke  $B_1A_1$  zu fällen. Der Fusspunkt dieses Lotes auf  $B_1A_1$  sei  $F$ . Der Punkt mit der Abszisse  $B_1F$  und der Ordinate  $A_1F$  ist ein günstig zwischen den beiden Krümmungskreisen gelegener Punkt der Ellipse, seine Tangente fällt unter  $45^\circ$ !  
 [Aus: HOHENBERG, *Konstruktive Geometrie* (Wien 1956).]

## Literaturüberschau

H. RICHTER: *Wahrscheinlichkeitstheorie*  
 435 Seiten mit 14 Figuren. Springer-Verlag, Berlin 1956

Die unglaubliche Wandlung, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Jahrzehnten erfahren hat, könnte nicht eindrücklicher vor Augen geführt werden, als wenn man das neue Buch von RICHTER mit einem früheren Standardwerk, etwa mit der 1902 in erster Auflage erschienenen *Wahrscheinlichkeitsrechnung* von E. CZUBER, vergleicht. RICHTER setzt sich keineswegs zum Ziel, einen möglichst umfassenden Überblick darüber zu geben, was heute auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie erreicht ist. Er will vielmehr ein der modernen Auffassung entsprechendes Lehrbuch geben, das den Leser in die Lage versetzt, schwierigere moderne Untersuchungen zu studieren und zu verstehen. Dies ist ihm denn auch vortrefflich gelungen, wie kaum anders zu erwarten; war er es doch, der in einer Aufsatzreihe in den «*Mathematischen Annalen*» 1952–54 eine kritische Auseinandersetzung mit den bestehenden Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und einen Neuaufbau derselben geliefert hat. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie soll ein abstraktes Modell aufbauen,